

第7章 粘性流体の流れの例

7.1 一方向の流れ

一定の断面形をもつまっすぐな管を通る流れを考える。流れの方向に x 軸を取る。このとき、速度は $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$ となる。

ナビエーストックス方程式は

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 v_x, \quad (7.1)$$

$$\rho \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \nabla^2 v_y, \quad (7.2)$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \nabla^2 v_z, \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (7.4)$$

連続の式 (7.4) は

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (7.5)$$

となるので、 v_x は x によらない: $v_x = v_x(y, z, t)$ 。

運動方程式の y 成分の式 (7.2), z 成分の式 (7.3) から、 p は y, z によらない: $p = p(x, t)$ 。

以上より、運動方程式の x 成分は

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t}(y, z, t) - \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x(y, z, t) = -\frac{\partial p}{\partial x}(x, t). \quad (7.6)$$

左辺は x を含まず、右辺は y, z を含まないので、両辺は t だけの関数。よって

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha(t), \quad (7.7)$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} - \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x = \alpha(t) \quad (7.8)$$

と書くことができる。 $\alpha(t)$ は時間 t の関数である。第一式より、圧力勾配は x によらない値 $-\alpha(t)$ となる。第二式を境界条件のもとに解いて流れ場を求めることができる。

定常な流れの場合, ポアソン方程式を解くことに帰着される.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_x = -\frac{\alpha}{\eta}, \quad (7.9)$$

$$\alpha = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad [\text{Nm}^{-3}] \quad (7.10)$$

7.2 クエット流

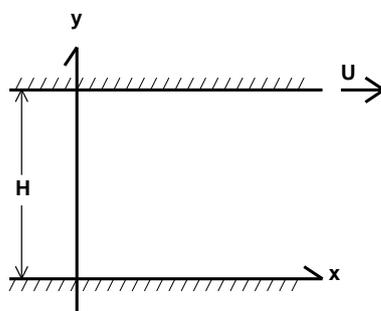
以下の状況を考える.

- 2枚の平行な板にはさまれた密度一定の2次元非圧縮流体.
- $y = 0$ の壁は静止し, $y = H$ の壁は速度 U で x 正方向に運動
- 定常状態.
- 物理量は x 方向に変化しないものとする.

境界条件は

$$v_x = 0, \quad v_y = 0 \quad (y = 0), \quad (7.11)$$

$$v_x = U, \quad v_y = 0 \quad (y = H) \quad (7.12)$$



7.2.1 速度場

定常, x 方向変化無し of 仮定より $-\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha = 0$ (p は一定). よって, 流れ場は

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \quad (7.13)$$

で決定される (もともと x, y の2次元の問題). 2回積分すると

$$v_x = ay + b \quad (7.14)$$

境界条件 $v_x = 0 (y = 0)$, $v_x = U (y = H)$ より

$$b = 0, a = \frac{U}{H} \quad (7.15)$$

よって,

$$v_x = \frac{U}{H}y \quad (7.16)$$

これは2枚の平板を相対的に動かすだけで圧力勾配を働かせないときに生じる流れであり、クエットの流れ (Couette flow) と呼ばれる。

7.2.2 上下の壁に働く応力

応力テンソルは

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad [\text{N m}^{-2}] \quad (7.17)$$

今の場合、(7.16) より

$$\sigma_{xx} = -p + \eta 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} = -p, \quad (7.18)$$

$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \eta \frac{U}{H}, \quad (7.19)$$

$$\sigma_{yy} = -p + \eta 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} = -p. \quad (7.20)$$

壁に働く応力は $\sigma_{ik}n_k$. $\mathbf{n} = (n_k)$ は壁の法線ベクトル成分で

$$y = 0 \text{ の壁で } \mathbf{n} = (0, 1), \quad (7.21)$$

$$y = H \text{ の壁で } \mathbf{n} = (0, -1). \quad (7.22)$$

$y = 0$ の壁では、 $\mathbf{n} = (0, 1)$ なので

$$\text{応力法線成分 } \sigma_{yk}n_k = \sigma_{yy} = -p, \quad (7.23)$$

$$\text{応力接線成分 } \sigma_{xk}n_k = \sigma_{xy} = \eta \frac{U}{H}. \quad (7.24)$$

$y = H$ の壁では、 $\mathbf{n} = (0, -1)$ なので

$$\text{応力法線成分 } \sigma_{yk}n_k = -\sigma_{yy} = p, \quad (7.25)$$

$$\text{応力接線成分 } \sigma_{xk}n_k = -\sigma_{xy} = -\eta \frac{U}{H}. \quad (7.26)$$

応力の様子を図にしたものが、図 7.1 である。

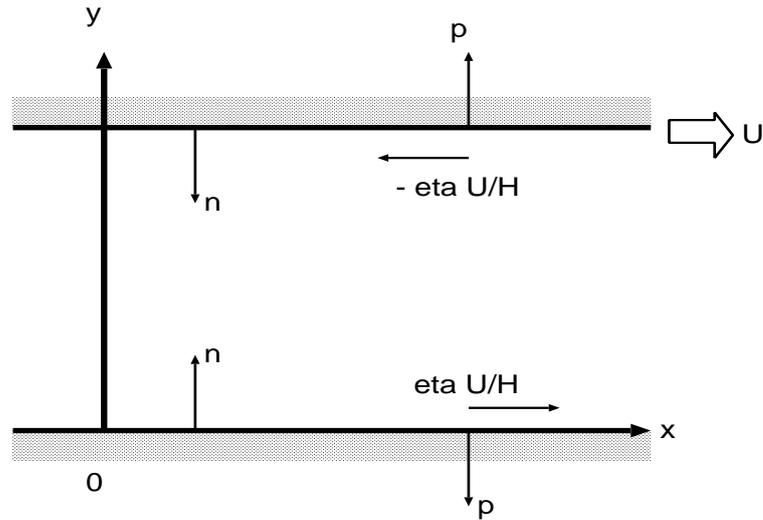


図 7.1: 応力などの図.

7.2.3 エネルギー収支

もともと運動エネルギーの式は

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial t} = -v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_x^2 \right) = -\frac{\partial}{\partial x} (v_x p) + p \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (v_x p) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2. \quad (7.29)$$

今の問題では, 定常な流れを考えているので

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2. \quad (7.30)$$

となる. これは各点でのエネルギー収支を表す式である. この式から, 流体の全ての点において粘性拡散 (左辺) と粘性散逸 (右辺) がバランスしていることがわかる.

(7.30) を y について積分すると

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial y} \left(-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dy = - \int_0^H \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 dy, \quad (7.31)$$

$$-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=H} + \eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\eta \int_0^H \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 dy \quad (7.32)$$

が得られる. これは流体領域全体に関するエネルギー収支を表す式である. この式から, 上下の壁から流体に供給されるエネルギーフラックス (左辺) が流体全体で起こる粘性散逸量 (右辺) に等しくなっていることがわかる.

- エネルギーフラックスの表式

エネルギーフラックスの y 成分は, (7.16) を使うと

$$-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\eta \times \frac{U}{H} y \times \frac{U}{H} = -\eta \left(\frac{U}{H} \right)^2 y. \quad (7.33)$$

となる. 全ての点において負となっている. よってエネルギーフラックスは下向き (z 負方向) であることがわかる.

(7.30) にあらわれるエネルギーフラックスの収束は

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\eta \left(\frac{U}{H} \right)^2 y \right\} = \eta \left(\frac{U}{H} \right)^2. \quad (7.34)$$

これは流体の各点が正味で受け取るエネルギーである.

$y = 0$ の境界におけるエネルギーフラックスは 0 , $y = H$ の境界におけるエネルギーフラックスは $-\eta \frac{U^2}{H}$ である.

上の壁が流体にする仕事の仕事率 $-\eta \frac{U^2}{H}$ は $(\sigma_{xy} \times U)$ である. これは上の壁で流体に流入するエネルギーフラックスと等しくなっている. つまり上壁が流体に対してした仕事が上壁におけるエネルギーフラックスとして流体に注入されている.

$y = 0$ の境界におけるエネルギーフラックスが 0 となることから, $y = H$ の壁でもらったエネルギーは全て流体の中で消費されていることがわかる.

- 粘性散逸項の表式

粘性散逸項は, (7.16) を使うと

$$-\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 = -\eta \left(\frac{U}{H} \right)^2. \quad (7.35)$$

となることがわかる. よって流体の各点で同じ量の粘性散逸が起こっている.

流体の各部分では, エネルギーフラックスの収束分が粘性散逸でその場で消えている (実際には熱が発生する).

単位時間あたりに流体全体で消えるエネルギー量 (の右辺) は

$$-\int_0^H \eta \left(\frac{U}{H} \right)^2 dy = -\eta \frac{U^2}{H} \quad (7.36)$$

この大きさは, 上壁から入るエネルギーフラックスの大きさと等しくなっている.

エネルギー収支の様子を表した模式図を 図 7.2 に示す.

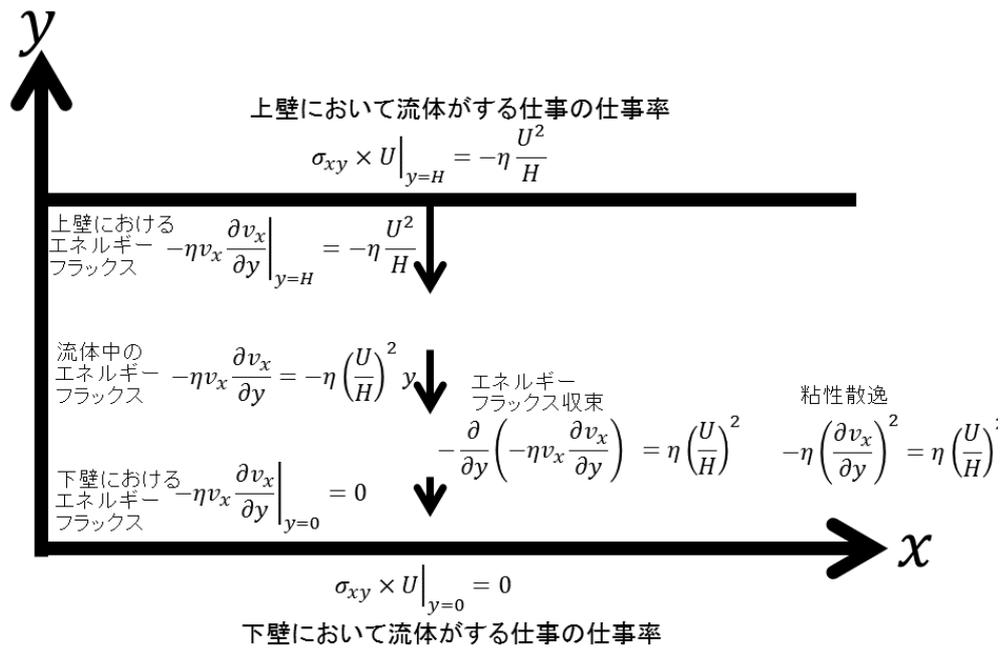


図 7.2: クエット流におけるエネルギー収支.

7.2.4 運動量収支

運動量収支を表現するのは以下の運動方程式である。ここで p が定数ということを用いている。

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (7.37)$$

流束形式は

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (7.38)$$

である。定常状態を考えると、非常に簡単に

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (7.39)$$

となる。これより、流体中の全ての点において運動量流束密度の収束は0になることがわかる。よって、流体は全ての部分で上からもらった運動量を下へ全部渡すだけとなっている。

- 運動量流束密度に関する説明。

運動量流束密度テンソル

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik} \quad (7.40)$$

より

$$\Pi_{xy} = -\sigma_{xy} = \eta \frac{U}{H} \quad (7.41)$$

となる。流体中の全ての点において運動量流束密度は同じ値となる。

流体が壁で受け取る運動量も

$$\Pi_{xy}|_{y=0, y=H} = \eta \frac{U}{H} \quad (7.42)$$

となる。

系全体では、 $y = H$ の壁から、 $\eta \frac{U}{H}$ の運動量が流体に渡され、流体全体ではそれをそのまま $y = 0$ まで受渡し $y = 0$ の壁に与える、となっている。

運動量収支の様子を表した模式図を 図 7.3 に示す。

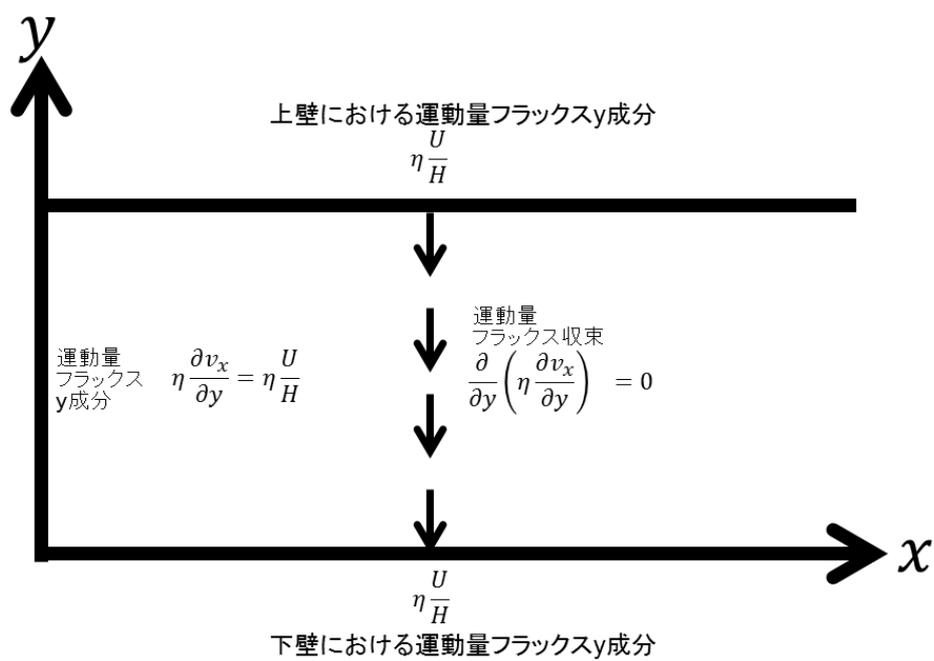


図 7.3: クエット流における運動量収支.

7.3 2次元ポアゾイユ流

以下の状況を考える

- 2枚の平行平板に挟まれた2次元領域を考える. 板の間隔を $2d$ とする.
- 平板に平行に x 軸をとり, 平板に垂直に y 軸をとる (図 7.4).
- 2次元領域中に非圧縮流体が存在
- x 方向には一定の圧力勾配 α がかかっている.
- 板における流体速度は 0 ($v_x = 0(y = \pm d)$)
- 定常流

これは2次元ポアゾイユ流と呼ばれる流れである.

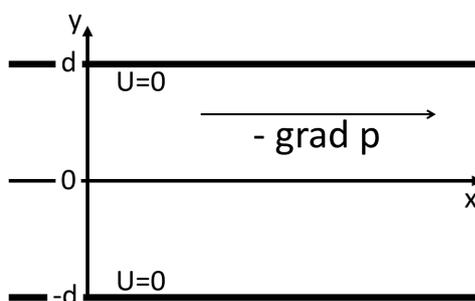


図 7.4: 2次元ポアゾイユ流を考える系の設定.

7.3.1 速度場

ポアソン方程式は

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{\alpha}{\eta}, \quad \alpha \equiv -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7.43)$$

これを積分する.

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\alpha}{\eta}y + a, \quad (7.44)$$

$$v_x = -\frac{\alpha}{2\eta}y^2 + ay + b. \quad (7.45)$$

a, b は積分定数. 境界条件から決定する.

壁で $v_x = 0$ なので,

$$v_x(y = d) = -\frac{\alpha}{2\eta}d^2 + ad + b = 0, \quad (7.46)$$

$$v_x(y = -d) = -\frac{\alpha}{2\eta}d^2 - ad + b = 0 \quad (7.47)$$

2 式の和をとると

$$-\frac{\alpha}{\eta}d^2 + 2b = 0, \quad (7.48)$$

$$b = \frac{\alpha}{2\eta}d^2. \quad (7.49)$$

これを使うと

$$ad = -\frac{\alpha}{2\eta}d^2 + \frac{\alpha}{2\eta}d^2, \quad (7.50)$$

$$a = -\frac{\alpha}{2\eta}d + \frac{\alpha}{2\eta}d = 0 \quad (7.51)$$

よって, 速度分布は

$$v_x(y) = -\frac{\alpha}{2\eta}y^2 + \frac{\alpha}{2\eta}d^2 = \frac{\alpha}{2\eta}(d^2 - y^2) \quad (7.52)$$

となり, 流速分布は放物線で表される (図 7.5).

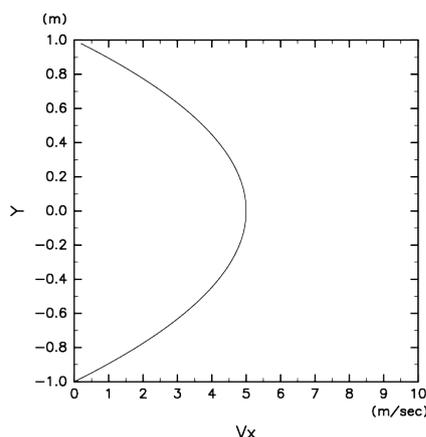


図 7.5: 2次元ポアズイユ流の流れ. $\alpha/\eta = 10.0$ の場合.

7.4 円管の中の流れ

以下の状況を考える.

- 半径 a の円管を通る定常流を考える (図 7.6).
- 管は静止しており, 一定の圧力勾配で流れを引き起こす. 一定の圧力勾配が存在するので α は定数.
- 流れは管の中心軸に関して対称.

円筒座標 (r, θ, z) を使って考える (図 7.7). 境界条件は

$$v_z = v_\theta = v_r = 0 \quad \text{at } r = a, \tag{7.53}$$

$$v_z = (\text{有限}) \quad \text{at } r = 0 \tag{7.54}$$

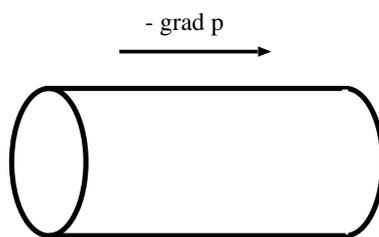


図 7.6: 円管の中の流れ

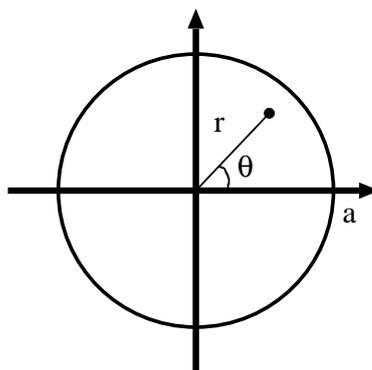


図 7.7: 円管の中の流れを考える座標系

7.4.1 流れ場

ポアソン方程式¹は

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = -\frac{\alpha}{\eta} \tag{7.56}$$

¹もとのポアソン方程式は

$$\nabla^2 v = -\frac{\alpha}{\eta} \tag{7.55}$$

これを積分する.

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = -r \frac{\alpha}{\eta}, \quad (7.57)$$

$$r \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\alpha}{2\eta} r^2 + A, \quad (7.58)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\alpha}{2\eta} r + A \frac{1}{r}, \quad (7.59)$$

$$v_z(r) = -\frac{\alpha}{4\eta} r^2 + A \log r + B \quad (7.60)$$

A, B は積分定数. 境界条件から決定する.

$r = 0$ で速度有限なので $A = 0$. 更に, $r = a$ で $v_z = 0$ の条件から

$$v_z(a) = -\frac{\alpha}{4\eta} a^2 + B, \quad (7.61)$$

$$0 = -\frac{\alpha}{4\eta} a^2 + B, \quad (7.62)$$

$$B = \frac{\alpha}{4\eta} a^2 \quad (7.63)$$

よって, 速度分布は

$$v_z(r) = -\frac{\alpha}{4\eta} r^2 + a^2 = \frac{\alpha}{4\eta} (a^2 - r^2) \quad (7.64)$$

流速分布は放物線. 円管を通るこのような流れをポアゾイユの流れ (Poiseuille flow), もしくはハーゲン・ポアゾイユの流れという.²

7.4.2 流量

管を通る流量は

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a v_z r d\theta dr = 2\pi \int_0^a v_z r dr \quad [\text{m sec}^{-1} \text{m}^2] = [\text{m}^3 \text{sec}^{-1}] \quad (7.65)$$

$$= 2\pi \int_0^a \frac{\alpha}{4\eta} (a^2 - r^2) r dr \quad (7.66)$$

$$= \frac{\alpha\pi}{2\eta} \int_0^a (a^2 r - r^3) dr \quad (7.67)$$

$$= \frac{\alpha\pi}{2\eta} \left[\frac{a^2}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^a = \frac{\alpha\pi}{2\eta} \left[\frac{a^2}{2} a^2 - \frac{1}{4} a^4 \right] = \frac{\pi\alpha}{2\eta} \times \frac{1}{4} a^4 \quad (7.68)$$

$$= \frac{\pi a^4 \alpha}{8\eta} = -\frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{dp}{dx} \quad (7.69)$$

²Tritton (1988) では, 「歴史的な正確さを期す場合には, ハーゲン・ポアゾイユの流れ」という記述がなされている. 理論解は Stokes によって求められた.

7.5 振動平板による流れ

この問題は非定常な流れの例である。以下の状況を考える。

- 無限に広い平板が無限に広がっている密度一定の粘性流体を考える。
- 平板は自分自身に平行に単振動している。
- 平板の振動方向に x 軸をとり、平板自身は xy 平面内で運動するものとする。これによって引き起こされる流体の運動は x 軸に平行となる。
- x 軸方向には物理量が変化しないことを仮定する。

運動方程式の x 成分, y 成分は以下のようになる。

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (7.70)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}. \quad (7.71)$$

連続の式は

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (7.72)$$

境界条件は

$$v_x \rightarrow 0 \quad \text{for } y \rightarrow \infty, \quad (7.73)$$

$$v_x = U \cos \omega t \quad \text{at } y = 0 \quad (7.74)$$

連続の式から v_y は y によらない。よって境界条件を考慮すると

$$v_y = 0. \quad (7.75)$$

これより, 運動方程式の y 成分から

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7.76)$$

となる。

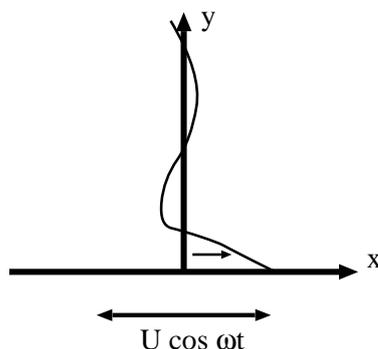


図 7.8: 振動平板による流れ.

7.5.1 流れ場

物理量を複素数に拡張すると計算が簡単になる. 境界条件は

$$v_x = Ue^{i\omega t} \quad \text{at } y = 0 \tag{7.77}$$

境界条件の形から v_x として

$$v_x = f(y)e^{i\omega t} \tag{7.78}$$

という形を考える. これを (7.70) に代入すると

$$i\rho\omega f(y) = \eta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \tag{7.79}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{i\rho\omega}{\eta} f(y)$$

よって, 一般解は以下のように書ける.

$$f(y) = Ae^{\lambda y} + Be^{-\lambda y} \tag{7.80}$$

ただし,

$$\lambda \equiv \left(\frac{i\rho\omega}{\eta} \right)^{1/2} = (1+i) \underbrace{\left(\frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2}}_{l \text{ とおく}} = (1+i)l \tag{7.81}$$

ただし,

$$l \equiv \left(\frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} \tag{7.82}$$

である.

よって,

$$v_x = \left(A e^{\lambda y} + B e^{-\lambda y} \right) e^{i\omega t} \quad (7.83)$$

境界条件 $y \rightarrow \infty$ で $v_x \rightarrow 0$, を使うと $A = 0$. 更に, 境界条件 $v_x(y = 0) = U e^{i\omega t}$ を使うと

$$v_x(y = 0) = B \times 1 \times e^{i\omega t}, \quad (7.84)$$

$$U e^{i\omega t} = B e^{i\omega t}, \quad (7.85)$$

$$B = U \quad (7.86)$$

以上より, 実部を取り出すと u の関数形としていかが得られる.

$$v_x = \Re \left[U e^{-\lambda y} e^{i\omega t} \right] = \Re \left[U e^{-(1+i)ly} e^{i\omega t} \right] = \Re \left[U e^{-ly} e^{i(\omega t - ly)} \right] \quad (7.87)$$

$$= U e^{-ly} \cos(\omega t - ly). \quad (7.88)$$

これは y 方向に伝わる減衰性の正弦波である.

位相速度は

$$c = \frac{\omega}{l} = \frac{\omega}{\left(\frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2}} = \left(\frac{2\eta\omega}{\rho} \right)^{1/2} \quad (7.89)$$

波数も減衰定数も $l = \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2}$. したがって, 1 波長進む間に振幅は $e^{-2\pi}$ 倍になる.

7.5.2 境界層の厚さ

振幅が $1/e$ 倍に減衰する距離は

$$\delta = \frac{1}{l} = \left(\frac{2\eta}{\rho\omega} \right)^{1/2} \quad (7.90)$$

平板の振動によって流体は動かされるが, その動く範囲はだいたい δ の厚さの層に限られている. すなわち, 振動平板には厚さ δ の境界層 (boundary layer) が付随すると考えられる. 境界層の厚さは, 粘性が小さいほど薄くなる. 平板の振動数が大きいほど薄くなる.

7.5.3 振動平板に働く摩擦応力

振動平板に働く摩擦応力は

$$(\sigma'_{yx})|_{y=0} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) |_{y=0} \quad (7.91)$$

$$= \eta \{ -lUe^{-ly} \cos(\omega t - ly) - Ue^{-ly}(-l) \sin(\omega t - ly) \} |_{y=0} \quad (7.92)$$

$$= \eta lU (-\cos \omega t + \sin \omega t) = -\eta lU \sqrt{2} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) \quad (7.93)$$

$$= -\sqrt{2}\eta \left(\frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} U \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) \quad (7.94)$$

$$= -U (\rho\omega\eta)^{1/2} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) \quad (7.95)$$

7.5.4 平板にする仕事

摩擦応力にさからって平板を振動させるためには、平板の単位面積について単位時間あたり

$$[-(\sigma_{yx}) \times v_x]_{y=0} = -(\sigma_{yx})|_{y=0} U \cos \omega t \quad (7.96)$$

の仕事をしなければならない。これを1周期 ($T = 2\pi/\omega$) について平均すると

$$\frac{1}{T} \int_0^T \{ -(\sigma_{yx})|_{y=0} U \cos \omega t \} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \{ -\eta lU (-\cos \omega t + \sin \omega t) U \cos \omega t \} dt \quad (7.97)$$

$$= \frac{1}{T} \eta lU^2 \int_0^T (\cos^2 \omega t - \sin \omega t \cos \omega t) dt \quad (7.98)$$

$$= \frac{1}{T} \eta lU^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \eta lU^2 \int_0^T \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt \quad (7.99)$$

$$= \frac{1}{T} \eta lU^2 \int_0^T \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \eta lU^2 = \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} U^2 \quad (7.100)$$

$$= \frac{1}{2} U^2 \left(\frac{\eta\rho\omega}{2} \right)^{1/2} \quad (7.101)$$

7.5.5 エネルギー収支

運動エネルギーの式を作ると

$$v_x \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (7.102)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_x^2 \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2. \quad (7.103)$$

右辺第1項はエネルギーフラックスの収束、第2項は粘性散逸である。

- 時間変化項 $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v_x^2 \right)$ の表式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_x^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho}{2} \left(U e^{-ly} \cos(\omega t - ly) \right)^2 \right] \quad (7.104)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} U^2 e^{-2ly} \cos^2(\omega t - ly) \right) \quad (7.105)$$

$$= -\frac{\rho U^2}{2} e^{-2ly} 2\omega \cos(\omega t - ly) \sin(\omega t - ly) \quad (7.106)$$

$$= -\frac{\rho U^2 \omega}{2} e^{-2ly} \sin 2(\omega t - ly) \quad (7.107)$$

1 周期平均をとると,

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\rho \omega U^2}{2} e^{-2ly} \sin 2(\omega t - ly) dt = 0 \quad (7.108)$$

- エネルギーフラックス $-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y}$ の表式

$$-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\eta \{ U e^{-ly} \cos(\omega t - ly) \} \frac{\partial}{\partial y} \{ U e^{-ly} \cos(\omega t - ly) \} \quad (7.109)$$

$$= -\eta U e^{-ly} \cos(\omega t - ly) \{ -l U e^{-ly} \cos(\omega t - ly) + l U e^{-ly} \sin(\omega t - ly) \} \quad (7.110)$$

$$= -\eta l U^2 e^{-2ly} \cos(\omega t - ly) \{ -\cos(\omega t - ly) + \sin(\omega t - ly) \} \quad (7.111)$$

$$= \eta l U^2 e^{-2ly} \left\{ \cos^2(\omega t - ly) - \frac{1}{2} \sin 2(\omega t - ly) \right\} \quad (7.112)$$

1 周期平均をとると,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \eta l U^2 e^{-2ly} \left\{ \cos^2(\omega t - ly) + \frac{1}{2} \sin 2(\omega t - ly) \right\} dt \quad (7.113)$$

$$= \eta l U^2 e^{-2ly} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - ly) dt \quad (7.114)$$

$$= \eta l U^2 e^{-2ly} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\cos 2(\omega t - ly) + 1}{2} dt \quad (7.115)$$

$$= \eta l U^2 e^{-2ly} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} dt \quad (7.116)$$

$$= \frac{1}{2} \eta l U^2 e^{-2ly} \quad (7.117)$$

エネルギーフラックスは上向き (y 正方向) であり, その大きさは y とともに単調減少する. $y = 0$ におけるエネルギーフラックスは $\frac{1}{2} \eta l U^2$, $y = \infty$ におけるエネルギーフラックスは 0 である.

- 粘性拡散項 $-\frac{\partial}{\partial y} \left(-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\eta l U^2 e^{-2ly} \left\{ \cos^2(\omega t - ly) - \frac{1}{2} \sin 2(\omega t - ly) \right\} \right] \quad (7.118)$$

$$= -\eta l U^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[e^{-2ly} \left\{ \cos^2(\omega t - ly) - \frac{1}{2} \sin 2(\omega t - ly) \right\} \right] \quad (7.119)$$

$$= -\eta l U^2 \left[(-2l) e^{-2ly} \left\{ \cos^2(\omega t - ly) - \frac{1}{2} \sin 2(\omega t - ly) \right\} + e^{-2ly} \left\{ 2 \cos(\omega t - ly) (l \sin(\omega t - ly)) - \frac{1}{2} (-2l) \cos 2(\omega t - ly) \right\} \right] \quad (7.120)$$

$$= -2\eta l^2 U^2 e^{-2ly} \left[-\cos^2(\omega t - ly) + \frac{1}{2} \sin 2(\omega t - ly) + \frac{1}{2} \sin 2(\omega t - ly) + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t - ly) \right] \quad (7.121)$$

$$= -2\eta l^2 U^2 e^{-2ly} \left[-\cos^2(\omega t - ly) + \sin 2(\omega t - ly) + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t - ly) \right] \quad (7.122)$$

1 周期平均をとると,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left\{ -\frac{\partial}{\partial y} \left(-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right\} dt \quad (7.123)$$

$$= -2\eta l^2 U^2 e^{-2ly} \frac{1}{T} \int_0^T \left[-\cos^2(\omega t - ly) + \sin 2(\omega t - ly) + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t - ly) \right] dt \quad (7.124)$$

$$= 2\eta l^2 U^2 e^{-2ly} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - ly) dt = 2\eta l^2 U^2 e^{-2ly} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\cos 2(\omega t - ly) + 1}{2} dt \quad (7.125)$$

$$= 2\eta l^2 U^2 e^{-2ly} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} dt \quad (7.126)$$

$$= \eta l^2 U^2 e^{-2ly} \quad (7.127)$$

となる.

- 粘性散逸項 $-\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2$

$$-\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad (7.128)$$

$$= -\eta \left(\frac{\partial}{\partial y} \{ U e^{-ly} \cos(\omega t - ly) \} \right)^2 \quad (7.129)$$

$$= -U\eta \left((-l)e^{-ly} \cos(\omega t - ly) + e^{-ly}(l) \sin(\omega t - ly) \right)^2 \quad (7.130)$$

$$= -Ul^2\eta e^{-2ly} (-\cos(\omega t - ly) + \sin(\omega t - ly))^2 \quad (7.131)$$

$$= -Ul^2\eta e^{-2ly} \left(\cos^2(\omega t - ly) - 2\cos(\omega t - ly)\sin(\omega t - ly) + \sin^2(\omega t - ly) \right) \quad (7.132)$$

$$= -Ul^2\eta e^{-2ly} \{ 1 - \sin 2(\omega t - ly) \} \quad (7.133)$$

1 周期平均をとると

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left\{ -\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \right\} dt \quad (7.134)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ -Ul^2\eta e^{-2ly} \{ 1 - \sin 2(\omega t - ly) \} \right\} dt \quad (7.135)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ -Ul^2\eta e^{-2ly} \right\} dt \quad (7.136)$$

$$= -Ul^2\eta e^{-2ly} \quad (7.137)$$

となり, 粘性拡散項と同じ大きさ (符号は逆) になっている.

7.5.6 運動量収支

運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (7.138)$$

である. 運動量流束密度の収束によって運動量の時間変化率が決められる.

- 時間変化項の表式

速度場の解を用いれば

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U e^{-ly} \cos(\omega t - ly) \right) = -\rho U e^{-ly} \omega \sin(\omega t - ly) \quad (7.139)$$

- 運動量流束密度の収束の表式

運動量流束密度は

$$\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = \eta \frac{\partial}{\partial y} \left(Ue^{-ly} \cos(\omega t - ly) \right) = \eta \left(-lUe^{-ly} \cos(\omega t - ly) + Ue^{-ly}l \sin(\omega t - ly) \right) \quad (7.140)$$

運動量流束密度の収束は

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \eta \frac{\partial}{\partial y} \left(Ue^{-ly} \cos(\omega t - ly) \right) \quad (7.141)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \eta \left(-lUe^{-ly} \cos(\omega t - ly) + Ue^{-ly}l \sin(\omega t - ly) \right) \right\} \quad (7.142)$$

$$= \eta \left(l^2 Ue^{-ly} \cos(\omega t - ly) - l^2 Ue^{-ly} \sin(\omega t - ly) \right) \quad (7.143)$$

$$-lUe^{-ly}l \sin(\omega t - ly) - Ue^{-ly}l^2 \cos(\omega t - ly) \quad (7.144)$$

$$= -2\eta l^2 Ue^{-ly} \sin(\omega t - ly) \quad (7.145)$$

となる. $l = \left(\frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2}$ を使えばこれは運動量の時間変化の表式と一致する.

7.6 Rayleigh の流れ

今まで静止していた流体がある瞬間に急に運動をはじめめる場合の過渡的な流れを考える. この問題を考察するために以下の状況を考える.

- 無限に広い平板を境界とする半無限に広がる流体を考える (図 7.9).
- 最初, 流体は静止しているものとする.
- ある瞬間から平板が一定の速度 U でそれ自身に平行に運動するものとする.
- 板の運動の方向に x 軸, 板の面に直角に y 軸をとると,
- x 方向には物理量が変化しないことを仮定する.

この問題は Rayleigh によってはじめて研究されたので, Rayleigh の問題 (Rayleigh's problem) と呼ばれ, 生じる流れは Rayleigh の流れ (Rayleigh flow) と呼ばれる.

流速の x 成分は, を満たす.

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (7.146)$$

となる. ここで, $\nu \equiv \frac{\eta}{\rho}$ である.

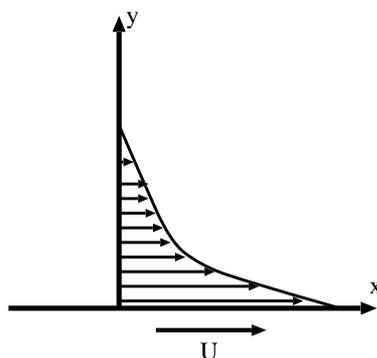


図 7.9: Rayleigh の流れ. 今井 (1973) をもとに作成.

境界条件は以下の通りである.

$$v_x = U, \quad y = 0 \quad (7.147)$$

$$v_x = 0, \quad y \rightarrow \infty \quad (7.148)$$

初期条件は以下の通りである.

$$v_x = 0, \quad t = 0. \quad (7.149)$$

7.6.1 次元解析

この問題では流れのスケールをあらわす特徴的な長さはない. そのため, 長さのスケールとしては $(\nu t)^{1/2}$ くらいしか作れない. よって, 解の形として

$$v_x = Uf(\xi), \quad (7.150)$$

$$\xi \equiv \frac{y}{2(\nu t)^{1/2}} \quad (7.151)$$

が期待される. これから,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{-y/2(\nu t)^{-1/2}\nu}{2\nu t} = -\frac{1}{2t} \frac{y}{2(\nu t)^{1/2}} = -\frac{\xi}{2t}, \quad (7.152)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{2(\nu t)^{1/2}} \quad (7.153)$$

これらを用いて運動方程式を変数変換すると,

$$\frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right), \quad (7.154)$$

$$\frac{df}{d\xi} \left(-\frac{\xi}{2t} \right) = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{df}{d\xi} \frac{1}{2(\nu t)^{1/2}} \right), \quad (7.155)$$

$$-\frac{\xi}{2t} \frac{df}{d\xi} = \frac{1}{2(\nu t)^{1/2}} \nu \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad (7.156)$$

$$-\frac{\xi}{2t} \frac{df}{d\xi} = \frac{1}{2(\nu t)^{1/2}} \nu \frac{d}{d\xi} \left(\frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right), \quad (7.157)$$

$$-\frac{\xi}{2t} \frac{df}{d\xi} = \frac{1}{2(\nu t)^{1/2}} \nu \frac{d}{d\xi} \left(\frac{df}{d\xi} \frac{1}{2(\nu t)^{1/2}} \right), \quad (7.158)$$

$$-\xi \frac{df}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{d\xi^2}, \quad (7.159)$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + 2\xi \frac{df}{d\xi} = 0. \quad (7.160)$$

境界条件は

$$f = 1, \quad \xi = 0, \quad (7.161)$$

$$f = 0, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (7.162)$$

初期条件は

$$f = 0, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (7.163)$$

となり, 2番目の境界条件と一致する.

7.6.2 流れ場

f の式 (7.160) において $f' = \frac{df}{d\xi}$ とおいてから一回積分すると

$$\frac{df'}{d\xi} + 2\xi f' = 0, \quad (7.164)$$

$$\frac{df'}{f'} = -2\xi d\xi, \quad (7.165)$$

$$\ln f' = -\xi^2 + C, \quad (7.166)$$

$$f' = C \exp(-\xi^2) \quad (7.167)$$

となる. ここで C は積分定数. もう一回積分すると

$$\frac{df}{d\xi} = C \exp(-\xi^2), \quad (7.168)$$

$$f(\xi) - f(0) = C \int_0^\xi \exp(-\xi^2) d\xi \quad (7.169)$$

となる. 境界条件 (7.161) より $f(0) = 1$, 更に (7.162) を使うと

$$f(\xi \rightarrow \infty) = 1 + C \int_0^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi, \quad (7.170)$$

$$0 = 1 + C \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (7.171)$$

$$C = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (7.172)$$

が得られる. これより,

$$f(\xi) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \exp(-\xi^2) d\xi \quad (7.173)$$

となる. 誤差関数

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (7.174)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad (7.175)$$

を使えば,

$$f = \operatorname{erfc}(\xi) = 1 - \operatorname{erf}(\xi) \quad (7.176)$$

とかける. 変数をもとに戻せば,

$$v_x = U \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{vt}} \right) \right] \quad (7.177)$$

が得られる.