

## 第7章 粘性流体の流れの例

### 7.1 一方向の流れ

一定の断面形をもつまっすぐな管を通る流れを考える. 流れの方向に  $x$  軸:  $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$ . ナビエーストークス方程式は

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 v_x, \quad (7.1)$$

$$\rho \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \nabla^2 v_y, \quad (7.2)$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \nabla^2 v_z, \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (7.4)$$

連続の式

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

から,  $v_x$  は  $x$  によらない:  $v_x = v_x(y, z, t)$ .

運動方程式の  $y$  成分,  $z$  成分の式から,  $p$  は  $y, z$  によらない:  $p = p(x, t)$ .

以上より, 運動方程式の  $x$  成分は

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t}(y, z, t) - \eta \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x(y, z, t) = -\frac{\partial p}{\partial x}(x, t).$$

左辺は  $x$  を含まず, 右辺は  $y, z$  を含まないので, 両辺は  $t$  だけの関数. よって

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \alpha(t), \\ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} - \eta \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x &= \alpha(t) \end{aligned}$$

第一式より, 圧力勾配は一定値  $-\alpha(t)$  となる. 第二式を境界条件のもとに解いて流れ場を求めることができる.

定常な流れの場合, ポアソン方程式を解くことに帰着される.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_x = -\frac{\alpha}{\eta}, \quad (7.5)$$

$$\alpha = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad [\text{Nm}^{-3}] \quad (7.6)$$

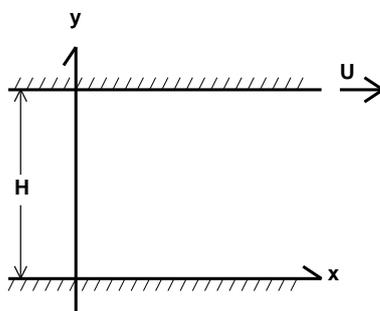
## 7.2 クエット流

- 2枚の平行な板にはさまれた密度一定の2次元非圧縮流体.
- $y = 0$ の壁は静止し,  $y = H$ の壁は速度  $U$  で  $x$  正方向に運動
- 定常状態.
- 物理量は  $x$  方向に変化しないものとする.

境界条件は

$$v_x = 0, v = 0 \quad (y = 0), \quad (7.7)$$

$$v_x = U, v = 0 \quad (y = H) \quad (7.8)$$



### 7.2.1 速度場

定常,  $x$  方向変化無し of 仮定より  $-\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha = 0$  ( $p$  は一定). よって, 流れ場は

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \quad (7.9)$$

で決定される (もともと  $x, y$  の2次元の問題). 2回積分すると

$$v_x = ay + b$$

境界条件  $v_x = 0(y = 0)$ ,  $v_x = U(y = H)$  より

$$b = 0, a = \frac{U}{H}$$

よって,

$$v_x = \frac{U}{H}y \quad (7.10)$$

これは2枚の平板を相対的に動かすだけで圧力勾配を働かせないときに生じる流れ: クエットの流れ (Couette flow)

### 7.2.2 上下の壁に働く応力

応力テンソルは

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad [\text{N m}^{-2}]$$

今の場合

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + \eta 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} = -p, \\ \sigma_{xy} &= \eta \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \eta \frac{U}{H}, \\ \sigma_{yy} &= -p + \eta 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} = -p. \end{aligned}$$

壁に働く応力は  $\sigma_{ik}n_k$ .  $n_k$  は壁の法線ベクトル成分で

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ の壁で } \mathbf{n} &= (0, 1), \\ y = H \text{ の壁で } \mathbf{n} &= (0, -1). \end{aligned}$$

$y = 0$  の壁では,  $n_k = (0, 1, 0)$  なので

$$\begin{aligned} \text{応力法線成分 } \sigma_{yk}n_k &= \sigma_{yy} = -p, \\ \text{応力接線成分 } \sigma_{xk}n_k &= \sigma_{xy} = \eta \frac{U}{H}. \end{aligned}$$

$y = H$  の壁では,  $n_k = (0, -1, 0)$  なので

$$\begin{aligned} \text{応力法線成分 } \sigma_{yk}n_k &= -\sigma_{yy} = p, \\ \text{応力接線成分 } \sigma_{xk}n_k &= -\sigma_{xy} = -\eta \frac{U}{H}. \end{aligned}$$

応力の様子を図にしたものが, 図 7.1 である.

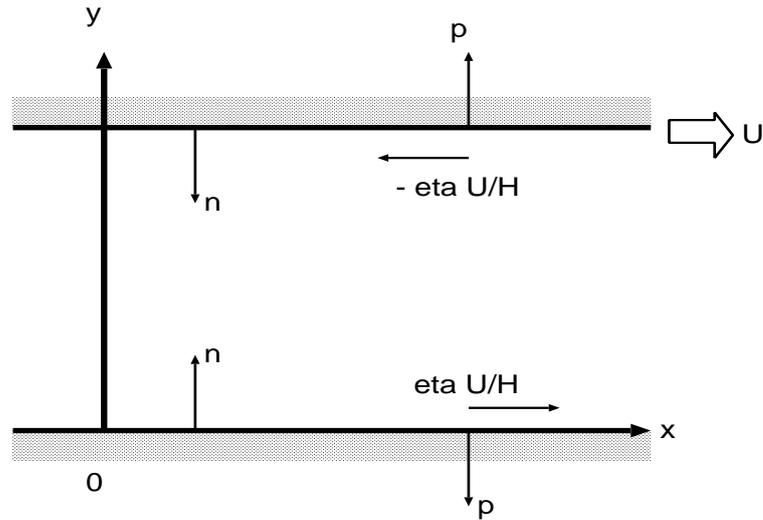


図 7.1: 応力などの図.

### 7.2.3 エネルギー収支

もともと運動エネルギーの式は

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{v_x}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} v_x^2 = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_x p}{\rho} \right) + p \frac{\partial}{\partial x} \frac{v_x}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (v_x p) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2.$$

今の問題では

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2. \tag{7.11}$$

- エネルギーの収支としては、流体の全ての部分で粘性拡散と粘性散逸がバランス。
- エネルギーフラックスの y 成分は

$$-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\eta \times \frac{U}{H} y \times \frac{U}{H} = -\eta \left( \frac{U}{H} \right)^2 y. \tag{7.12}$$

どこでも負、よってエネルギーフラックスは下向き。

- $y = 0$  の境界におけるエネルギーフラックスは 0,  $y = H$  の境界におけるエネルギーフラックスは  $-\eta \frac{U^2}{H}$ . よって,  $y = H$  の壁でもらったエネルギーは全て流体の中で消費。

- 壁が流体にする仕事の仕事率  $-\eta \frac{U^2}{H}$  は  $(\sigma_{xy} \times U)$ . これは上の壁で流体に流入するエネルギーフラックスと等しくなっている.
- エネルギーフラックスの収束は

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( -\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\eta \left( \frac{U}{H} \right)^2 y \right\} = \eta \left( \frac{U}{H} \right)^2.$$

これは流体の各部分が受け取るエネルギーである.

- 流体の各部分で発生する粘性散逸は

$$-\eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 = \eta \left( \frac{U}{H} \right)^2.$$

粘性散逸は  $-\eta \left( \frac{U}{H} \right)^2$ . 流体の各部分では, エネルギーフラックスの収束分が粘性散逸でその場で消えている (実際には熱が発生する).

- $y = 0$  の境界における粘性散逸は 0.  $y = H$  では, エネルギーフラックスは  $-\eta \frac{U^2}{H}$ . よって,  $y = H$  の壁でもらったエネルギーは全て流体の中で消費. 上の壁で流体に流入するエネルギーフラックス  $-\eta \frac{U^2}{H}$  は壁が流体にする仕事の仕事率  $(\sigma_{xy} \times U)$  でもある.
- 単位時間あたりに流体全体で消えるエネルギー量は

$$\int_0^H \eta \left( \frac{U}{H} \right)^2 dy = \eta \frac{U^2}{H}$$

これは, 上壁から入るエネルギーフラックスの大きさに等しい.

エネルギー収支の様子を表した模式図を 図 7.2 に示す.

### 7.2.4 運動量収支

運動方程式を流束形式に書き換える.  $p$  も定数ということを使うと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

運動量流束は

$$\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = \eta \frac{U}{H}. \tag{7.13}$$

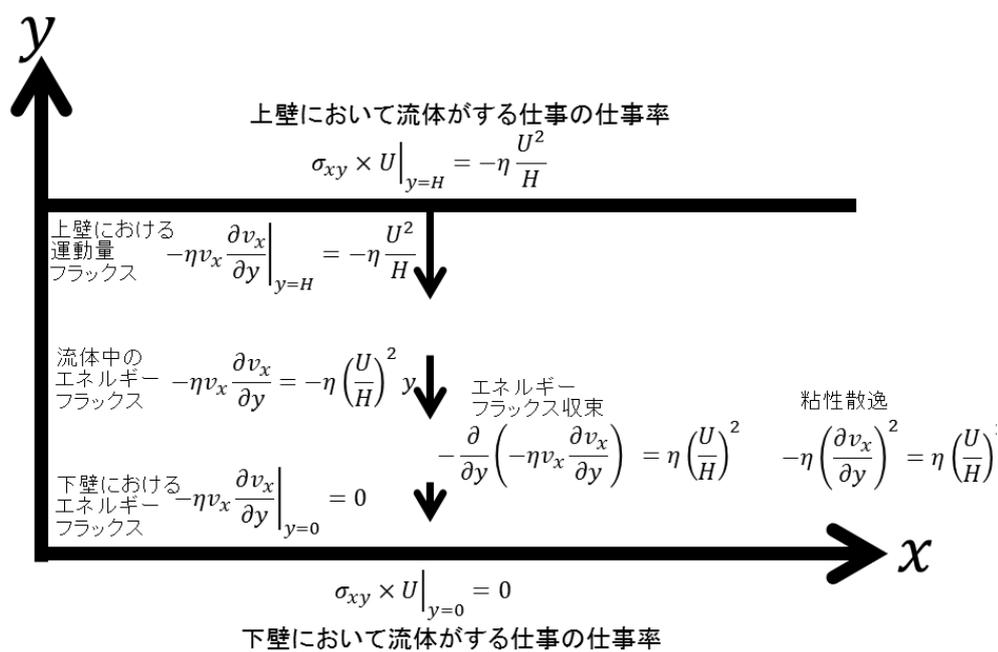


図 7.2: クエット流におけるエネルギー収支.

であり、運動量流束の収束は0である。

よって、流体は全ての部分で上からもらった運動量を下へ全部渡すだけ。  $y = H$  では壁から運動量もらう。  $y = 0$  では壁に運動量渡す。

よって、系全体では、  $y = H$  の壁から、  $\eta \frac{U}{H}$  の運動量が流体に渡され、流体全体ではそれをそのまま  $y = 0$  まで受渡し  $y = 0$  の壁に与える、となっている。

流体が壁で受け取る運動量は、運動量流束密度テンソル

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$$

より

$$\Pi_{xy}|_{y=0,y=H} = \rho v_x v_y - \sigma_{xy} = \eta \frac{U}{H} \tag{7.14}$$

となる。

運動量収支の様子を表した模式図を 図 7.3 に示す。

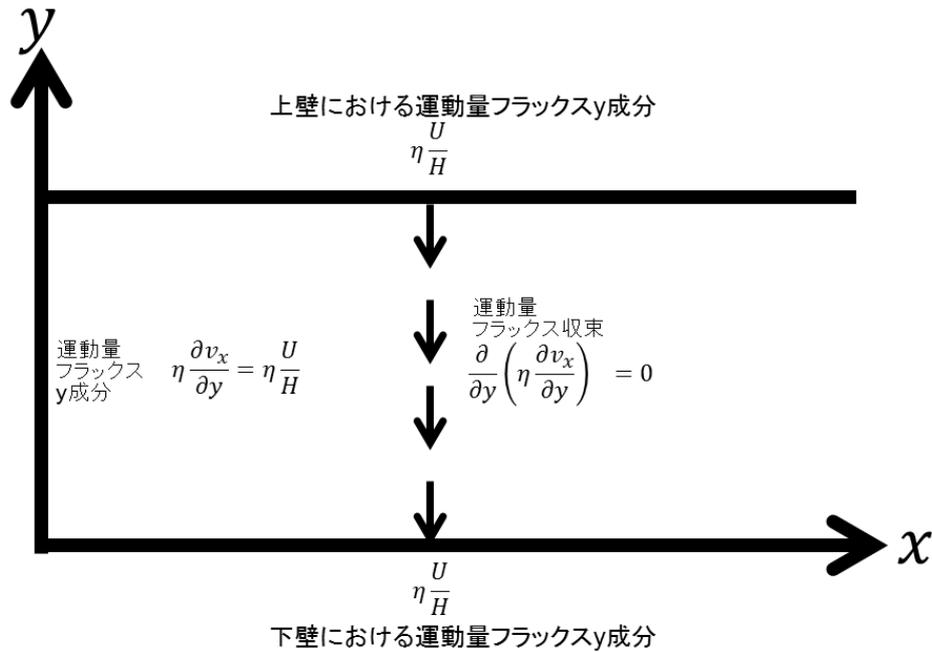


図 7.3: クエット流における運動量収支.

### 7.3 円管の中の流れ

半径  $a$  の円管を通る定常流を考える。管は静止しており、圧力勾配で流れを引き起こす。流れは管の中心軸に関して対称。円筒座標  $(r, \theta, z)$  を使って考える。境界条件は

$$\begin{aligned} v_z = v_\theta = v_r = 0 & \quad \text{at } r = a, \\ v_z = (\text{有限}) & \quad \text{at } r = 0 \end{aligned}$$

一定の圧力勾配が存在するので  $\alpha$  は定数.

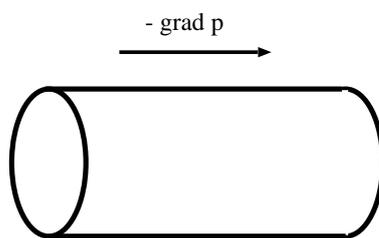


図 7.4: 円管の中の流れ

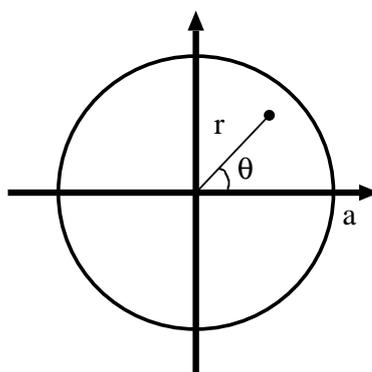


図 7.5: 円管の中の流れを考える座標系

### 7.3.1 流れ場

ポアソン方程式<sup>1</sup>は

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = -\frac{\alpha}{\eta}$$

これを積分する.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= -r \frac{\alpha}{\eta}, \\ r \frac{\partial v_z}{\partial r} &= -\frac{\alpha}{2\eta} r^2 + A, \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} &= -\frac{\alpha}{2\eta} r + A \frac{1}{r}, \\ v_z(r) &= -\frac{\alpha}{4\eta} r^2 + A \log r + B \end{aligned}$$

<sup>1</sup>もとのポアソン方程式は

$$\nabla^2 v = -\frac{\alpha}{\eta} \tag{7.15}$$

$A, B$  は積分定数. 境界条件から決定する.

$r = 0$  で速度有限なので  $A = 0$ . 更に,  $r = a$  で  $v_z = 0$  の条件から

$$\begin{aligned} v_z(a) &= -\frac{\alpha}{4\eta}a^2 + B, \\ 0 &= -\frac{\alpha}{4\eta}a^2 + B, \\ B &= \frac{\alpha}{4\eta}a^2 \end{aligned}$$

よって, 速度分布は

$$v_z(r) = -\frac{\alpha}{4\eta}r^2 + a^2 = \frac{\alpha}{4\eta}(a^2 - r^2) \quad (7.16)$$

流束分布は放物線. 円管を通るこのような流れをポアズイユの流れ (Poiseuille flow), もしくはハーゲン・ポアズイユの流れという.<sup>2</sup>

### 7.3.2 流量

管を通る流量は

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^a v_z r d\theta dr = 2\pi \int_0^a v_z r dr \quad [\text{m sec}^{-1} \text{m}^2] = [\text{m}^3 \text{sec}^{-1}] \\ &= 2\pi \int_0^a \frac{\alpha}{4\eta}(a^2 - r^2)r dr \\ &= \frac{\alpha\pi}{2\eta} \int_0^a (a^2 r - r^3) dr \\ &= \frac{\alpha\pi}{2\eta} \left[ \frac{a^2}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^a = \frac{\alpha\pi}{2\eta} \left[ \frac{a^2}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4 \right] = \frac{\pi\alpha}{2\eta} \times \frac{1}{4}a^4 \\ &= \frac{\pi a^4 \alpha}{8\eta} = -\frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{dp}{dx} \end{aligned} \quad (7.17)$$

## 7.4 振動平板による流れ

この問題は非定常な流れの例である.

## 7.5 Rayleigh の流れ

今まで静止していた流体がある瞬間に急に運動をはじめる場合の過渡的な流れを考える.

<sup>2</sup>Tritton (1988) では, 「歴史的な正確さを期す場合には, ハーゲン・ポアズイユの流れ」という記述がなされている. 理論解は Stokes によって求められた.

無限に広い平板を境界とする半無限に広がる流体を考える (図 7.6). 最初, 流体は静止しているものとする. いま, ある瞬間から平板を一定の速度  $U$  でそれ自身に平行に動かすことを考える. Rayleigh によってはじめて研究されたので, Rayleigh の問題 (Rayleigh's problem) という. また, このときの流れは Rayleigh の流れ (Rayleigh flow) という.

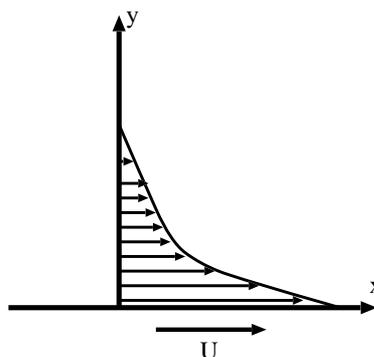


図 7.6: Rayleigh の流れ. 今井 (1973) をもとに作成.

板の運動の方向に  $x$  軸, 板の面に直角に  $y$  軸をとると, 流速の  $x$  成分は,

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (7.18)$$

となる.

境界条件は以下の通りである.

$$\begin{aligned} v_x &= U, & y &= 0 \\ v_x &= 0, & y &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

初期条件は以下の通りである.

$$v_x = 0, \quad t = 0.$$

### 7.5.1 次元解析

この問題では流れのスケールをあらわす特徴的な長さはない. そのため, 長さのスケールとしては  $(\nu t)^{1/2}$  くらいしか作れない. よって, 解の形として

$$\begin{aligned} v_x &= U f(\xi), \\ \xi &\equiv \frac{y}{2(\nu t)^{1/2}} \end{aligned} \quad (7.19)$$

が期待される. これから,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{-y/2(\nu t)^{-1/2}\nu}{2\nu t} = -\frac{1}{2t} \frac{y}{2(\nu t)^{1/2}} = -\frac{\xi}{2t}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{1}{2(\nu t)^{1/2}} \end{aligned} \quad (7.20)$$

これらを用いて運動方程式を変数変換すると,

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right), \\ \frac{df}{d\xi} \left( -\frac{\xi}{2t} \right) &= \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{df}{d\xi} \frac{1}{2(\nu t)^{1/2}} \right), \\ -\frac{\xi}{2t} \frac{df}{d\xi} &= \frac{1}{2(\nu t)^{1/2}} \nu \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ -\frac{\xi}{2t} \frac{df}{d\xi} &= \frac{1}{2(\nu t)^{1/2}} \nu \frac{d}{d\xi} \left( \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right), \\ -\frac{\xi}{2t} \frac{df}{d\xi} &= \frac{1}{2(\nu t)^{1/2}} \nu \frac{d}{d\xi} \left( \frac{df}{d\xi} \frac{1}{2(\nu t)^{1/2}} \right), \\ -\xi \frac{df}{d\xi} &= \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{d\xi^2}, \\ \frac{d^2 f}{d\xi^2} + 2\xi \frac{df}{d\xi} &= 0.\end{aligned}$$

境界条件は

$$\begin{aligned}f &= 1, \quad \xi = 0, \\ f &= 0, \quad \xi \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

初期条件は

$$f = 0, \quad \xi \rightarrow 0,$$

となり, 2 番目の境界条件と一致する.

$f$  の式の解は

$$f = \operatorname{erfc} \xi = 1 - \operatorname{erf} \xi$$

ただし,  $\operatorname{erf}$  は誤差関数

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

これより

$$v_x = U \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right] \quad (7.21)$$

となる.

## 第 8 章 遅い粘性流体

### 8.1 遅い流れを表現する方程式

ナビエ・ストークス流体 ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ,  $\rho = \rho_0 = \text{定数}$ ) において  $\mathbf{v} = 0$  のまわりに線形化する (線形化は音波のときにやった).

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

において, 非線形項  $\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}$  を無視し,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (8.1)$$

で近似する. これをストークス近似 (Stokes's approximation) という. 連続の式は

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (8.2)$$

### 8.2 定常なストークス流れ

- ストークス近似した方程式の一般的性質  
ストークス近似が成り立つ場合

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}.$$

発散をとると,  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  なので

$$0 = \nabla^2 p$$

よって,  $p$  は調和関数.

一方, 渦度をとると

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (8.3)$$

となる. 熱伝導方程式と同じ形.

- 定常  $\partial/\partial t = 0$  の場合.

渦度方程式は

$$0 = \nabla^2 \omega$$

となる. 渦度も調和関数になる.

定常の場合, 運動方程式は

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}.$$

となる. これを解く.

定常なストークス流れを求める一般的な方法は

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \tilde{\mathbf{v}}$$

と速度場を分割し,  $\tilde{\mathbf{v}}$  を決定することである. ただし,  $\mathbf{v}_p$  は適当なポテンシャル流れであり,

$$\text{div} \mathbf{v}_p = 0, \quad \text{rot} \mathbf{v}_p = 0$$

したがって,

$$\nabla^2 \mathbf{v}_p = 0$$

である.

分割した速度場をストークス近似の運動方程式に代入すると

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}$$

任意のベクトル調和関数  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = 0$$

を用いて

$$\tilde{\mathbf{v}} = \text{grad}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) - 2\boldsymbol{\xi} \quad (8.4)$$

$$p = 2\eta \text{div} \boldsymbol{\xi} \quad (8.5)$$

( $\eta = \nu \rho_0$ ) とおくと,

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}$$

を満たす. よって  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$  は定常ストークス流れを表現するものである.

- 参考:  $\xi$  を用いた  $\tilde{v}$  と  $p$  の表現の導出

ベクトル調和関数  $\xi$  は次の式を満たす.

$$\begin{aligned}
 \nabla^2(\mathbf{x} \cdot \xi) &= \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(x_i \xi_i) \\
 &= \underbrace{\frac{\partial^2 x_i}{\partial x_j^2}}_{0 \text{ になる}} \xi_i + 2 \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + x_i \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_j^2} \\
 &= 2\delta_{ij} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \mathbf{x} \cdot \underbrace{\nabla^2 \xi}_{\text{定義により } 0} \\
 &= 2\text{div}\xi
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

$\eta\nabla^2\tilde{v} = \text{grad}p$  の一般解について考える.

$$\tilde{v} = \text{grad}(\mathbf{x} \cdot \xi) - 2\xi$$

で定義される  $\tilde{v}$  は以下を満たす.

$$\begin{aligned}
 \text{div}\tilde{v} &= \text{div}[\text{grad}(\mathbf{x} \cdot \xi) - 2\xi] = \nabla^2(\mathbf{x} \cdot \xi) - 2\text{div}\xi \\
 &= 0 \quad ((8.6) \text{ より})
 \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned}
 \nabla^2\tilde{v} &= \text{grad} \underbrace{\text{div}\tilde{v}}_{\text{上式より } 0} - \text{rotrot}\tilde{v} \\
 &= -\text{rotrot}\{\text{grad}(\mathbf{x} \cdot \xi) - 2\xi\} \\
 &= 2\text{rotrot}\xi \\
 &= 2\{\text{graddiv}\xi - \nabla^2\xi\} \\
 &= 2\text{graddiv}\xi
 \end{aligned}$$

よって,  $\eta\nabla^2\tilde{v} = \text{grad}p$  は

$$2\eta\text{graddiv}\xi = \text{grad}p \tag{8.7}$$

となるので,

$$p = 2\eta\text{div}\xi \tag{8.8}$$

なら, 式を満たすことになる.

- ストークス極 (Stokeslet) による流れ

物体が存在する場合  $r^{-1}$  で展開して

$$\xi_i = \lambda_i \frac{1}{r} + \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} + \lambda_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{1}{r} + \dots \quad (8.9)$$

$1/r$  の項だけとると ( $\xi = \frac{\lambda}{r}$  と選択したことと同じ),

$$\tilde{\mathbf{v}} = \text{grad}(\mathbf{x} \cdot \xi) - 2\xi = \text{grad}(\mathbf{x} \cdot \lambda/r) - 2\lambda/r \quad (8.10)$$

$$p = 2\eta \text{div} \xi = 2\eta \text{div}(\lambda/r) = 2\eta \lambda \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \quad (8.11)$$

- 成分表示

$\xi = \frac{\lambda}{r}$  とおき,  $\lambda$  方向を軸とする極座標系を選ぶ.

$xyz$  系では  $\lambda = (0, 0, \lambda)$  と表され,<sup>1</sup>

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta$$

なので,

$$\mathbf{x} \cdot \lambda = \lambda r \cos \theta = z \cdot \lambda \quad (8.12)$$

である. 極座標では

$$\text{grad} = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

なので

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= \text{grad}(\mathbf{x} \cdot \xi) - 2\xi \\ &= \text{grad}(\mathbf{x} \cdot \lambda/r) - 2\lambda/r = \text{grad}\left(\frac{\lambda r \cos \theta}{r}\right) - \frac{2}{r} \lambda \mathbf{e}_z \\ &= \text{grad}(\lambda \cos \theta) - \frac{2}{r} \lambda \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (8.13)$$

ここで,

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

<sup>1</sup>先に  $\lambda$  を極座標表示しておくべきでは

を使うと,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{v}} &= \frac{\partial}{\partial r}(\lambda \cos \theta) \cdot \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\lambda \cos \theta) \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\lambda \cos \theta) \cdot \mathbf{e}_\varphi - \frac{2}{r} \lambda (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \\
 &= 0 \cdot \mathbf{e}_r - \frac{1}{r}(\lambda \sin \theta) \cdot \mathbf{e}_\theta + 0 \cdot \mathbf{e}_\varphi - \frac{2}{r} \lambda (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \\
 &= 0 \cdot \mathbf{e}_r - \frac{1}{r}(\lambda \sin \theta) \cdot \mathbf{e}_\theta + 0 \cdot \mathbf{e}_\varphi - \frac{2}{r} \lambda \cos \theta \mathbf{e}_r + \frac{2}{r} \lambda \sin \theta \mathbf{e}_\theta \\
 &= -\frac{2}{r} \lambda \cos \theta \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \lambda \sin \theta \mathbf{e}_\theta
 \end{aligned} \tag{8.14}$$

これより,

$$\tilde{v}_r = -2 \frac{\lambda}{r} \cos \theta \tag{8.15}$$

$$\tilde{v}_\theta = \frac{\lambda}{r} \sin \theta \tag{8.16}$$

$$\tilde{v}_\varphi = 0 \tag{8.17}$$

$$p = -2\eta \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta \tag{8.18}$$

ただし  $\lambda = |\lambda|$ .

流線関数  $\tilde{\Psi}$  としては, 以下を使えば良い.

$$\tilde{\Psi} = -\lambda r \sin^2 \theta \tag{8.19}$$

$$\tilde{v}_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \theta} \tag{8.20}$$

$$\tilde{v}_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} \tag{8.21}$$

これが, ストークス近似の解の最も基本的なもの. ストークス極による流れという.

- 一様流中の球の場合

- 球のまわりのポテンシャル流は

$$\Psi = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) = \sin^2 \theta \left( \frac{1}{2} U r^2 - \frac{1}{2} U \frac{a^3}{r} \right) \tag{8.22}$$

$$v_r = \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) U \cos \theta \tag{8.23}$$

$$v_\theta = - \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) U \sin \theta \tag{8.24}$$

であった (ポテンシャル流の最後のところでやった). しかし, この解は粘性のある場合の境界条件

$$\mathbf{v} = 0 \quad (r = a)$$

を満たさない.  $r = a$  で  $v_r = 0$  であるだけである.

- そこでこのポテンシャル流れを参考に、あらためて、ポテンシャル流れ

$$\Psi = \sin^2 \theta \left( \frac{1}{2} U r^2 - \frac{\beta}{r} \right)$$

を定義する. この流れにストークス極による流れを加えて

$$\Psi = \sin^2 \theta \left( \frac{1}{2} U r^2 - \frac{\beta}{r} - \lambda r \right)$$

とし, 境界条件  $r = a$  で

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$$

を考慮する.  $\Psi = 0$  の条件に関しては

$$\begin{aligned} \Psi(r = a) &= \sin^2 \theta \left( \frac{1}{2} U a^2 - \frac{\beta}{a} - \lambda a \right), \\ 0 &= \sin^2 \theta \left( \frac{1}{2} U a^2 - \frac{\beta}{a} - \lambda a \right), \\ 0 &= \frac{1}{2} U a^2 - \frac{\beta}{a} - \lambda a. \end{aligned}$$

$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$  の条件に関しては

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial r}(r = a) &= \sin^2 \theta \left( U a + \frac{\beta}{a^2} - \lambda \right), \\ 0 &= \sin^2 \theta \left( U a + \frac{\beta}{a^2} - \lambda \right), \\ 0 &= U a + \frac{\beta}{a^2} - \lambda. \end{aligned}$$

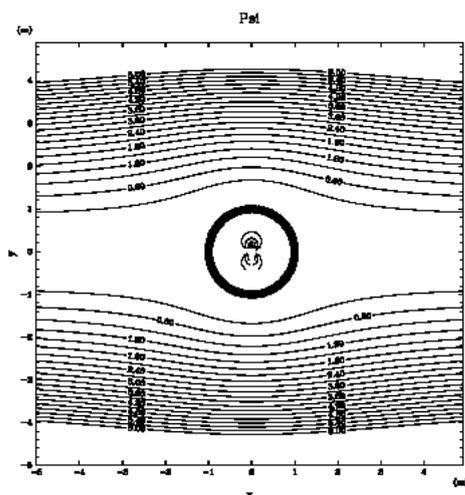
これより,

$$\beta = -\frac{1}{4} U a^3, \quad \lambda = \frac{3}{4} U a$$

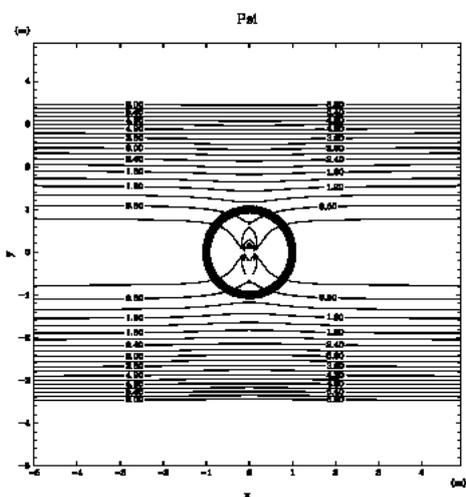
となる.  
この時

$$\begin{aligned} \Psi &= \sin^2 \theta \left( \frac{1}{2} U r^2 + \frac{1}{4} \frac{U a^3}{r} - \frac{3}{4} U a r \right) \\ &= \frac{1}{2} U (r - a)^2 \left( 1 + \frac{a}{2r} \right) \sin^2 \theta \end{aligned} \tag{8.25}$$

(a) 球のまわりの流れ



(b) ポテンシャル流の部分



(c) ストークス極による流れ

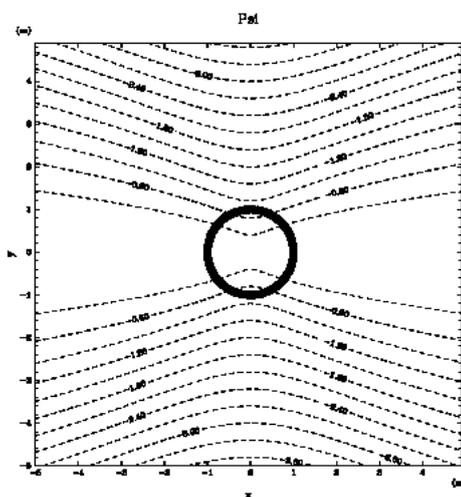


図 8.1: 粘性流体中の球のまわりの流れの流線関数. 黒太線が円柱表面を表す.

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = U(r-a)^2 \left(1 + \frac{a}{2r}\right) \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad (8.26)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{1}{2} U \left(2 - \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{a}{r}\right) \sin \theta, \quad (8.27)$$

$$p = -2\eta \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta = -2\eta \frac{3}{4} U a \frac{\cos \theta}{r^2} = -\frac{3}{2} \eta U a \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (8.28)$$

– 球に働く力

圧力は  $p = -2\eta\lambda \cos \theta / r^2$  に  $\lambda = 3Ua/4$  を代入して

$$p = -\frac{3}{2} \eta U a \frac{1}{r^2} \cos \theta$$

よって球の表面  $r = a$  での法線応力  $\sigma_{rr}$ , 接線応力  $\sigma_{r\theta}$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{3}{2} \frac{\eta U}{a} \cos \theta \\ \sigma_{r\theta} &= \eta \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] = -\frac{3}{2} \frac{\eta U}{a} \sin \theta \end{aligned}$$

圧力抵抗 (法線応力の積分)<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} D_p &= \int \sigma_{rr} \cos \theta dS \\ &= \frac{3}{2} \frac{\eta U}{a} 2\pi a^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \eta a U \end{aligned} \quad (8.29)$$

摩擦抵抗 (接線応力の積分)

$$\begin{aligned} D_f &= \int \sigma_{r\theta} \sin \theta dS \\ &= \frac{3}{2} \frac{\eta U}{a} 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= 4\pi \eta a U \end{aligned} \quad (8.30)$$

よって全抵抗は

$$D = D_p + D_f = 6\pi \eta a U$$

これをストークスの抵抗法則と言う。

<sup>2</sup>円柱に働く力を計算した場合の  $\int p \cos \theta da \theta$  に対応する式になっている。