

第4章 完全流体

4.1 完全流体

粘性も熱的散逸も加熱も無視できる状況にある流体を完全流体または非粘性流体という。完全流体を記述する式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0 \quad (4.3)$$

完全流体という用語は、エントロピーも保存する場合（つまり熱的散逸や非断熱加熱が無い場合）に限定することも多い。

非粘性かつ非発散 ($\rho = \rho_0$: 一定) な流体における運動方程式

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (4.5)$$

をオイラー方程式 (Euler equations) という。

補足

オイラー方程式が導出されたのは、1755年 (レオンハルト・オイラーによる)。ナビエ・ストークス方程式が登場したのはその後 (1822年, アンリ・ナビエによる)。オイラー方程式は流体現象をうまく記述できないことがあることは古くから知られていた。この問題が解決されたのは、境界層の概念が導入 (1904年, ルードビッヒ・プラントルによる) されたことによる。

4.2 静水圧平衡

4.2.1 重力場中の静止流体

一様な重力場の静止流体について考える。重力場中のオイラー方程式は

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{g} \quad (4.6)$$

である。ただし, \mathbf{g} は重力加速度ベクトルである。ここで, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ とすると

$$\text{grad}p = \rho \mathbf{g} \quad (4.7)$$

が得られる。これは力学的平衡を表す式である。この平衡状態を静水圧平衡と呼ぶ。重力無しの場合, 簡単に

$$\text{grad}p = 0 \quad (4.8)$$

となる。よって, $p = \text{const.}$ となり, 圧力は場所によらない。

4.2.2 重力場中で静水圧平衡にある流体

(4.7) が成り立つ場合, p, ρ, T は高度のみの関数となる。その理由は以下の通りである。まず, 座標を導入する。 z 軸を鉛直上方にとる。重力加速度ベクトルは

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g) \quad (4.9)$$

$\text{grad}p = \rho \mathbf{g}$ を成分表示すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

最初に, 流体が重力場中で平衡ならば p は z のみの関数である (でないと, 運動が起きてしまう)。 p が z のみの関数である時, 静水圧平衡式

$$\rho = -\frac{1}{g} \frac{dp}{dz} \quad (4.11)$$

より ρ も z のみに依存する。更に, T は p, ρ の関数であるので, T も z のみに依存することがわかる。

4.2.3 静水圧平衡式の積分

非圧縮, 密度一定の場合を考える。
静水圧平衡式の z 成分

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (4.12)$$

を積分すると以下が得られる。

$$p = -\rho g z + C \quad (4.13)$$

C は積分定数.

境界条件として, 表面 $z = h$ で $p = p_0$ (一定) という条件を考える. この境界条件を使って, C を決める. 境界条件を適用すると

$$p_0 = -\rho gh + C \quad (4.14)$$

よって,

$$C = p_0 + \rho gh \quad (4.15)$$

以上より, $p(z)$ が以下のように決定される.

$$p = p_0 + \rho g(h - z) \quad (4.16)$$

例: 海面から深さ z での水圧

水面での圧力を p_0 とすると, 深さ z での水圧は

$$p = p_0 + \rho gz \quad (4.17)$$

海水の密度 $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, 重力加速度 $g = 9.8 \text{ m sec}^{-2}$, $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$ を使うと

$$p[\text{Nm}^{-2}] = 1.013 \times 10^5 + 10^3 \times 9.8 \times z \quad (4.18)$$

$$\sim 10^5 + 10^4 \times z \quad (4.19)$$

$$p[\text{atm}] \sim 1 + \frac{z}{10[\text{m}]} \quad (4.20)$$

よって, 10m ごとに水圧は 1 気圧高くなる.

4.3 ベルヌーイの定理

4.3.1 流線, 流跡線, 流脈線

- 流線 (stream line)

- ある時刻 t でのベクトル場の積分. 流線の微分方程式は以下である (式が2つの連立微分方程式).

$$\frac{dx}{u(\mathbf{x}, t)} = \frac{dy}{v(\mathbf{x}, t)} = \frac{dz}{w(\mathbf{x}, t)} \quad (4.21)$$

なぜなら, 流線の線要素を $d\mathbf{r}(x, y, z)$ とすると, $d\mathbf{r}$ と \mathbf{v} は平行だから.

- これは Euler 的に記述に即した曲線である.

- 流跡線 (path line)

- 流体粒子の軌道. $d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)dt$ を積分して得られる連立微分方程式 (式3つ):

$$\frac{dx}{u(\mathbf{x}, t)} = \frac{dy}{v(\mathbf{x}, t)} = \frac{dz}{w(\mathbf{x}, t)} = dt \quad (4.22)$$

- 必ずしも, 流線と一致しない. 一般に時間がたつと流線は変化するので, 次の時刻には別の流線に乗り移る. $t = t_0$ において P_0 にあった流体粒子は P_0 を通る流線 C_0 の方向に進み, $t = t_1$ に P_1 に来る. $t = t_1$ における P_1 を通る流線 C_1 の接線の方向に進み P_2 に移る. 結局, 流体粒子は各瞬間における流線群の包絡線の上を動くことになる.

- これは Lagrange 的に記述に即した曲線である.

- 流脈線 (streak line)

- ある地点 \mathbf{x} を通過した流体粒子の集合. 特定の一点を通過した流体のつながり.
例 (1): 注射器などで液体の中にインクを少しずつ注入したときのインクの筋.
例 (2): 煙突から出る煙の写真.

4.3.2 ベルヌーイの定理の一般形

粘性, 熱流束がなく流れが定常な場合には, エネルギー保存則より, ある保存量が存在することが示せる. これをベルヌーイの定理 (Bernoulli の定理) という.

エネルギー保存則の一般形は以下であった.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon + \Phi \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho v_k \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon + \Phi \right) + v_k p - v_i \sigma'_{ik} + q_k \right\} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q. \quad (4.23)$$

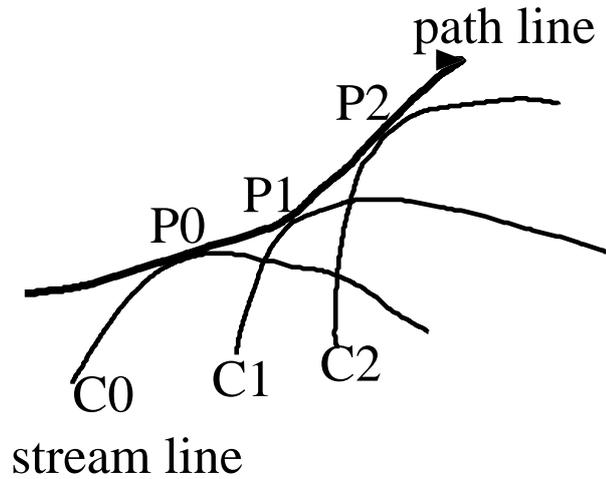


図 4.1: 流跡線. C0, C1, C2 は各瞬間の流線. 太線はその包絡線, つまり流跡線.

単位質量あたりのエンタルピーを導入する.

$$h = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \tag{4.24}$$

エネルギー保存則は以下のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} v_i^2 + h - \frac{p}{\rho} + \Phi \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho v_k \left(\frac{1}{2} v_i^2 + h - \frac{p}{\rho} + \Phi \right) + v_k p - v_i \sigma'_{ik} + q_k \right\} \\ = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q, \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} v_i^2 + h + \Phi \right) \right\} - \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho v_k \left(\frac{1}{2} v_i^2 + h + \Phi \right) - v_i \sigma'_{ik} + q_k \right\} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q, \tag{4.26}$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi + h \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} (-\sigma'_{ik} v_i + q_k) = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q \tag{4.27}$$

ここで

- 流れが定常である. ($\partial_t \bullet = 0$)
- 粘性, 熱流束, 加熱がない. ($\sigma'_{ik} = 0, \mathbf{q} = 0, Q = 0$)

とすると

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi + h \right) = 0 \tag{4.28}$$

$\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi + h$ は, 流線に沿って一定値をとることになる. これをベルヌーイの定理という.

4.3.3 バロトロピック流体 (順圧流体) $\rho = \rho(p)$ の場合

非散逸を仮定しているので $\frac{ds}{dt} = 0$. したがって, 熱力学の関係式 $T \frac{ds}{dt} = \frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}$ に $\rho = \rho(p)$ と $\frac{ds}{dt} = 0$ を用いると,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho(p)} \frac{dp}{dt} \tag{4.29}$$

$$= \frac{d}{dt} \int^p \frac{1}{\rho(p)} dp \tag{4.30}$$

$$\equiv \frac{dP(p)}{dt} \tag{4.31}$$

を得る. 粘性, 熱流束のない定常なバロトロピック流体の流れでは, 流線に沿って

$$\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi + P(p) = \text{const.} \quad (\text{流線に沿って}) \tag{4.32}$$

となる. ただし, $P(p) = \int^p \frac{1}{\rho(p)} dp$ である. $\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi + P(p)$ をベルヌーイ関数という.

4.3.4 非圧縮・密度一定流体の場合

$$\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi + \frac{p}{\rho_0} = \text{const.} \quad (\text{流線に沿って}) \tag{4.33}$$

となる.

4.3.5 トリチェリー (Torricelli) の定理

図 4.2 の状況を考える. ¹密度一定流体を入れたバケツの横に穴を開ける. 水深は h . 流れ出すときの流速を求める. 容器に比べて穴が十分小さいとすれば流れはほとんど定常と考えられる. よって, ベルヌーイの定理を適用できる. この場合, $\Phi = gz$ なのでベルヌーイの定理は

$$\frac{1}{2} v_i^2 + gz + \frac{p}{\rho_0} = \text{const.} \tag{4.34}$$

¹エヴァンジェリスタ・トリチェリ (Evangelista Torricelli, 1608 年 10 月 15 日-1647 年 10 月 25 日) は, イタリアの物理学者。ガリレオ・ガリレイの弟子。ファエンツァに生まれ、ローマに出て最初は数学者ベネデット・カステリの秘書をした。1641 年からはガリレイの弟子となり、ガリレイの死まで研究をともにした。その後はトスカーナ大公フェルディナンド 2 世に数学者・哲学者として招かれて、ピサ大学の数学の教授に任命された。1647 年、腸チフスのため 39 歳の若さで没した。トリチェリは、真空の発見、大気圧の計測で有名なトリチェリの実験も行った。

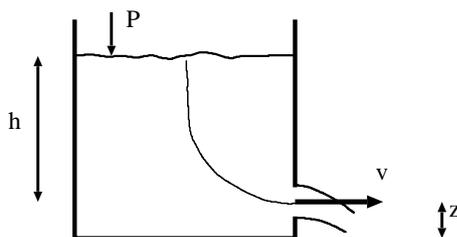


図 4.2: トリチェリの定理.

となる.

$$gh + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_0} = \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + gz + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_0} \tag{4.35}$$

(水面) (出口)

圧力は全部 p_{atm} , $z = 0$ とおくと

$$gh = \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2, \tag{4.36}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2gh} \tag{4.37}$$

が得られる. これをトリチェリの定理という.

4.3.6 よどみ圧・ピトー管

流れの中に物体を置くと, その表面に流速 0 の点ができる. これをよどみ点 (stagnation point) という. よどみ点での圧力をよどみ圧 (stagnation pressure) という.

たとえば, 図 4.3. A は前方のよどみ点, B は後方のよどみ点.

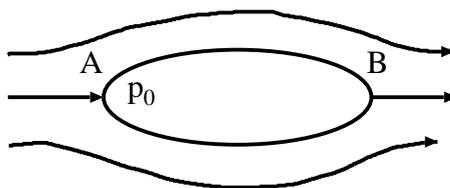


図 4.3: よどみ点

非圧縮流体の場合で, 重力などのポテンシャル力を無視すると, ベルヌーイの定理により

$$\frac{1}{2}\rho_0|\mathbf{v}|^2 + p = p_0 \tag{4.38}$$

ここで, p_0 はよどみ圧. 流線に沿っての一定値はよどみ圧に等しい.

普通の圧力 p を静圧 (static pressure), $\rho_0|\mathbf{v}|^2$ を動圧 (dynamic pressure) という. p_0 を全圧または総圧 (total pressure) という.

縮まない流体の場合, 重力などの外力を無視すると, ベルヌーイの定理は

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const} = p_0 \quad (4.39)$$

となる. 流線に沿っての一定値は, よどみ圧. この式によれば, 総圧 p_0 と静圧 p を測定すれば,

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \quad (4.40)$$

より, v が求まる. 総圧はよどみ圧に等しいから, これを測定するには, 管を流れに向けてその中の圧力を測定すれば良い. このような管をピトー管 (pitot tube) という.

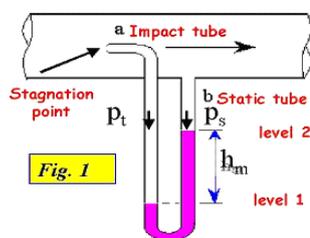


図 4.4: ピトー管. http://www.speedace.info/pitot_tube.htm より転載.

ピトー管は, 航空機にとりつけて速度を計測するのに使われる.

4.3.7 翼

飛行機がなぜ飛べるのかという説明は, 以前はベルヌーイの定理を使ってなされていた. 図に示すような翼を考える. 飛行機が固定されている座標系を使うため流れは定常である. 凸面状の上面では流線は押されて間隔が詰まっており, 流体は自由流より速く流れる. したがって, 図に示されているように圧力は減少する. 同様に凹面状の下面では圧力は上昇する. これらの圧力差が翼に上向きの正味の力を与えることになる.

しかし, 最近では, ベルヌーイの定理だけでは説明できないこと, 空気からの反作用を受けて飛んでいるのだとする議論がなされている.

4.3.8 ツォイナー (Zeuner) の公式

風船からの流速を考える (図 4.6). バロトロピック流体のベルヌーイの式を使う.

$$\frac{1}{2}v_i^2 + \Phi + \int \frac{1}{\rho} dp = \text{const.} \quad (4.41)$$

$$\frac{1}{2} v^2 + \Phi + p/\rho = \text{const.}$$

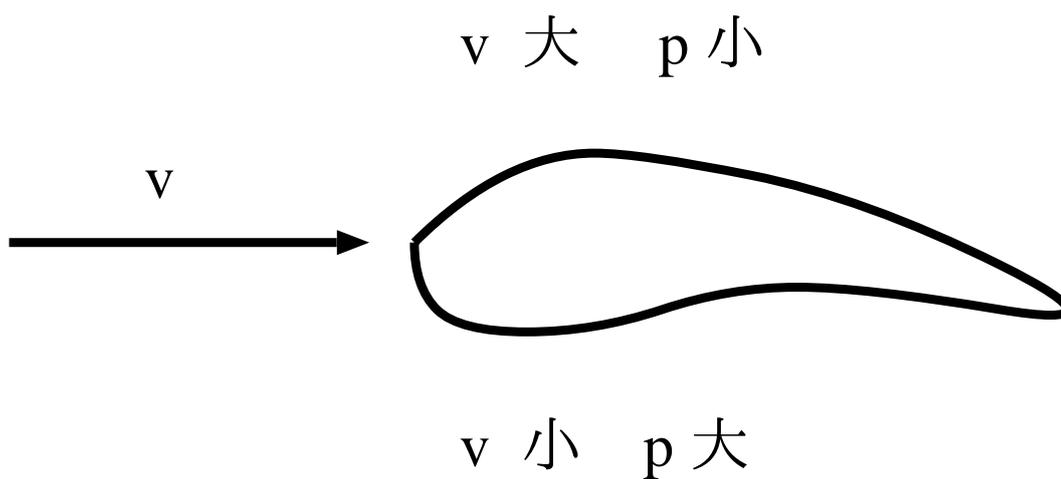


図 4.5: 翼のまわりの圧力分布.

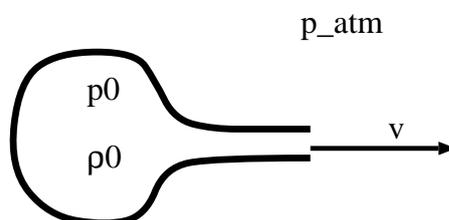


図 4.6: 風船からの流速 (Zeuner の公式).

内部の圧力を p_0 , 外部の圧力を p_{atm} とする. 重力は無視して, 内部の速度は 0 であることを使うと

$$\underbrace{\int^{p_{atm}} \frac{1}{\rho} dp + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2}_{\text{出口}} = \underbrace{\int^{p_0} \frac{1}{\rho} dp}_{\text{内部}} \quad (4.42)$$

すなわち

$$\int_{p_0}^{p_{atm}} \frac{1}{\rho} dp + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 = 0 \quad (4.43)$$

流線に沿って断熱的だとすると

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \quad (4.44)$$

これを代入すると

$$|\mathbf{v}|^2 = -2 \int_{p_0}^{p_{atm}} \frac{1}{\rho} dp = -2 \int_{p_0}^{p_{atm}} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma} dp = -\frac{2p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} \int_{p_0}^{p_{atm}} p^{-1/\gamma} dp \quad (4.45)$$

$$= -\frac{2p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} \left[(-1/\gamma + 1)^{-1} p^{-1/\gamma+1} \right]_{p_0}^{p_{atm}} \quad (4.46)$$

$$= -\frac{2p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^{-1} \left[p_{atm}^{-1/\gamma+1} - p_0^{-1/\gamma+1} \right] \quad (4.47)$$

$$= -\frac{2p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0^{-1/\gamma+1} \left[\left(\frac{p_{atm}}{p_0} \right)^{-1/\gamma+1} - 1 \right] \quad (4.48)$$

$$= \frac{2p_0}{\rho_0} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_{atm}}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \quad (4.49)$$

よって

$$|\mathbf{v}|^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_{atm}}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \quad (4.50)$$

流れが断熱的に起こるものとする

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}, \quad (4.51)$$

$$\frac{d\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{dp}{p_0} \right), \quad (4.52)$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \quad (4.53)$$

これから、音速 c は

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} \quad (4.54)$$

となるので、

$$|\mathbf{v}|^2 = \frac{2}{\gamma - 1} c^2 \left[1 - \left(\frac{p_{atm}}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \quad (4.55)$$

となる。したがって、圧力 p_{atm} が下がるにしたがって流速は増加するが、 $\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}c$ を越えることはできない。理想気体の場合には、音速は温度のみ関数であるから、容器内の圧力だけをどんなに上げてても気体の噴出速度を上げることはできない。流速を上げるには温度を上げることが必要である。

4.3.9 野球の変化球

参考文献

- 姫野龍太郎, 2000: 魔球をつくる 究極の変化球を求めて岩波書店, pp110.
- 姫野龍太郎, 2010: CPSセミナー https://www.cps-jp.org/modules/mosir/player.php?v=20101215_himeno

4.3.10 ベンチュリ管

流体が通りすぎるようなくびれ部を持った管 (半径が減少する短い長さの部分) があるとす。連続性からくびれ部分で速度は増し、圧力は減少する。このことは、図 4.7 に示された装置で示すことができる。圧力は、開口部をもった鉛直の管に水が上昇する高さによって測定できる。くびれ部では圧力は目立って下がり、それが行きすぎるとまた上がる。ベルヌーイの定理から、くびれ部の両側で圧力が等しいはずであるが、粘性効果によって下流の圧力は少し低くなっている。

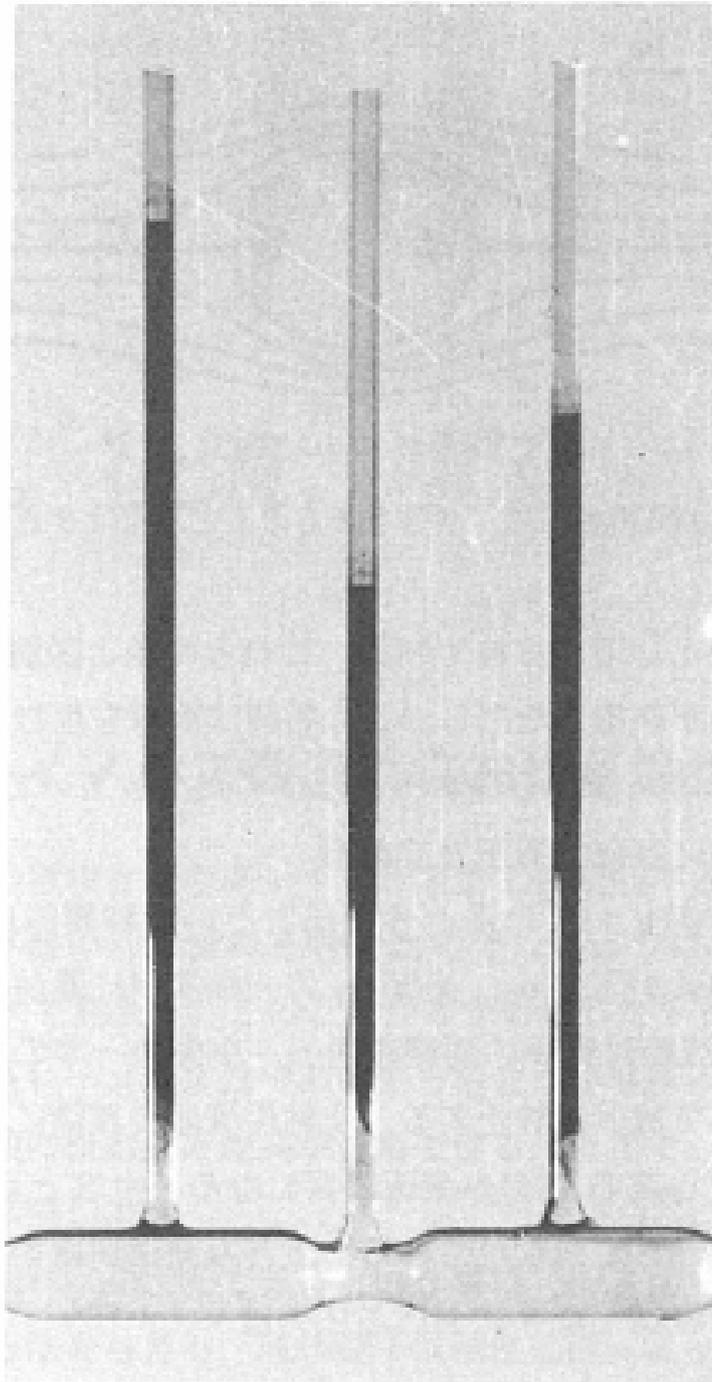


図 10.3: ベンチュリ管を使った実験。(流れは左から右に向かっている。横に取付けられた管内の流体は染められている。)

図 4.7: ベンチュリ管. 原図はトリトン流体力学 (2002) の図 10.3 .