2 次元 2 重周期境界領域での順圧流体 ～減衰乱流問題

竹広 真一, SPMODEL 開発グループ

平成 17 年 10 月 21 日

1 はじめに

この文章では, 2 次元 2 重周期境界領域での β 面順圧流体モデルの支配方程式を簡単にまとめ, 保存則の定式化とそのスペクトル表現を導出し, 最後に減衰乱流実験の問題設定について述べる.

2 支配方程式系

2.1 支配方程式

x, y 方向に各々 L_x, L_y の拡がりを持つ矩形領域での 2 次元非圧縮流体を考える. 支配方程式は渦度方程式である[1].

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + J(\psi,\zeta) + \beta(y)\frac{\partial\psi}{\partial x} = (-1)^{p+1}\nu_{2p}\nabla^{2p}\zeta, \tag{1}$$

$$\zeta(x,y,t) = \nabla^2\psi(x,y,t), \tag{2}$$

ここで $\zeta(x,y,t)$ は相対渦度, $\psi(x,y,t)$ は流線関数であり, 速度場 (u,v) と

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{3}$$

[1]導出など詳しくは「2 次元 2 重周期境界領域での順圧流体モデルの定式化」を参照のこと

なる関係をもつ.

境界条件は

$$\zeta(0,y)=\zeta(L_x,y),\quad \zeta(x,0)=\zeta(x,L_y), \tag{4}$$
$$\psi(0,y)=\psi(L_x,y),\quad \psi(x,0)=\psi(x,L_y). \tag{5}$$

ただし, 与える物理パラメター $\beta(y)$ は

$$\beta(0)=\beta(L_y), \tag{6}$$

を満たしていなければならない. β が一定の場合がいわゆる β 面モデルと呼ばれるものである.

2.2　運動エネルギー保存則

2.3　エンストロフィー保存則

3　2 重フーリエ級数展開による表現

3.1　2 重フーリエ展開

スペクトル法による数値計算を行うために, 各物理量を境界条件を満たす函数系である 2 重フーリエ級数展開する. すなわち,

$$\psi(x,y,t) = \sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\tilde{\psi}_{kl}(t)\exp\left(i\frac{2\pi x}{L_x}k\right)\exp\left(i\frac{2\pi y}{L_y}l\right), \tag{7}$$
$$\tilde{\psi}_{kl}(t) = \frac{1}{L_xL_y}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\psi(x,y,t)\exp\left(-i\frac{2\pi k}{L_x}x\right)\exp\left(-i\frac{2\pi l}{L_y}y\right)dx\,dy, \tag{8}$$

$\tilde{\psi}_{kl}(t)$ は流線関数のスペクトルの波数 k,l 成分, K,L はそれぞれ x,y 方向の切断波数である. 渦度 $\zeta(x,y,t)$ のスペクトルも同様に $\tilde{\zeta}_{kl}(t)$ を定義する.

3.2　運動エネルギースペクトル

全運動エネルギー $E_k(t) = \int_0^{L_x}\int_0^{L_y} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] dxdy$ をスペクトル成分で表す. $\tilde{k} = (2\pi k/L_x), \tilde{l} = (2\pi l/L_y)$ と置き換え, 第 1 項目だけ取りだして変形すると,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 &= \left(\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L} i\tilde{k}\tilde{\psi}_{kl}(t)e^{i\tilde{k}x+i\tilde{l}y}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L} i\tilde{k}\tilde{\psi}_{kl}(t)e^{i\tilde{k}x+i\tilde{l}y}\right)\cdot\left(\sum_{k'=-K}^{K}\sum_{l'=-L}^{L} i\tilde{k'}\tilde{\psi}_{k'l'}(t)e^{i\tilde{k'}x+i\tilde{l}y}\right).
\end{aligned}
$$

全領域積分 $\int_0^{L_x}\int_0^{L_y} dxdy$ を作用させると波数が 0 でない組み合わせの積からの積分が 0 となるので $k' = -k, l' = -l$ の寄与のみがのこる. したがって,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 dxdy &= \int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L} i\tilde{k}\tilde{\psi}_{kl}(t)e^{i\tilde{k}x+i\tilde{l}y}(-i\tilde{k})\tilde{\psi}_{-k-l}(t)e^{-i\tilde{k}x-i\tilde{l}y}dxdy \\
&= \sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\tilde{k}^2\tilde{\psi}_{kl}\tilde{\psi}_{-k-l}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y} dxdy \\
&= L_xL_y\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\tilde{k}^2|\tilde{\psi}_{kl}|^2
\end{aligned}
$$

ここで $\psi(x, y, t)$ が実数である条件から得られる関係式

$$
\tilde{\psi}_{-k-l} = \tilde{\psi}^*_{kl}
$$

を用いた[2]. 上付きのアスタリスクは複素共役を表している.

第 2 項目も同様に計算すると

$$
\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 dxdy = L_xL_y\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\tilde{l}^2|\tilde{\psi}_{kl}|^2.
$$

[2] ψ が実数であるから $\psi = \psi^*$ より

$$
\begin{aligned}
\psi(x, y, t)^* &= \sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\tilde{\psi}^*_{kl}\exp\left(-i\frac{2\pi x}{L_x}k\right)\exp\left(-i\frac{2\pi y}{L_y}l\right), &(9)\\
&= \sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\tilde{\psi}^*_{-k-l}\exp\left(i\frac{2\pi x}{L_x}k\right)\exp\left(i\frac{2\pi y}{L_y}l\right), &(10)
\end{aligned}
$$

各フーリエ成分を比較すると $\tilde{\psi}^*_{-k-l} = \tilde{\psi}_{kl}$, すなわち, $\tilde{\psi}_{-k-l} = \tilde{\psi}^*_{kl}$ が得られる.

したがって全領域積分した運動エネルギーは

$$
\begin{aligned}
E_k(t) &= \int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy \\
&= L_xL_y\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\frac{1}{2}(\tilde{k}^2+\tilde{l}^2)|\tilde{\psi}_{kl}|^2 \\
&= L_xL_y\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\pi k}{L_x}\right)^2+\left(\frac{2\pi l}{L_y}\right)^2\right]|\tilde{\psi}_{kl}|^2.
\end{aligned} \tag{11}
$$

この式から, 各波数でのエネルギー密度, すなわちエネルギースペクトルを次のように定義できる.

$$
\mathcal{E}(k,l,t) \equiv \frac{1}{2}(\tilde{k}^2+\tilde{l}^2)|\tilde{\psi}_{kl}|^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\pi k}{L_x}\right)^2+\left(\frac{2\pi l}{L_y}\right)^2\right]|\tilde{\psi}_{kl}|^2. \tag{12}
$$

このとき全運動エネルギーは

$$
E_k(t) = L_xL_y\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\mathcal{E}(k,l,t). \tag{13}
$$

3.3 エンストロフィースペクトル

全エンストロフィー$Q(t) = \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\zeta(x,y,t)^2dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}[\nabla^2\psi(x,y,t)]^2dxdy$ をスペクトル成分で表す.

$$
\begin{aligned}
[\nabla^2\psi(x,y,t)]^2 &= \left(\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}(\tilde{k}^2+\tilde{l}^2)\tilde{\psi}_{kl}e^{i\tilde{k}x+i\tilde{l}y}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}(\tilde{k}^2+\tilde{l}^2)\tilde{\psi}_{kl}e^{i\tilde{k}x+i\tilde{l}y}\right)\cdot\left(\sum_{k'=-K}^{K}\sum_{l'=-L}^{L}(\tilde{k'}^2+\tilde{l}^2)\tilde{\psi}_{k'l'}e^{i\tilde{k}'x+i\tilde{l}'y}\right).
\end{aligned}
$$

全領域積分 $\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}dxdy$ を作用させると波数が 0 でない組み合わせの積からの積分が 0 となるので $k'=-k, l'=-l$ の寄与のみがのこる. したがって,

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}[\nabla^2\psi(x,y,t)]^2dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left(\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}(\tilde{k}^2+\tilde{l}^2)\tilde{\psi}_{kl}e^{i\tilde{k}x+i\tilde{l}y}(\tilde{k}^2+\tilde{l}^2)\tilde{\psi}_{-k-l}e^{-i\tilde{k}x-i\tilde{l}y}\right)dxdy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}(\tilde{k}^2+\tilde{l}^2)^2\tilde{\psi}_{kl}\tilde{\psi}_{-k-l}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}dxdy \\
&= L_xL_y\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\frac{1}{2}(\tilde{k}^2+\tilde{l}^2)^2|\tilde{\psi}_{kl}|^2 \\
&= L_xL_y\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\pi k}{L_x}\right)^2+\left(\frac{2\pi l}{L_y}\right)^2\right]^2|\tilde{\psi}_{kl}|^2.
\end{aligned}
$$

したがって波数ごとのエンストロフィー密度 $\mathcal{Q}(k,l,t)$ が定義できて,

$$
\mathcal{Q}(k,l,t) = \frac{1}{2}(\tilde{k}^2+\tilde{l}^2)^2|\tilde{\psi}_{kl}|^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\pi k}{L_x}\right)^2+\left(\frac{2\pi l}{L_y}\right)^2\right]^2|\tilde{\psi}_{kl}|^2. \tag{14}
$$

このとき全エンストロフィーは

$$
Q(t) = L_xL_y\sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\mathcal{Q}(k,l,t). \tag{15}
$$

4 実験設定