

# 流体力学方程式 の応用例

2021年12月20日

# ここでは

- 流体力学の方程式を用いた研究例を紹介する
- 流体力学の方程式を解く方法の簡単な紹介
  - 数値流体力学
- 大気循環・気候状態の計算例
  - 系外惑星の気候

# 基礎方程式

運動方程式 
$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + F_i$$

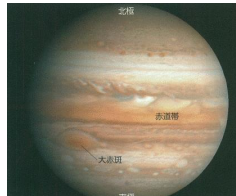
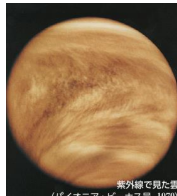
質量保存則 
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

エネルギー保存則 
$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\varepsilon v) = -\nabla \cdot q + Q$$

# 地球惑星科学分野への適用例

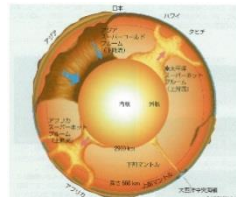
- 対象はいろいろ

- 大気：地球、火星、金星、木星、系外惑星

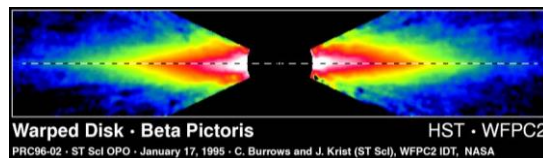
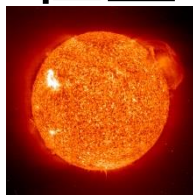


- 海洋

- 惑星内部：コア、マントル



- その他の天体：恒星、原始惑星系円盤



- 工学分野・医学分野：車、部屋の中の気流、血流など

- 方法：ナビエ・ストークス方程式の解を求める

# ナビエ・ストークス方程式を解く

- ナビエ・ストークス方程式は多くの場合、解析的に解くことができない

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \underbrace{v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\text{移流項}} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + F_i$$

**移流項：非線形効果**

- 解析的に解くなら、近似が必要
  - スケーリング
  - 非常に簡単な近似方程式の例：拡散方程式
- 解析的に解くことをあきらめて、数値的手法に頼ることがほとんど

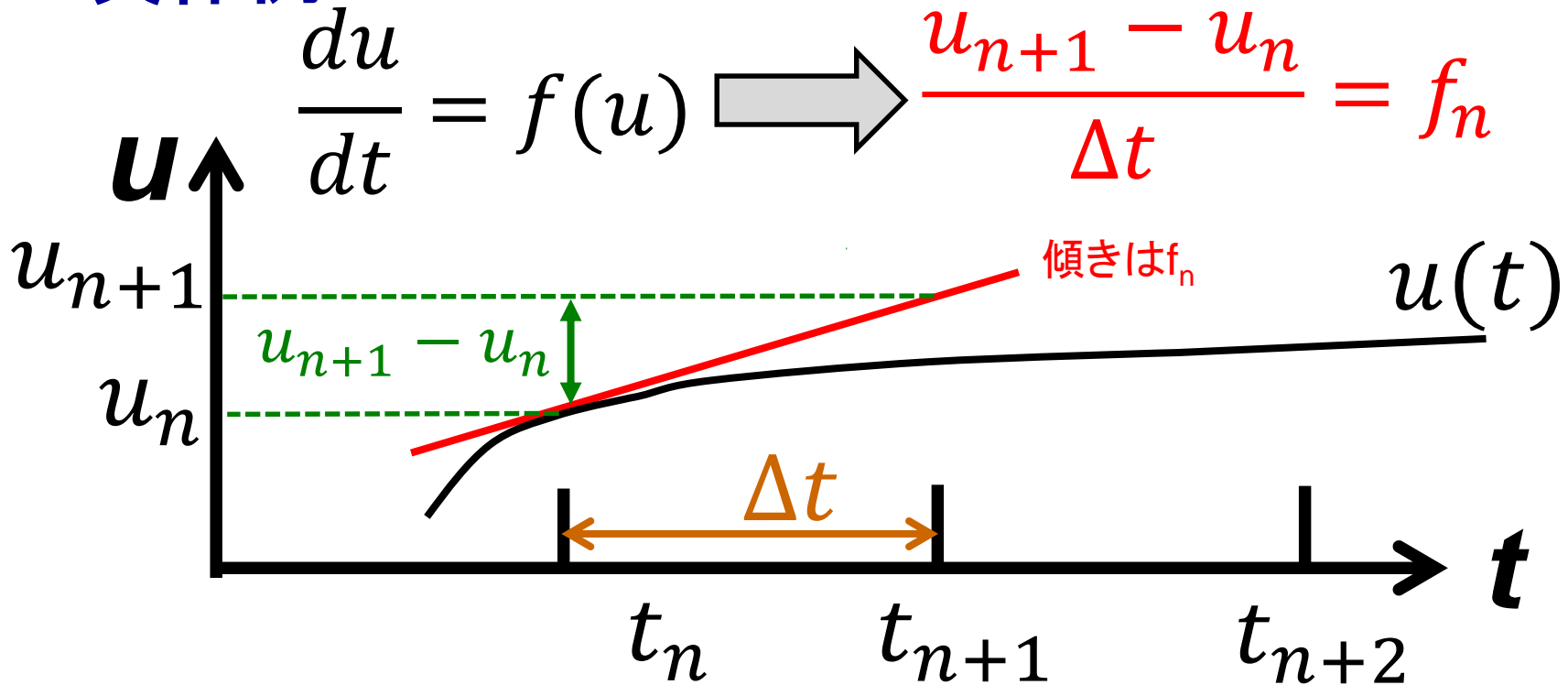
# 数値流体力学

(Computational Fluid Dynamics)

- ナビエ・ストークス方程式を数値的に解く
  - 計算機で数値積分を実行する
  - 科学における「第四の手法」と呼ばれることもある
- 利点
  - 条件を変えれば多様な解を求めることができる
  - 観測・実験が困難な場合でも解を求めることができる
- 欠点
  - 計算結果が正しいかどうかの検討が必要

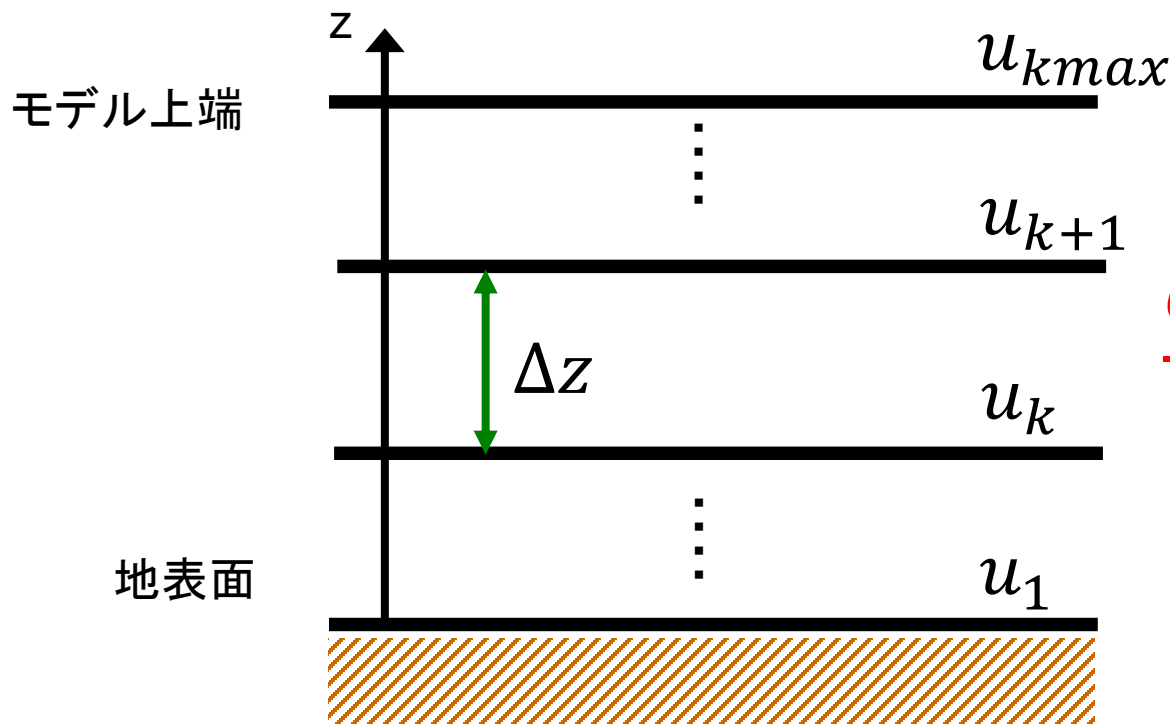
# 数値的な時間積分

- 離散的な時刻のみを考える(差分化)
- 各時刻における時間変化率の値を使った「外挿」の繰り返し計算
- 具体例



# 数値的な空間微分の表現

- 離散的な点(格子点)上の値のみを考える
  - 微分は格子点上の値の差であらわす
  - 格子点間隔より小さいスケールの現象は表現できない



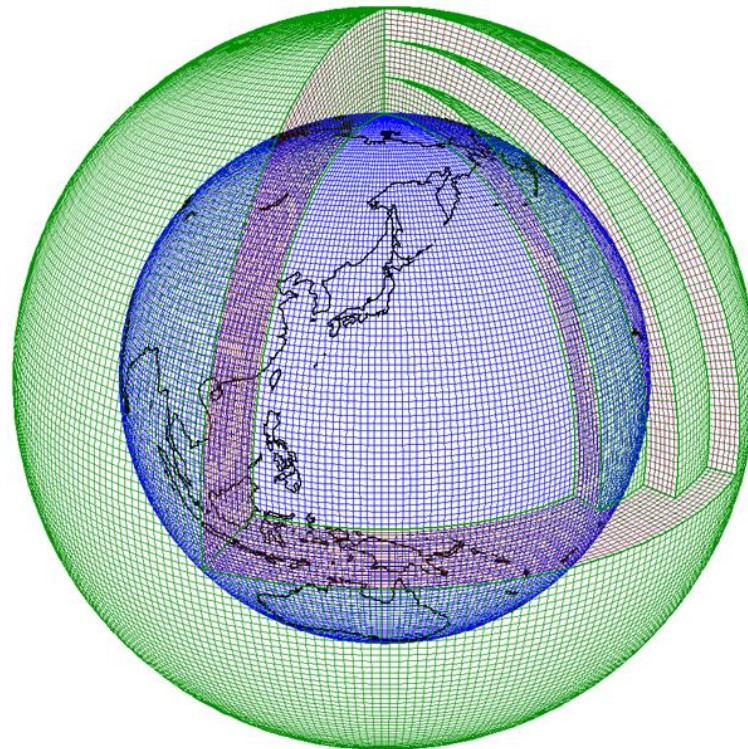
$$\frac{du}{dz} \rightarrow \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta z}$$

格子点数が多いほど  
モデル解像度は高くなる



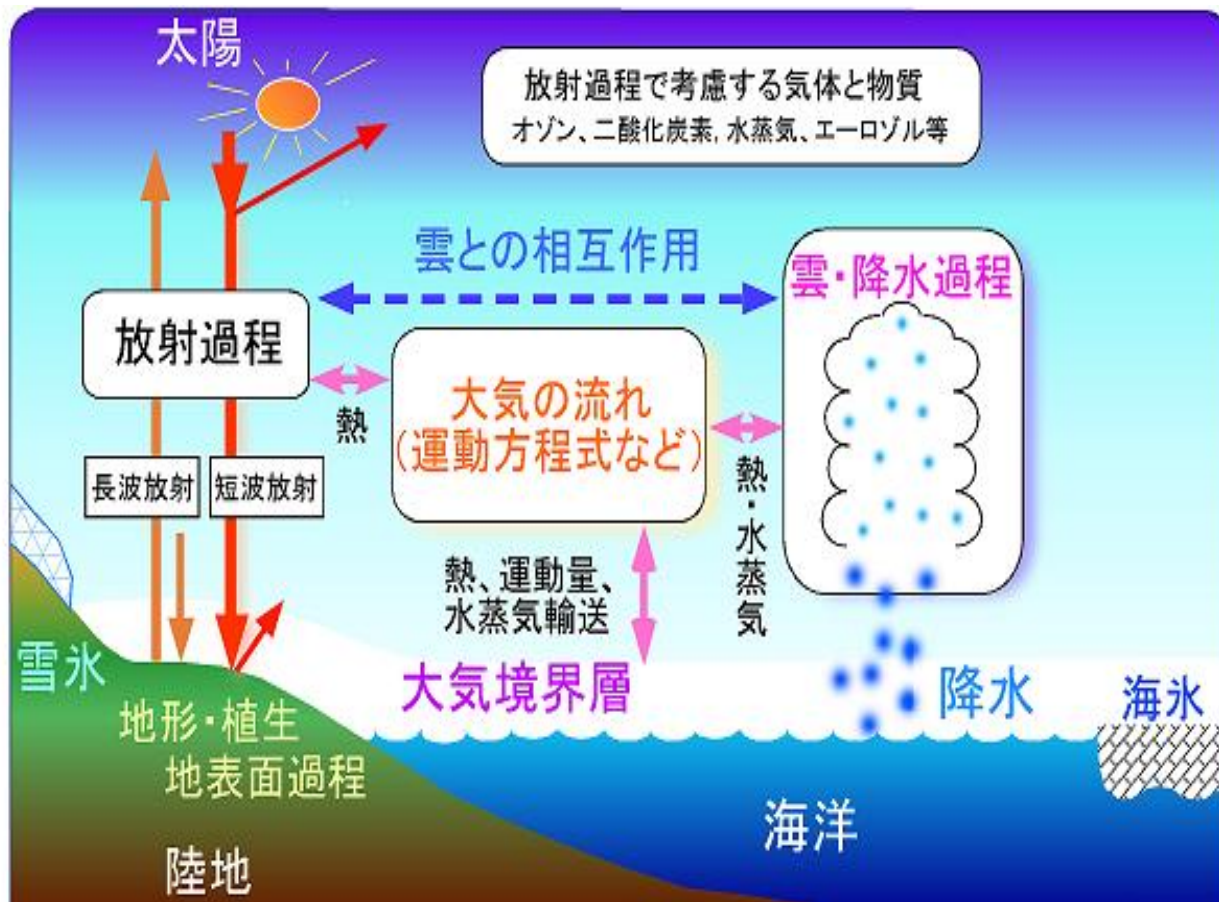
# 大気への適用

- 大気全体の循環を計算する場合、3次元球殻領域を考える。球面座標系を使用



# 大気の「特殊事情」

- 水蒸気を考慮する必要がある
- 放射・雲・乱流などを考慮する必要がある



# 大気に関する基礎方程式

運動方程式 
$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \underbrace{F_i}_{\substack{\text{粘性} \\ \text{地表からの} \\ \text{運動量流入} \\ \text{乱流による輸送} \\ \text{回転の効果}}}$$

質量保存則 
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

エネルギー保存則 
$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\varepsilon v) = -\nabla \cdot q + \underbrace{Q}_{\substack{\text{粘性加熱} \\ \text{放射加熱} \\ \text{凝結加熱} \\ \text{地表からの熱流入} \\ \text{乱流による輸送}}}$$

水蒸気の式 
$$\frac{dq}{dt} = S$$

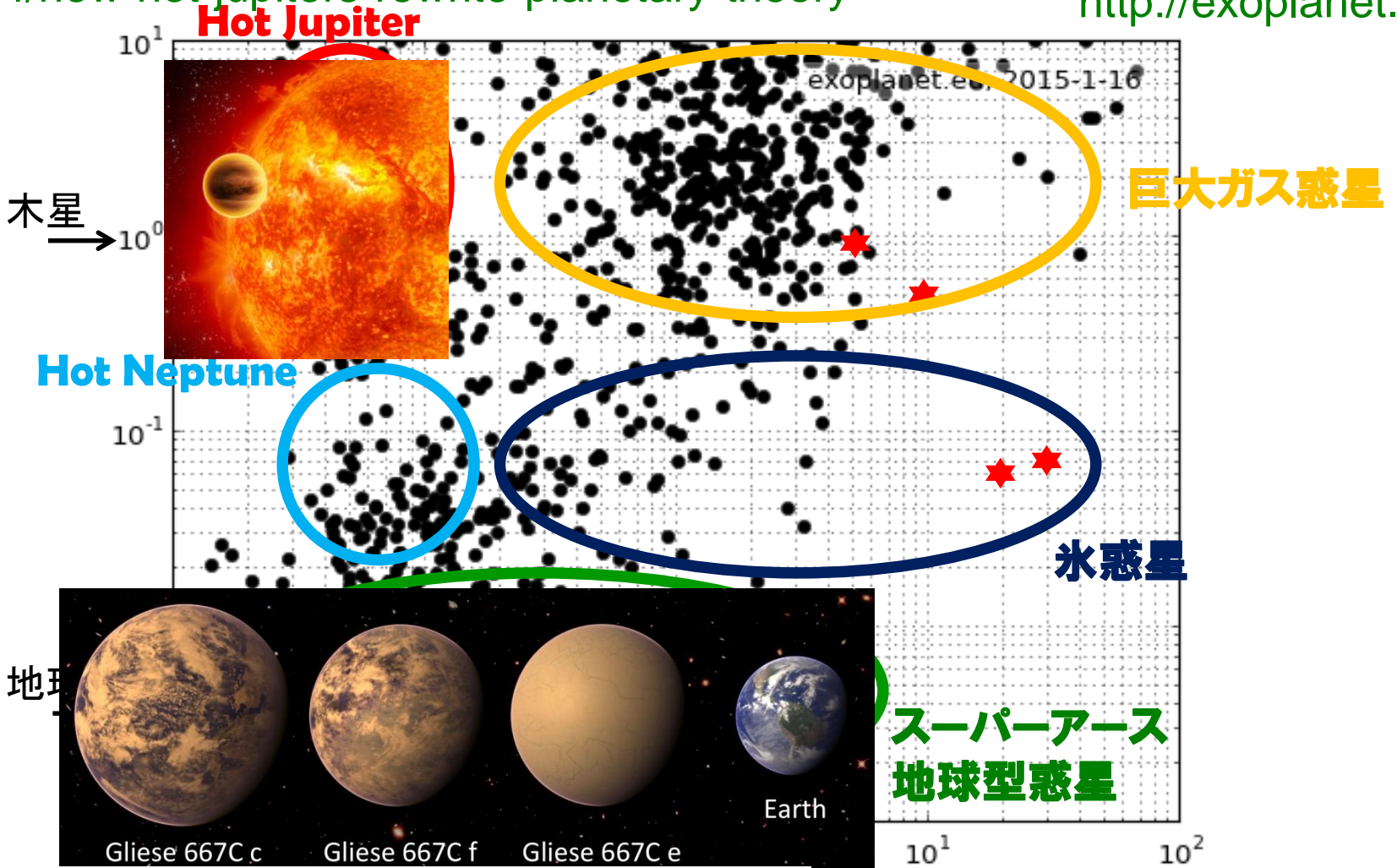
状態方程式 
$$p = \rho RT$$

# 系外惑星

<http://www.cosmosmagazine.com/news/3404/new-hot-jupiters-rewrite-planetary-theory>

<http://exoplanet.eu/>

惑星質量（木星で規格化）

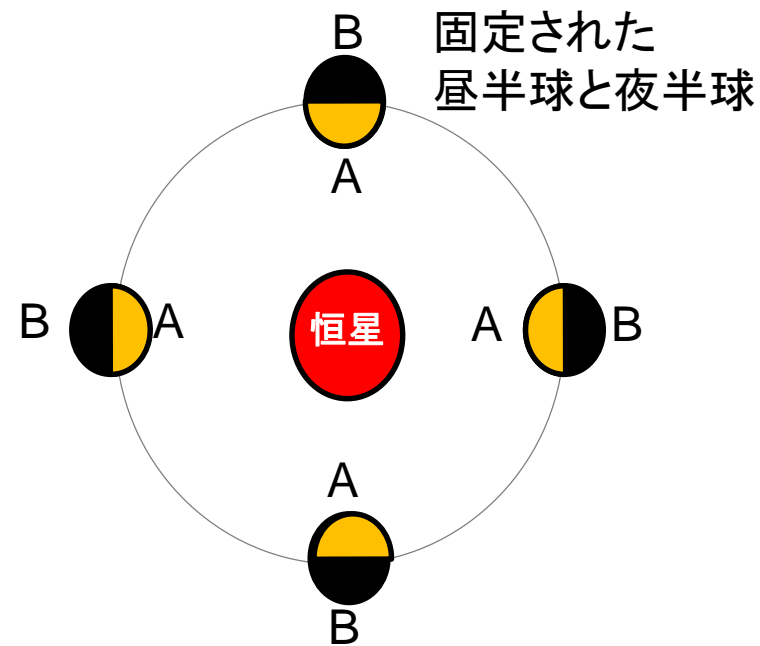
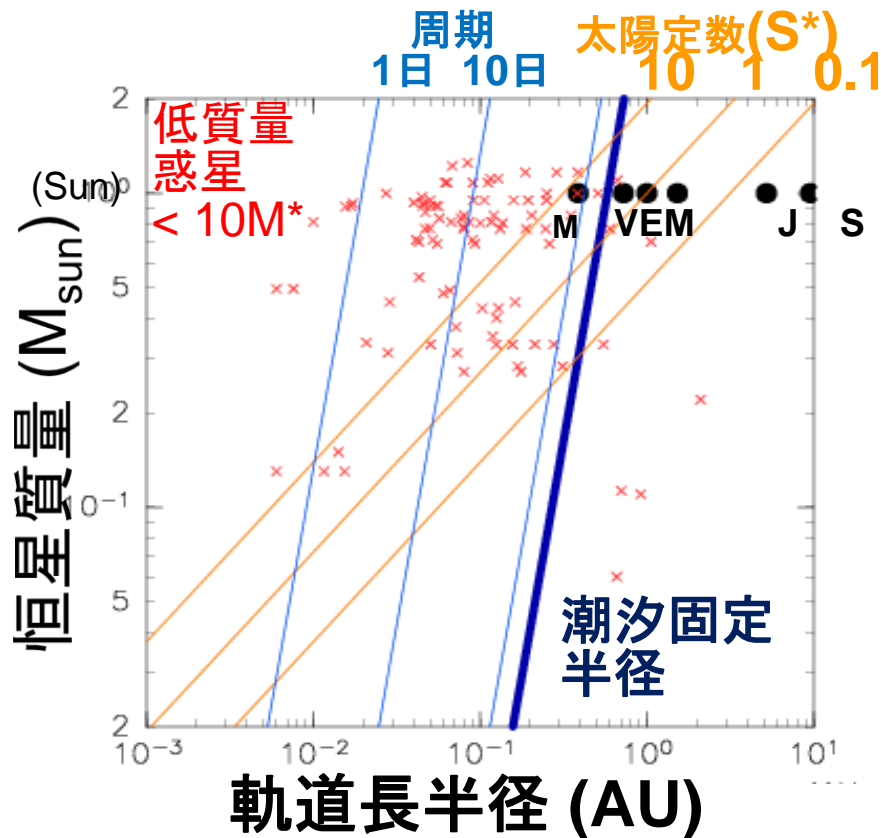


<http://www.drewexmachina.com/2014/09/07/habitable-planet-reality-check-gj-667c>

軌道長半径 (AU)

# 同期回転惑星

- 低質量の系外惑星の多くは潮汐固定
  - 固定された昼半球と夜半球が存在する世界
- 地球型惑星が存在する可能性も
  - 新たな気候の研究対象の出現

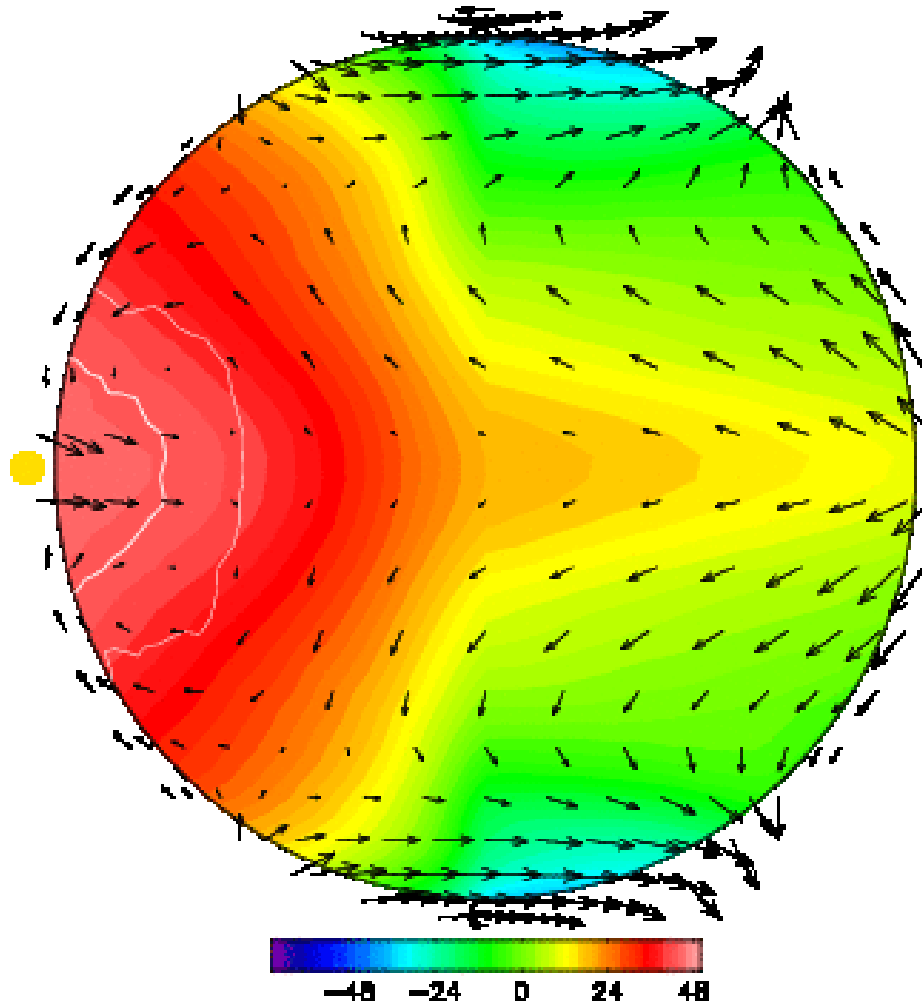


# 同期回転惑星の大気循環

$\Omega^*=0.5$ ,  $S=1600\text{W/m}^2$  の場合

計算結果: 365日平均場の視点を変えた動画

黄色点:  
恒星直下点



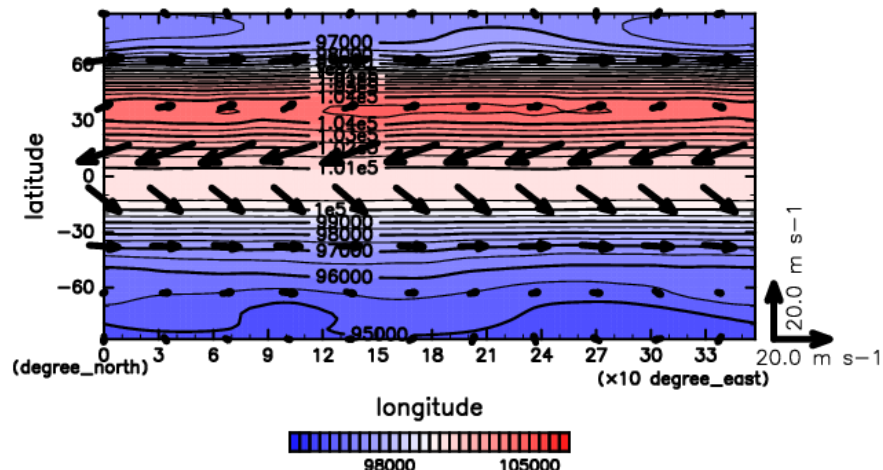
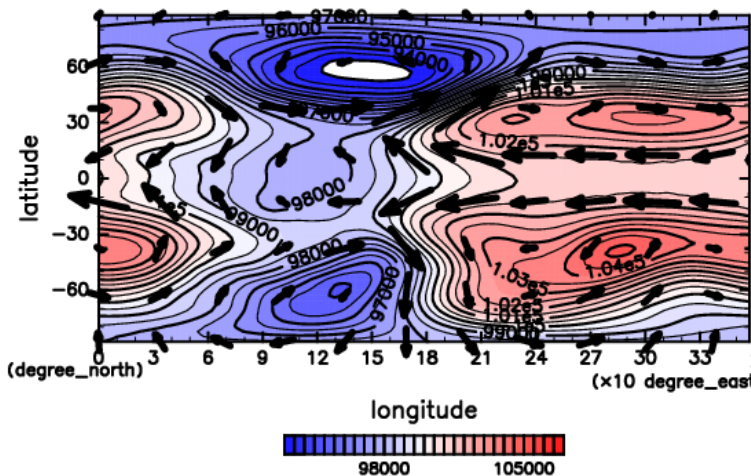
色: 表面温度  
矢印: 水平風  
等値線: 降水

# 地球の循環との比較

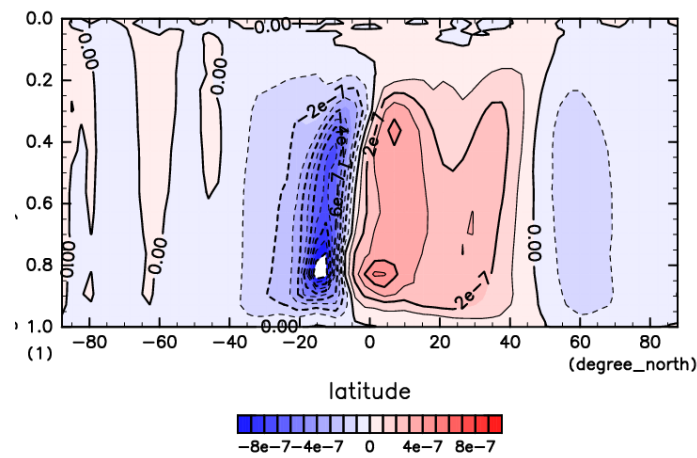
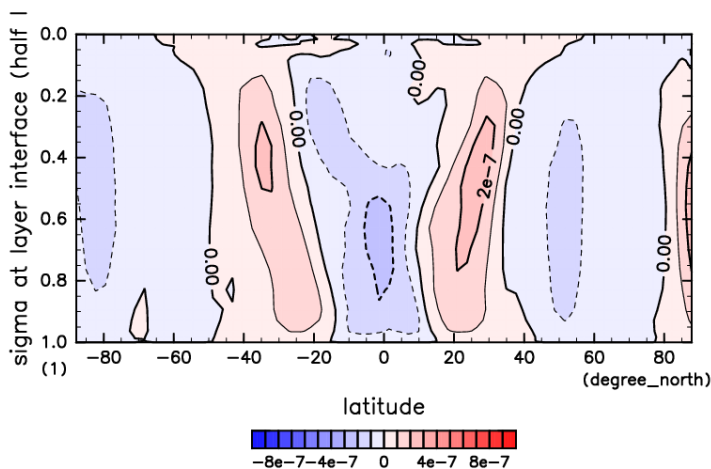
同期回転惑星

地球実験(12-2月の時間平均)

大気最下層  
水平風、  
表面気圧



鉛直風



# 気候の太陽定数依存性

- 地球条件で太陽定数を変化させる
- 地球のような気候が得られる条件の考察
  - 火星・金星・地球の違い



<http://www.solarviews.com/raw/mars/mars060.jpg>



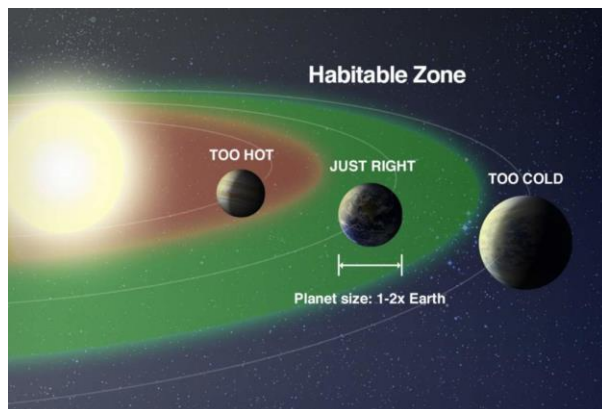
<http://www.solarviews.com/raw/earth/earthx.jpg>



<http://www.solarviews.com/browse/venus/venusmar.jpg>

太陽定数

## – ハビタブルゾーンの決定



<https://exoplanets.nasa.gov/the-search-for-life/habitable-zones/>





# まとめ

- 流体力学を応用する多くの場合では数値的に解が求められる
- 地球大気も系外惑星大気でも、同じ流体力学方程式に従う(はず)なので、同じ手法で流れを求めることができる
- 方程式は同じでも条件に応じて多様な流れができる