回転球面上での 2 次元順圧流体の自由減衰乱流問題の定式化

竹広 真一, SPMODEL 開発グループ

平成 20 年 3 月 4 日

1　はじめに

2　支配方程式

支配方程式は, 回転球面上での渦度方程式である (「2 次元回転球面上での非発散順圧流体の定式化」参照):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{a^2}J(\psi,\zeta) + \frac{2\Omega}{a^2}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = (-1)^{p+1}\nu_{2p}\left(\nabla^2 + \frac{2}{a^2}\right)^p \zeta, \tag{1}$$

ここで ζ は渦度の動径成分, t は時間, ψ は流線関数, a は 球の半径, Ω は球の回転角速度, λ は経度, ν_p は高階粘性の係数である[1]. $J(f,g) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}\dfrac{\partial g}{\partial \mu} - \dfrac{\partial f}{\partial \mu}\dfrac{\partial g}{\partial \lambda} = \dfrac{1}{\cos\varphi}\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}\dfrac{\partial g}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\dfrac{1}{\cos\varphi}\dfrac{\partial g}{\partial \lambda}$ はヤコビアンであり, φ は緯度, $\mu = \sin\varphi$ は sin 緯度 である.

流線関数と速度の経度・緯度成分 u_λ, u_φ との関係は

$$u_\lambda = -\frac{1}{a}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \tag{2}$$

[1] $p = 1$ で通常の粘性項になる

であり, したがって渦度と流線関数の関係は

$$\begin{aligned}\zeta &= (\nabla\times\boldsymbol{u})_r = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\lambda} - \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial(u_\lambda\cos\varphi)}{\partial\varphi} \\ &= \frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) \\ &= \nabla^2\psi. \end{aligned} \tag{3}$$

ここで $\nabla^2 \equiv \dfrac{1}{a^2\cos^2\varphi}\dfrac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \dfrac{1}{a^2\cos\varphi}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ は半径 a の球面上での 2 次元水平ラプラシアンである.

3　運動エネルギー・エンストロフィー

3.1　定義

球面上の各点 (λ,φ) における局所的な運動エネルギー e_k は次のように定義される.

$$e_k(\lambda,\varphi,t) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 = \frac{1}{2}(u_\lambda^2 + u_\varphi^2). \tag{4}$$

全運動エネルギー E_k はこれを球面全体で積分して得られる.

$$\begin{aligned} E_k(t) &= \iint_S dSe_k(\lambda,\varphi,t) = \frac{1}{2}\iint_S dS|\boldsymbol{u}|^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\lambda\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\, a^2\cos\varphi(u_\lambda^2+u_\varphi^2). \end{aligned}$$

球面上の各点 (λ,φ) における局所的なエンストロフィーは $\dfrac{1}{2}\zeta^2$ で定義される. 全エンストロフィー $\mathcal{Q}$ はこれを球面全体で積分して得られる.

$$\mathcal{Q}(t) = \iint_S dS\left(\frac{1}{2}\zeta^2\right) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\lambda\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\, a^2\cos\varphi\,\zeta^2 \tag{5}$$

3.2　エネルギー・エンストロフィーのスペクトル分解

(2) を用いて全エネルギーを表現すると

$$E_k(t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\lambda\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\, a^2\cos\varphi\left[\left(\frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\ \cos\varphi \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2\right].$$

ここで流線関数を球面調和函数で展開する. すなわち,

$$\psi(\lambda,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \tilde{\psi}_n^m(t) Y_n^m(\lambda,\varphi) \tag{6}$$

これを上の式に代入すると

$$\begin{aligned}
E_k(t) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\ \cos\varphi \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} \tilde{\psi}_n^m \frac{\partial Y_n^m}{\partial\varphi}\tilde{\psi}_{n'}^{m'}\frac{\partial Y_{n'}^{m'}}{\partial\varphi}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} \tilde{\psi}_n^m \frac{\partial Y_n^m}{\partial\lambda}\tilde{\psi}_{n'}^{m'}\frac{\partial Y_{n'}^{m'}}{\partial\lambda}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} \tilde{\psi}_n^m\tilde{\psi}_{n'}^{m'} \\
&\qquad \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\ \cos\varphi \left(\frac{\partial Y_n^m}{\partial\varphi}\frac{\partial Y_{n'}^{m'}}{\partial\varphi} + \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial Y_n^m}{\partial\lambda}\frac{\partial Y_{n'}^{m'}}{\partial\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} \tilde{\psi}_n^m\tilde{\psi}_{n'}^{m'} \int_0^{2\pi} d\lambda \left[Y_n^m \frac{\partial Y_{n'}^{m'}}{\partial\varphi}\cos\varphi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&\qquad - \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\ Y_n^m \frac{\partial}{\partial\varphi}\cos\varphi\frac{\partial Y_{n'}^{m'}}{\partial\varphi} \\
&\qquad + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\ \left[\frac{1}{\cos^2\varphi} Y_n^m \frac{\partial Y_{n'}^{m'}}{\partial\lambda}\right]_0^{2\pi} \\
&\qquad - \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\ \frac{1}{\cos^2\varphi} Y_n^m \frac{\partial^2 Y_{n'}^{m'}}{\partial\lambda^2} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} \tilde{\psi}_n^m\tilde{\psi}_{n'}^{m'} \\
&\qquad \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos\varphi Y_n^m \left[\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial Y_{n'}^{m'}}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 Y_{n'}^{m'}}{\partial\lambda^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} \tilde{\psi}_n^m\tilde{\psi}_{n'}^{m'} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos\varphi\, n'(n'+1) Y_n^m Y_{n'}^{m'} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} \tilde{\psi}_n^m\tilde{\psi}_{n'}^{m'} \delta_{nn'}\delta_{mm'} n'(n'+1) N_l^m \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} N_l^m n(n+1) |\tilde{\psi}_n^m(t)|^2.
\end{aligned}$$

ここで N_n^m は

$$N_n^m \equiv \iint_S dS |Y_n^m(\lambda,\varphi)|^2 = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos\varphi |Y_n^m(\lambda,\varphi)|^2, \tag{7}$$

であり, 球面調和函数の規格化によって値が異なる[2]. したがって, エネルギースペクトル密度 $\mathcal{E}(n,t)$ を

$$\mathcal{E}(n,t) \equiv \frac{1}{2}\sum_{m=-n}^{n} N_n^m n(n+1)|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2 \tag{8}$$

と定義できて,

$$E_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}(n,t), \tag{9}$$

となる.

特に, 球面調和函数が 4π で規格化されている場合, すなわち $N_n^m = 4\pi$ の場合には, この規格化係数を省略したエネルギー密度を

$$\mathcal{E}(n,t) \equiv \frac{1}{2}n(n+1)\sum_{m=-n}^{n} |\tilde{\psi}_n^m(t)|^2 \tag{10}$$

と定義することができる. その場合,

$$E_k(t) = 4\pi\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}(n,t), \tag{11}$$

となる.

同様に, (3) を用いて全エンストロフィーを表し, 流線関数を球面調和函数展開すれば,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(t) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\, a^2\cos\varphi\, (\nabla^2\psi)^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\, a^2\cos\varphi\, \left(\nabla^2 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \tilde{\psi}_n^m Y_n^m\right)\left(\nabla^2 \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} \tilde{\psi}_{n'}^{m'} Y_{n'}^{m'}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\, a^2\cos\varphi \\
&\qquad \times \left(-\frac{n(n+1)}{a^2}\tilde{\psi}_n^m Y_n^m\right)\left(-\frac{n'(n'+1)}{a^2}\tilde{\psi}_{n'}^{m'} Y_{n'}^{m'}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} \frac{n(n+1)n'(n'+1)}{a^2}\tilde{\psi}_n^m\tilde{\psi}_{n'}^{m'} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\, \cos\varphi\, Y_n^m Y_{n'}^{m'} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} \frac{n(n+1)n'(n'+1)}{a^2}\tilde{\psi}_n^m\tilde{\psi}_{n'}^{m'} N_l^m \delta_{n,n'}\delta_{m,m'} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} N_l^m \frac{n^2(n+1)^2}{a^2}|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2.
\end{aligned}$$

[2]ISPACK では 2 に規格化されたルジャンドル函数を用いているので $N_n^m = 4\pi$ である (要確認)

したがって, エンストロフィースペクトル密度 $\mathcal{Q}(n,t)$ を

$$\mathcal{Q}(n,t) \equiv \frac{1}{2a^2}\sum_{m=-n}^{n} N_n^m n^2(n+1)^2|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2 \tag{12}$$

と定義できて,

$$Q(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{Q}(n,t), \tag{13}$$

となる.

エンストロフィーについても, 球面調和函数が 4π で規格化されている場合, すなわち $N_l^m = 4\pi$ の場合には, 規格化係数を省略したエンストロフィー密度を

$$\mathcal{Q}(n,t) \equiv \frac{n^2(n+1)^2}{2a^2}\sum_{m=-n}^{n}|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2 \tag{14}$$

と定義することができる. その場合,

$$Q(t) = 4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{Q}(n,t), \tag{15}$$

となる.

3.3　全運動エネルギー, 全エンストロフィーの時間変化

全運動エネルギーの式は渦度方程式 (1) に $-\psi$ をかけて球面全体で積分することにより得ることができる.

$$-\int\int dS\psi\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \int\int dS\psi\frac{1}{a^2}J(\psi,\zeta) - \int\int dS\psi\frac{2\Omega}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -\int\int dS\psi(-1)^{p+1}\nu_{2p}\left(\nabla^2+\frac{2}{a^2}\right)^p\zeta,$$

ただし

$$\int\int dS = a^2\int_0^{2\pi}d\lambda\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\cos\varphi = a^2\int_0^{2\pi}d\lambda\int_{-1}^{1}d\mu$$

は球面全積分である. 第 1 項目は

$$\begin{aligned}
-\int\int dS\psi\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= -\int\int dS\psi\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi \\
&= -\int\int dS\psi\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right] \\
&= \int\int dS\frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \int\int dS\frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial t} \\
&= \int\int dS\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2 + \int\int dS\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2 \\
&= \frac{d}{dt}\int\int dS\frac{1}{2}(u_\lambda^2+u_\varphi^2) = \frac{dE_k}{dt}
\end{aligned}$$

第 2 項目は

$$\int\int dS\psi\frac{1}{a^2}J(\psi,\zeta) = \int\int dS\frac{1}{a^2}J(\frac{1}{2}\psi^2,\zeta)$$

ここでヤコビアン $J(f,g)$ は

$$J(f,g) = \frac{\partial f}{\partial\lambda}\frac{\partial g}{\partial\mu} - \frac{\partial f}{\partial\mu}\frac{\partial g}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(f\frac{\partial g}{\partial\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial\mu}\left(f\frac{\partial g}{\partial\lambda}\right)$$

と変形できるので全球積分すると 0 となる. 第 3 項目は

$$-\int\int dS\psi\frac{2\Omega}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -\int\int dS\frac{\Omega}{a^2}\frac{\partial\psi^2}{\partial\lambda} = 0.$$

最後の粘性項は球面調和函数展開して評価する.

$$\begin{aligned}
&-\int\int dS\psi(-1)^{p+1}\nu_{2p}\left(\nabla^2+\frac{2}{a^2}\right)^p\zeta = \int\int dS\psi(-1)^p\nu_{2p}\left(\nabla^2+\frac{2}{a^2}\right)^p\nabla^2\psi \\
&= \int\int dS\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'}\tilde{\psi}_{n'}^{m'}(t)Y_{n'}^{m'}(\lambda,\varphi) \\
&\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(-1)^p\nu_{2p}\left(\frac{-n(n+1)+2}{a^2}\right)^p\left(\frac{-n(n+1)}{a^2}\right)\tilde{\psi}_n^m(t)Y_n^m(\lambda,\varphi) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p\left(\frac{n(n+1)}{a^2}\right)|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2\int\int dSY_n^m(\lambda,\varphi)^2 \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p\left(\frac{n(n+1)}{a^2}\right)a^2N_n^m|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2 \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p n(n+1)N_n^m|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2
\end{aligned}$$

ただし, N_n^m は球面調和函数の規格化定数である. よって全運動エネルギーの時間変化は

$$\frac{dE_k}{dt} = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p n(n+1)N_n^m|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2. \tag{16}$$

特に球面調和函数の規格化定数が $N_n^m = 4\pi$ の場合には

$$\frac{dE_k}{dt} = -4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p n(n+1)|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2 \tag{17}$$

$$= -4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p 2\mathcal{E}(n,t). \tag{18}$$

ただし $\mathcal{E}(n,t)$ は (10) で定義されるスペクトル密度である. 全運動エネルギーの代わりに球面平均したエネルギー $\bar{E}_k$ の時間変化は全体を $4\pi a^2$ でわって

$$\frac{d\bar{E}_k}{dt} = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p\frac{n(n+1)}{a^2}|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2 \tag{19}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p\frac{2}{a^2}\mathcal{E}(n,t). \tag{20}$$

$E_k, \bar{E_k}$ も球面調和函数展開で表しておくと

$$E_k = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{n(n+1)}{2} |\tilde{\psi}_n^m(t)|^2 = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}(n,t), \tag{21}$$

$$\bar{E_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{n(n+1)}{2a^2} |\tilde{\psi}_n^m(t)|^2 = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}(n,t). \tag{22}$$

全エンストロフィーの時間変化の式は渦度方程式 (1) に $\zeta = \dfrac{1}{a^2}\nabla^2\psi$ をかけて球面全体で積分することにより得ることができる.

$$\int\int dS\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \int\int dS\zeta\frac{1}{a^2}J(\psi,\zeta)\int\int dS\zeta\frac{2\Omega}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \int\int dS\zeta(-1)^{p+1}\nu_{2p}\left(\nabla^2+\frac{2}{a^2}\right)^p\zeta,$$

第 1 項目は

$$\int\int dS\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \int\int dS\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\zeta^2\right) = \frac{dQ}{dt}.$$

第 2 項目は

$$\int\int dS\zeta\frac{1}{a^2}J(\psi,\zeta)\int\int dS\frac{1}{2a^2}J(\psi,\zeta^2) = 0.$$

第 3 項目は

$$\int\int dS\zeta\frac{2\Omega}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{2\Omega}{a^2}\int\int dS\left[\frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right]\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$$

1 つ目の被積分関数は

$$\frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{1}{2a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2$$

と変形できて, この全球積分は 0 となる. 2 つ目の被積分関数は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\\ &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\psi\frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right] - \psi\frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\lambda}\right),\end{aligned}$$

一方で

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right] - \frac{\cos\varphi}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\lambda}\\ &= \frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right] - \frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\cos\varphi\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\lambda}\right]\\ &\quad +\psi\frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\cos\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\lambda}\right].\end{aligned}$$

これらを 1/2 倍して足し合わせると最後の項がキャンセルして

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\\
&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\psi\frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right]+\frac{1}{2a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right]\\
&\quad-\frac{1}{2a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\cos\varphi\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial\lambda}\right].
\end{aligned}
$$

これを全球積分すると 0 になる. 最後に粘性項を球面調和関数展開で表現すると

$$
\begin{aligned}
&\int\int dS\zeta(-1)^{p+1}\nu_{2p}\left(\nabla^2+\frac{2}{a^2}\right)^p\zeta=\int\int dS\nabla^2\psi(-1)^{p+1}\nu_{2p}\left(\nabla^2+\frac{2}{a^2}\right)^p\nabla^2\psi\\
&=\int\int dS(-1)^{p+1}\nu_{2p}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'}\left(\frac{-n'(n'+1)}{a^2}\right)\tilde{\psi}_{n'}^{m'}(t)Y_{n'}^{m'}(\lambda,\varphi)\\
&\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(-1)^{p+1}\nu_{2p}\left(\frac{-n(n+1)+2}{a^2}\right)^p\left(\frac{-n(n+1)}{a^2}\right)\tilde{\psi}_n^m(t)Y_n^m(\lambda,\varphi)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(-1)^{p+1}\nu_{2p}\left(\frac{-n(n+1)+2}{a^2}\right)^p\left(\frac{-n(n+1)}{a^2}\right)^2|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2\int\int dS|Y_n^m(\lambda,\varphi)|^2\\
&=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p\frac{n^2(n+1)^2}{a^2}N_n^m|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2\\
&=-\sum_{n=0}^{\infty}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p 2\mathcal{Q}(n,t)
\end{aligned}
$$

したがって全エンストロフィーの時間変化の式は

$$
\frac{dQ}{dt}=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p\frac{n^2(n+1)^2}{a^2}N_n^m|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2 \tag{23}
$$

特に球面調和函数の規格化係数 $N_n^m=4\pi$ の場合には全エンストロフィーの時間変化の式は

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt}&=-4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p\frac{n^2(n+1)^2}{a^2}|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2\\
&=-4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p 2\mathcal{Q}(n,t).
\end{aligned}
$$

ただし $\mathcal{Q}(n,t)$ は (14) で定義されるエンストロフィースペクトル密度である. 全エンストロフィーの代わりに球面平均したエンストロフィー $\bar{Q}$ の時間変化は全体を $4\pi a^2$ でわって

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{Q}}{dt}&=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p\frac{n^2(n+1)^2}{a^4}|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2\\
&=-\sum_{n=0}^{\infty}\nu_{2p}\left(\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right)^p\frac{2}{a^2}\mathcal{Q}(n,t).
\end{aligned}
$$

$Q, \bar{Q}$ も球面調和関数展開表現で表しておくと

$$
\begin{aligned}
Q &= 4\pi\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{n^2(n+1)^2}{a^2}|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2 = 4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{Q}(n,t), && (24)\\
\bar{Q} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{n^2(n+1)^2}{a^4}|\tilde{\psi}_n^m(t)|^2 = \frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{Q}(n,t), && (25)\\
& && (26)
\end{aligned}
$$

4 数値計算 : 球面調和函数展開と時間積分

4.1 球面調和函数展開

スペクトル法による数値計算を行うために, 各物理量を球面調和函数 $Y_n^m(\lambda,\varphi)$ で展開する. すなわち,

$$
\begin{aligned}
\zeta(\lambda,\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\tilde{\zeta}_n^m(t)Y_n^m(\lambda,\varphi), && (27)\\
\psi(\lambda,\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\tilde{\psi}_n^m(t)Y_n^m(\lambda,\varphi) && (28)
\end{aligned}
$$

ここで, 球面調和函数は数値計算のため実関数としてつぎのように定義されたものを扱う.

$$
\begin{aligned}
Y_n^m(\lambda,\varphi) &= P_n^m(\cos\varphi)\cos(m\lambda) \quad (m \geq 0), && (29)\\
&= P_n^{|m|}(\cos\varphi)\sin(|m|\lambda) \quad (m < 0), && (30)
\end{aligned}
$$

これを (1) に代入し, $Y_{n'}^{m'}(\lambda,\varphi)$ をかけて全球面で積分することにより, 球面調和函数の直交関係から以下の式が得られる.

$$
\frac{d\tilde{\zeta}_n^m}{dt} = -\frac{1}{a^2}[J(\psi,\zeta)]_n^m - \frac{2\Omega}{a^2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right]_n^m + \left[(-1)^{p+1}\nu_{2p}\left(\nabla^2+\frac{2}{a^2}\right)^p\zeta\right]_n^m
$$

ただし $[\ldots]_n^m$ は球面調和函数の n, m 成分であることを表している. 散逸項はラプラシアンが球面調和函数の固有演算子であることから

$$
\begin{aligned}
\left[(-1)^{p+1}\nu_{2p}\left(\nabla^2+\frac{2}{a^2}\right)^p\zeta(\lambda,\varphi,t)\right]_n^m &= (-1)^{p+1}\nu_{2p}\left[\frac{-n(n+1)+2}{a^2}\right]^p\tilde{\zeta}_n^m(t)\\
&= -\nu^*(n,p)\tilde{\zeta}_n^m(t),
\end{aligned}
$$

となる. ここで, 波数毎の超粘性係数 $\nu^*(n,p)$ を

$$\nu^*(n,p) \equiv (-1)^p \nu_{2p} \left[\frac{-n(n+1)+2}{a^2}\right]^p = \nu_{2p}\left[\frac{n(n+1)-2}{a^2}\right]^p \tag{31}$$

と定義した ($\nu^*(n,p)$ は 0 以上であることに注意). したがって,

$$\frac{d\tilde{\zeta}_n^m}{dt} = -\frac{1}{a^2}[J(\psi,\zeta)]_n^m - \frac{2\Omega}{a^2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right]_n^m - \nu^*(n,p)\tilde{\zeta}_n^m \tag{32}$$

4.2 時間積分

4.2.1 euler スキーム (1 次精度)

euler スキームの場合は時間変化項をすべて現在時間で評価して,

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\zeta}(t+\Delta t)_n^m - \tilde{\zeta}(t)_n^m}{\Delta t} \quad = \quad & -\frac{1}{a^2}[J(\psi(\lambda,\varphi,t),\zeta(\lambda,\varphi,t))]_n^m - \frac{2\Omega}{a^2}\left[\frac{\partial\psi(\lambda,\varphi,t)}{\partial\lambda}\right]_n^m \\ & -\nu^*(n,p)\tilde{\zeta}_n^m(t)\end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}(t+\Delta t)_n^m = \tilde{\zeta}(t)_n^m \quad + \quad \Delta t \times \Bigg\{ & -\frac{1}{a^2}[J(\psi(\lambda,\varphi,t),\zeta(\lambda,\varphi,t))]_n^m - \frac{2\Omega}{a^2}\left[\frac{\partial\psi(\lambda,\varphi,t)}{\partial\lambda}\right]_n^m \\ & -\nu^*(n,p)\tilde{\zeta}_n^m(t)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{33}$$

4.2.2 Crank-Nicolson and Adams-Bashforth スキーム (2 次精度)

散逸項に Clank-Nicolson スキーム, それ以外の項に 2 次の Adams-Bashforth スキームを適用する場合には, 時間積分を 2 段階に分けて

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\zeta}^*(t+\Delta t)_n^m - \tilde{\zeta}(t)_n^m}{\Delta t} &= \frac{3}{2}\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{nd}(t)\right]_n^m - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{nd}(t-\Delta t)\right]_n^m, \\ \frac{\tilde{\zeta}(t+\Delta t)_n^m - \tilde{\zeta}^*(t+\Delta t)_n^m}{\Delta t} &= \frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_d(t+\Delta t)\right]_n^m + \left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_d(t)\right]_n^m\right\},\end{aligned}$$

ただし, $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{nd}$, $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_d$ はそれぞれ時間変化の非散逸項と散逸項を表している:

$$\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{nd}(t)\right]_n^m \equiv -\frac{1}{a^2}[J(\psi(\lambda,\varphi,t),\zeta(\lambda,\varphi,t))]_n^m - \frac{2\Omega}{a^2}\left[\frac{\partial\psi(\lambda,\varphi,t)}{\partial\lambda}\right]_n^m,$$

$$\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_d (t)\right]_n^m \equiv -\nu^*(n,p)\tilde{\zeta}_n^m(t)$$

すると,

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\zeta}^*(t+\Delta t)_n^m - \tilde{\zeta}(t)_n^m}{\Delta t} &= \frac{3}{2}\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{nd}(t)\right]_n^m - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{nd}(t-\Delta t)\right]_n^m \\ \frac{\tilde{\zeta}(t+\Delta t)_n^m - \tilde{\zeta}^*(t+\Delta t)_n^m}{\Delta t} &= \frac{-\nu^*(n,p)\tilde{\zeta}_n^m(t+\Delta t) - \nu^*(n,p)\tilde{\zeta}_n^m(t)}{2},\end{aligned}$$

したがって

$$\tilde{\zeta}^*(t+\Delta t)_n^m = \tilde{\zeta}(t)_n^m + \Delta t \times \left\{\frac{3}{2}\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{nd}(t)\right]_n^m - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{nd}(t-\Delta t)\right]_n^m\right\} \quad (34)$$

$$\tilde{\zeta}(t+\Delta t)_n^m = \frac{1-\nu^*(n,p)\Delta t/2}{1+\nu^*(n,p)\Delta t/2} \times \tilde{\zeta}^*(t+\Delta t)_n^m. \quad (35)$$

4.2.3 演算子分割処理法 (粘性項) と 4 次精度 Runge-Kutta スキーム

変数変換することによって粘性項を解析的に評価し, その他の項を高次の数値積分スキームを適用する演算子分割法をとる場合を以下に示す. 渦度のスペクトル成分について

$$\tilde{\zeta}(t)_n^m = \hat{\zeta}(t)_n^m e^{-\nu^*(n,p)t} \quad (36)$$

と変数変換すれば,

$$\frac{d\tilde{\zeta}_n^m}{dt} = \frac{d\hat{\zeta}(t)_n^m}{dt}e^{-\nu^*(n,p)t} - \nu^*(n,p)\hat{\zeta}(t)_n^m e^{\nu^*(n,p)t} = \frac{d\hat{\zeta}(t)_n^m}{dt}e^{-\nu^*(n,p)t} - \nu^*(n,p)\tilde{\zeta}(t)_n^m$$

であるから, (32) は

$$\frac{d\hat{\zeta}(t)_n^m}{dt}e^{-\nu^*(n,p)t} = -\frac{1}{a^2}[J(\psi,\zeta)]_n^m - \frac{2\Omega}{a^2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right]_n^m. \quad (37)$$

$$\frac{d\hat{\zeta}(t)_n^m}{dt} = e^{\nu^*(n,p)t}\left[-\frac{1}{a^2}[J(\psi,\zeta)]_n^m - \frac{2\Omega}{a^2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right]_n^m\right]. \quad (38)$$

この左辺の時間積分を Runge-Kutta スキームで計算する. すなわち,

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}(t+\Delta t)_n^m &= \hat{\zeta}(t+\Delta t)_n^m e^{-\nu^*(n,p)\Delta t}, \\ \hat{\zeta}(t+\Delta t)_n^m &= \tilde{\zeta}(t)_n^m + \Delta t \times \left(\frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}\right), \\ k_1 &= f[\zeta(t),\psi(t),0]_n^m,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= f[\zeta(t_1), \psi(t_1), \Delta t/2]_n^m \\
k_3 &= f[\zeta(t_2), \psi(t_2), \Delta t/2]_n^m \\
k_4 &= f[\zeta(t_3), \psi(t_3), \Delta t]_n^m \\
f[\zeta, \psi, t]_n^m &= e^{\nu^*(n,p)t}\left[-\frac{1}{a^2}[J(\psi,\zeta)]_n^m - \frac{2\Omega}{a^2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right]_n^m\right], \\
\tilde{\zeta}_n^m(t_1) &= e^{-\nu^*(n,p)\Delta t/2}[\tilde{\zeta}(t)_n^m + k_1\Delta t/2], \\
\tilde{\zeta}_n^m(t_2) &= e^{-\nu^*(n,p)\Delta t/2}[\tilde{\zeta}(t)_n^m + k_2\Delta t/2], \\
\tilde{\zeta}_n^m(t_3) &= e^{-\nu^*(n,p)\Delta t}[\tilde{\zeta}(t)_n^m + k_3\Delta t].
\end{aligned}
$$

この定式化において $\tilde{\zeta}(t)_n^m = \hat{\zeta}(t)_n^m$ であることを用いていることに注意されたい.

4.2.4 演算子分割処理法 (線形項) と 4 次精度 Runge-Kutta スキーム

粘性項だけでなく, 全ての線形項を演算子分割処理方によって解析的に扱い, 残りの非線形項のみ数値積分して解くための定式化を記す.

今, m を正の整数として, (32) の (n,m) 成分と $(n,-m)$ 成分の式を書き下すと

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\zeta}_n^m}{dt} &= -\frac{1}{a^2}[J(\psi,\zeta)]_n^m - \frac{2\Omega}{a^2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right]_n^m - \nu^*(n,p)\tilde{\zeta}_n^m, \\
\frac{d\tilde{\zeta}_n^{-m}}{dt} &= -\frac{1}{a^2}[J(\psi,\zeta)]_n^{-m} - \frac{2\Omega}{a^2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right]_n^{-m} - \nu^*(n,p)\tilde{\zeta}_n^{-m}
\end{aligned}
$$

ここで $\nabla^2\psi = \zeta$ より $\tilde{\psi}_n^m = -a^2\tilde{\zeta}_n^m/n(n+1)$ であることを用いると,

$$
\frac{2\Omega}{a^2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right]_n^m = \frac{2\Omega m}{n(n+1)}\tilde{\zeta}_n^{-m}, \quad \frac{2\Omega}{a^2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right]_n^{-m} = -\frac{2\Omega m}{n(n+1)}\tilde{\zeta}_n^m,
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\zeta}_n^m}{dt} &= -\frac{1}{a^2}[J(\psi,\zeta)]_n^m - \frac{2\Omega m}{n(n+1)}\tilde{\zeta}_n^{-m} - \nu^*(n,p)\tilde{\zeta}_n^m, \\
\frac{d\tilde{\zeta}_n^{-m}}{dt} &= -\frac{1}{a^2}[J(\psi,\zeta)]_n^{-m} + \frac{2\Omega m}{n(n+1)}\tilde{\zeta}_n^m - \nu^*(n,p)\tilde{\zeta}_n^{-m}
\end{aligned}
$$

ロスビー波の位相速度 $\omega_R(n,m) \equiv -\dfrac{2\Omega|m|}{n(n+1)}$ を用いて書き直すと,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\zeta}_n^m}{dt} &= -\frac{1}{a^2}[J(\psi,\zeta)]_n^m + \omega_R(n,m)\tilde{\zeta}_n^{-m} - \nu^*(n,p)\tilde{\zeta}_n^m, \\
\frac{d\tilde{\zeta}_n^{-m}}{dt} &= -\frac{1}{a^2}[J(\psi,\zeta)]_n^{-m} - \omega_R(n,m)\tilde{\zeta}_n^m - \nu^*(n,p)\tilde{\zeta}_n^{-m}
\end{aligned}
$$

解きやすくするために $\tilde{\zeta}_n^m$ と $\tilde{\zeta}_n^{-m}$ を複素変数 Z_n^m でまとめて扱う. すなわち $Z_n^m \equiv \tilde{\zeta}_n^m + i\tilde{\zeta}_n^{-m}$ と置き換えると,

$$\frac{dZ_n^m}{dt} = G(\psi,\zeta)_n^m - i\omega_R(n,m)Z_n^m - \nu^*(n,p)Z_n^m,$$

ただし $G(\psi,\zeta)_n^m$ は非線形項を複素表示したものであり,
$G(\psi,\zeta)_n^m \equiv -\left[\frac{1}{a^2}[J(\psi,\zeta)]_n^m + i\frac{1}{a^2}[J(\psi,\zeta)]_n^{-m}\right]$ である.

線形項を消去すべく $Z_n^m(t) = \hat{Z}_n^m(t)e^{-[i\omega_R(n,m)+\nu^*(n,p)]t}$ と変換すれば,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{Z}_n^m}{dt}e^{-[i\omega_R(n,m)+\nu^*(n,p)]t} &- [i\omega_R(n,m)+\nu^*(n,p)]\hat{Z}_n^m(t)e^{-[i\omega_R(n,m)+\nu^*(n,p)]t} \\ &= G(\psi,\zeta)_n^m - [i\omega_R(n,m)Z_n^m + \nu^*(n,p)]Z_n^m,\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{d\hat{Z}_n^m}{dt} = e^{[i\omega_R(n,m)+\nu^*(n,p)]t}G(\psi,\zeta)_n^m$$

実部と虚部に分けて $Re[\hat{Z}_n^m] = \xi_n^m, Im[\hat{Z}_n^m] = \xi_n^{-m}$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_n^m}{dt} &= e^{\nu^*(n,p)]t}\cos(\omega_R(n,m)t)Re[G(\psi,\zeta)_n^m] - e^{\nu^*(n,p)]t}\sin(\omega_R(n,m)t)Im[G(\psi,\zeta)_n^m] \\ &= e^{\nu^*(n,p)]t}\cos(\omega_R(n,m)t)\left[-\frac{1}{a^2}J(\psi,\zeta)\right]_n^m - e^{\nu^*(n,p)]t}\sin(\omega_R(n,m)t)\left[-\frac{1}{a^2}J(\psi,\zeta)\right]_n^{-m} \quad (39) \\ \frac{d\xi_n^{-m}}{dt} &= e^{\nu^*(n,p)]t}\cos(\omega_R(n,m)t)Im[G(\psi,\zeta)_n^m] + e^{\nu^*(n,p)]t}\sin(\omega_R(n,m)t)Re[G(\psi,\zeta)_n^m] \\ &= e^{\nu^*(n,p)]t}\cos(\omega_R(n,m)t)\left[-\frac{1}{a^2}J(\psi,\zeta)\right]_n^{-m} + e^{\nu^*(n,p)]t}\sin(\omega_R(n,m)t)\left[-\frac{1}{a^2}J(\psi,\zeta)\right]_n^m \quad (40)\end{aligned}$$

(41)

時間積分のための ξ_n^m, ξ_n^{-m} の各積分ステップでの初期値は Z_n^m と $\hat{Z}_n^m$ の関形において $t=0$ を適用すればよく, $\xi_n^m = \tilde{\zeta}_n^m, \xi_n^{-m} = \tilde{\zeta}_n^{-m}$ となる. 上の式を用いて数値積分し, あたらしい時間の ξ_n^m, ξ_n^{-m} が求まれば, 対応して $\tilde{\zeta}_n^m$ がつぎのように求められる.

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_n^m &= Re[Z_n^m] = Re[\hat{Z}_n^m e^{-[i\omega_R(n,m)+\nu^*(n,p)]t}] \\ &= Re[\hat{Z}_n^m]e^{-\nu^*(n,p)t}\cos(\omega_R(n,m)t) + Im[\hat{Z}_n^m]e^{-\nu^*(n,p)t}\sin(\omega_R(n,m)t) \\ &= \xi_n^m e^{-\nu^*(n,p)t}\cos(\omega_R(n,m)t) + \xi_n^{-m}e^{-\nu^*(n,p)t}\sin(\omega_R(n,m)t), \quad (42) \\ \tilde{\zeta}_n^{-m} &= Im[Z_n^m] = Im[\hat{Z}_n^m e^{-[i\omega_R(n,m)+\nu^*(n,p)]t}] \\ &= Im[\hat{Z}_n^m]e^{-\nu^*(n,p)t}\cos(\omega_R(n,m)t) - Re[\hat{Z}_n^m]e^{-\nu^*(n,p)t}\sin(\omega_R(n,m)t) \\ &= \xi_n^{-m}e^{-\nu^*(n,p)t}\cos(\omega_R(n,m)t) - \xi_n^m e^{-\nu^*(n,p)t}\sin(\omega_R(n,m)t). \quad (43)\end{aligned}$$

5 実験設定

5.1 初期条件

5.2 パラメター

5.3 時間積分

数値計算が意味を持つための時間積分の時間ステップの目安を見積もる. 各時間変化項の最大値は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a^2}J(\psi,\zeta) &\sim \frac{UL\cdot U/L}{L^2} \sim \frac{U^2}{L^2},\\
\frac{2\Omega}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} &\sim \frac{\Omega}{a^2}\cdot Ua \sim \frac{\Omega U}{a},\\
(-1)^{p+1}\nu_{2p}\left(\nabla^2+\frac{2}{a^2}\right)^p\zeta &\sim \nu_{2p}\left(\frac{N_{max}(N_{max}+1)}{a^2}\right)^p\cdot\frac{U}{L}
\end{aligned}
$$

ここで, U, L は現象の典型的な速度と水平スケールである. 一方, 時間変化項は $\frac{\partial\zeta}{\partial t} \sim \frac{U}{(L)(\Delta t)}$ と見積もられるので, 時間変化が十分に解像できるには $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ が各時間変化項の見積もりより大きくなるよう時間刻 Δt をとらねばならない[3]. したがって,

$$
\begin{aligned}
\frac{U}{L\Delta t} &\gg \max\left[\frac{1}{a^2}J(\psi,\zeta), \frac{2\Omega}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, (-1)^{p+1}\nu_{2p}\left(\nabla^2+\frac{2}{a^2}\right)^p\zeta\right]\\
&\sim \max\left[\frac{U^2}{L^2}, \frac{\Omega U}{a}, \nu_{2p}\left(\frac{N_{max}(N_{max}+1)}{a^2}\right)^p\cdot\frac{U}{L}\right],\\
\Delta t &\ll \min\left[\frac{L}{U}, \frac{a}{\Omega L}, \frac{1}{\nu_{2p}\left(\frac{N_{max}(N_{max}+1)}{a^2}\right)^p}\right].
\end{aligned}
$$

右辺の各項が最小となる水平スケールをそれぞれ選べば, 第 1 項目は $L \sim \Delta x$, 第 2 項目は $L \sim a$ となる. したがって,

$$
\Delta t \ll \min\left[\frac{\Delta x}{U}, \frac{1}{\Omega}, \frac{1}{\nu_{2p}\left(\frac{N_{max}(N_{max}+1)}{a^2}\right)^p}\right]. \tag{44}
$$

[3] どうもすっきりしない論理だ...

文献

SPMODEL 解説文書「2 次元回転球面上での非発散順圧流体の定式化」http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/2d-sphere-w/baro/pub/