

GFD セミナー 2013, 2013年8月22日

順圧不安定からの擾乱発達に対する 2つの上限値の同一性について

石岡圭一 (京大院・理)

E-mail: ishioka@gfd-dennou.org

話の流れ

- 導入
- モデル方程式と線形安定論
- 非線形時間発展
- **Shepherd**の上限値とその改良
- 直接上限値
- 石岡の予想
- 予想の解決について
- 議論

やりたいこと

基本場が流体力学的に不安定



擾乱が指数関数的に発達



この発達は系の非線形効果である程度で止まる



どこまで発達しうるかを予測できないだろうか？

取り扱う系： 回転球面上の2次元非圧縮非粘性流体

モデル方程式 (渦度方程式):

$$\frac{Dq}{Dt} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial q}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \right) = 0$$

$q \equiv \nabla^2 \psi + 2\Omega\mu$: 絶対渦度, $\psi(\lambda, \mu, t)$: 流線関数,

t : 時刻, λ : 経度, $\mu \equiv \sin \phi$: サイン緯度,

a : 球半径, Ω : 球自転角速度, ∇^2 : 球面上の2次元ラプラシアン

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\}$$

絶対渦度 q は流れに沿って保存される.

線形化方程式

帯状流: $q(\lambda, \mu, t) = \bar{q}(\mu)$ は定常解.

対応する流線関数 $\bar{\psi}(\mu)$ を $\bar{q} = \nabla^2 \bar{\psi} + 2\Omega\mu$ で定めるとき,

$$\psi(\lambda, \mu, t) = \bar{\psi}(\mu) + \psi'(\lambda, \mu, t)$$

として作られる線形化方程式は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\omega}(\mu) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \nabla^2 \psi' + \frac{1}{a^2} \frac{d\bar{q}}{d\mu} \frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = 0$$

$$\text{ここに, } \bar{\omega}(\mu) = -\frac{1}{a^2} \frac{d\bar{\psi}}{d\mu}$$

波動解: $\psi'(\lambda, \mu, t) = \mathbf{Re}(\Psi(\mu)e^{im(\lambda-ct)})$

を仮定して線形化方程式に代入して整理すると,

$$\left[\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \right\} - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] \Psi = \frac{d\bar{q}/d\mu}{c - \bar{\omega}} \Psi$$

両辺に Ψ の複素共役 Ψ^* を掛けて μ について積分すると,

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^1 \left\{ (1 - \mu^2) \left| \frac{d\Psi}{d\mu} \right|^2 + \frac{m^2}{1 - \mu^2} |\Psi|^2 \right\} d\mu \\ = \int_{-1}^1 \frac{d\bar{q}/d\mu}{|c - \bar{\omega}|^2} (c^* - \bar{\omega}) |\Psi|^2 d\mu \end{aligned}$$

両辺の虚部をとると,

$$0 = \mathbf{Im}(c) \int_{-1}^1 \frac{d\bar{q}/d\mu}{|c - \bar{\omega}|^2} |\Psi|^2 d\mu$$

従って, 帯状流が不安定となる必要条件是,

「 $-1 < \mu < 1$ の間で $d\bar{q}/d\mu$ が符号を変える. すなわち $\bar{q}(\mu)$ の分布が単調でない」ことになる.

→ Rayleighの定理(1880)の球面への拡張

非線形時間発展の例

球面上の順圧不安定な帯状流プロファイル(tanh型ジェット: 後述)に初期擾乱を与えた場からの時間発展. 絶対渦度場を表示. 高階粘性項を入れている. 切断波数は $T170$.

Shepherd(1988, J.F.M.)の上限値

Arnold(1966)の非線形安定性理論を応用, full非線形な方程式に対する“rigorous”な上限値の計算法を与えた.

理論の準備 (系の保存量)

Casimir不変量: $C_f = [\overline{f(q)}]$

$f(q)$: q の任意関数, q : 絶対渦度

全角運動量: $D = [\mu\bar{q}]$

全運動エネルギー: $E = [-\frac{1}{2}\overline{\psi\zeta}]$

$\zeta = \nabla^2\psi$: 渦度

\bar{A} : 経度平均, $[A]$: 緯度平均

問題設定

初期状態: 「 $q = \bar{q}_0(\mu)$ (不安定な平行流) + 無限小擾乱」からの時間発展で波成分エンストロフィー F_w がどこまで大きくなりうるか (上限値) を考える.

$F = [\frac{1}{2}\overline{q^2}]$: 全エンストロフィー (Casimir 不変量の一つ)

$F_z = [\frac{1}{2}\overline{\bar{q}^2}]$: 帯状成分エンストロフィー

$F_w = [\frac{1}{2}\overline{q'^2}]$: 波成分エンストロフィー

$$q' \equiv q - \bar{q}, \quad F = F_z + F_w$$

一般化 Rayleigh 定理 (Arnold, 1966)

基本場の帯状流の絶対渦度分布 $Q(\mu)$ が μ に対して単調で連続 (すなわち, Rayleigh の定理により線形安定) ならば, 以下の不等式が成立する.

$$\left\langle \frac{1}{2}(q - Q)^2 \right\rangle_{(t=t)} \leq \frac{\max |Q_\mu|}{\min |Q_\mu|} \left\langle \frac{1}{2}(q - Q)^2 \right\rangle_{(t=0)}$$

ここに, $\langle A \rangle = [\overline{A}]$ (全球平均).

証明の概略

$Q(\mu)$ が単調との仮定より, まず単調増大の場合を考える. $Y(\eta)$ を $Q(\mu)$ の逆関数として,

$$\begin{aligned} A(Q, q) &= \int_Q^q \{Y(\eta) - Y(Q)\} d\eta \\ &= \int_0^q \{Y(\eta) - Y(Q)\} d\eta - \int_0^Q \{Y(\eta) - Y(Q)\} d\eta \\ &= \int_0^q Y(\eta) d\eta - \mu q - \int_0^Q \{Y(\eta) - Y(Q)\} d\eta \end{aligned}$$

と定義すれば, $\langle A(Q, q) \rangle$ は, ある Casimir 不変量と全角運動量 D の結合になっているのでやはり保存量.

平均値の定理を用いて,

$$\min(Y_\eta) \frac{1}{2} (q - Q)^2 \leq A(Q, q) \leq \max(Y_\eta) \frac{1}{2} (q - Q)^2$$

さらに,

$$\min(Y_\eta) = 1 / \max(Q_\mu), \quad \max(Y_\eta) = 1 / \min(Q_\mu)$$

を用いれば,

$$\frac{1}{\max(Q_\mu)} \frac{1}{2} (q - Q)^2 \leq A(Q, q) \leq \frac{1}{\min(Q_\mu)} \frac{1}{2} (q - Q)^2$$

この不等式の各項を全球平均し, $\langle A \rangle$ が保存することに注意すれば,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\max(Q_\mu)} \left\langle \frac{1}{2} (q - Q)^2 \right\rangle_{(t=t)} &\leq \langle A(Q, q) \rangle_{(t=t)} \\ &= \langle A(Q, q) \rangle_{(t=0)} \\ &\leq \frac{1}{\min(Q_\mu)} \left\langle \frac{1}{2} (q - Q)^2 \right\rangle_{(t=0)} \end{aligned}$$

よって, $Q(\mu)$ が単調減少な場合も含めてまとめると,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}(q - Q)^2 \right\rangle_{(t=t)} &\leq \max |Q_\mu| \langle A(Q, q) \rangle_{(t=0)} \\ &\leq \frac{\max |Q_\mu|}{\min |Q_\mu|} \left\langle \frac{1}{2}(q - Q)^2 \right\rangle_{(t=0)} \end{aligned}$$

この最左辺と最右辺より一般化 Rayleigh の定理を得る.

Shepherd の上限値

一般化 Rayleigh の定理において $q = \bar{q}(\mu, t) + q'(\lambda, \mu, t)$ とすれば,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} (\bar{q} - Q)^2 \right\rangle_{(t=t)} \\ \leq \frac{\max |Q_\mu|}{\min |Q_\mu|} \left\langle \frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} (\bar{q} - Q)^2 \right\rangle_{(t=0)} \end{aligned}$$

波成分エンストロフィーに着目し, 初期擾乱を無限小とすれば,

$$F_w(t=t) = \left\langle \frac{1}{2} q'^2 \right\rangle_{(t=t)} \leq \frac{\max |Q_\mu|}{\min |Q_\mu|} \left\langle \frac{1}{2} (\bar{q}_0 - Q)^2 \right\rangle$$

与えられた初期の不安定な帯状分布 $\bar{q}_0(\mu)$ に対して, 任意の単調な $Q(\mu)$ の関数形を変分法的に変えて最右辺の最小値を求めてやれば, それが F_w に対するある上限値を与える。

Shepherdの上限値 (original): F_1

$$F_1 = \text{Min} \left(\frac{\max |Q_\mu|}{\min |Q_\mu|} \left\langle \frac{1}{2} (\bar{q}_0 - Q)^2 \right\rangle \right)$$

ここで、Minは任意の単調な $Q(\mu)$ をとったときの変分法的最小を表す。
ちなみに、簡単に $Q(\mu) = \alpha\mu$ として α を動かして得られる最小値は、

$$F_0 = \left\langle \frac{1}{2} \bar{q}_0^2 \right\rangle - \frac{3}{2} \langle \mu q_0 \rangle^2 = F - \frac{3}{2} D^2$$

で与えられる。(これを自明な上限値と呼ぶことにする)。

Shepherdの上限値 (revized): F_2

一般化Rayleighの定理の証明に用いた不等式を眺めると, F_1 より tight な上限が以下のように得られる.

$$F_2 = \text{Min} (\max |Q_\mu| \langle A(Q, \bar{q}_0) \rangle)$$

ここで, Min はやはり任意の単調な $Q(\mu)$ をとったときの変分法的最小を表す. もちろん,

$$F_w \leq F_2 \leq F_1 \leq F_0 \leq F$$

である.

取り扱った帯状流の構造 (Hartmann, 1983, J.A.S.)

冬期成層圏極域の風分布を模式的に表したものの。

tanh型ジェット: $\bar{u}_0(\phi) = U \cos \phi \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{\phi - \phi_0}{B} \right)$

(主に中緯度域で不安定)

sech型ジェット: $\bar{u}_0(\phi) = U \cos \phi \cdot \operatorname{sech} \frac{2(\phi - \phi_0)}{B}$

(主に極域で不安定)

(U, B, ϕ_0) = ジェットの(強さ, 幅, 中心緯度)を決めるパラメター. $\bar{u}_0(\phi)$

と $\bar{q}_0(\mu)$ との対応は,

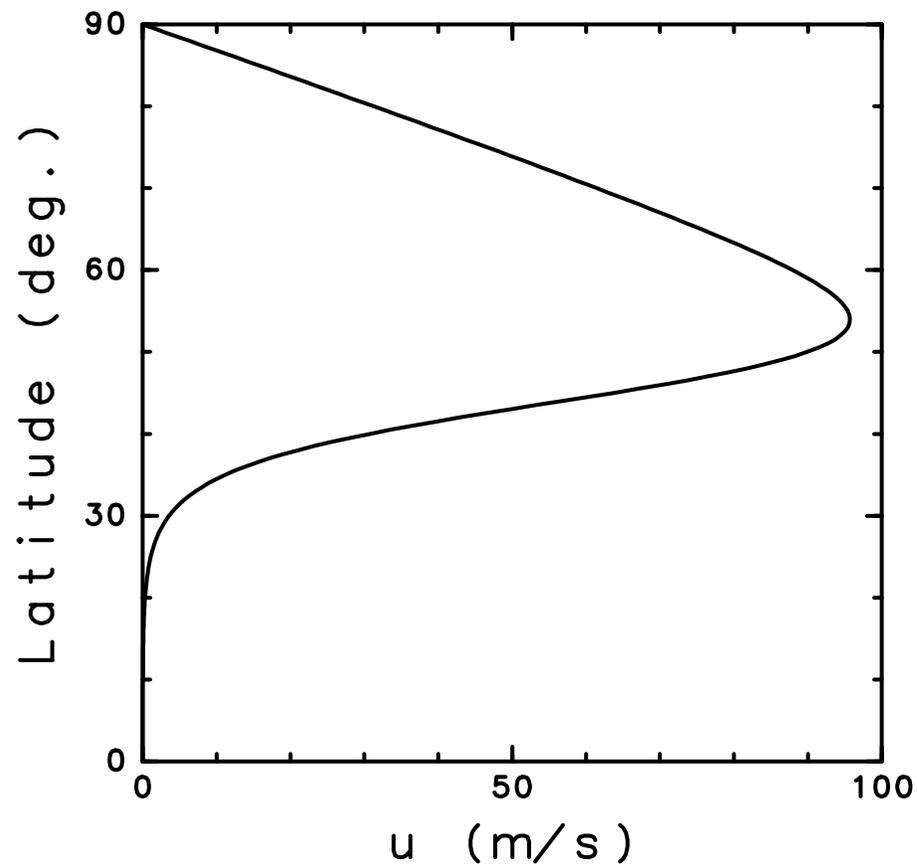
$$\bar{q}_0(\sin \phi) = -\frac{d(\cos \phi \bar{u}_0(\phi))}{a \cos \phi d\phi} + 2\Omega \sin \phi$$

で与えられる.

tanh型ジェット

$$U = 180\text{m/s},$$

$$\phi_0 = 45^\circ, B = 8^\circ$$

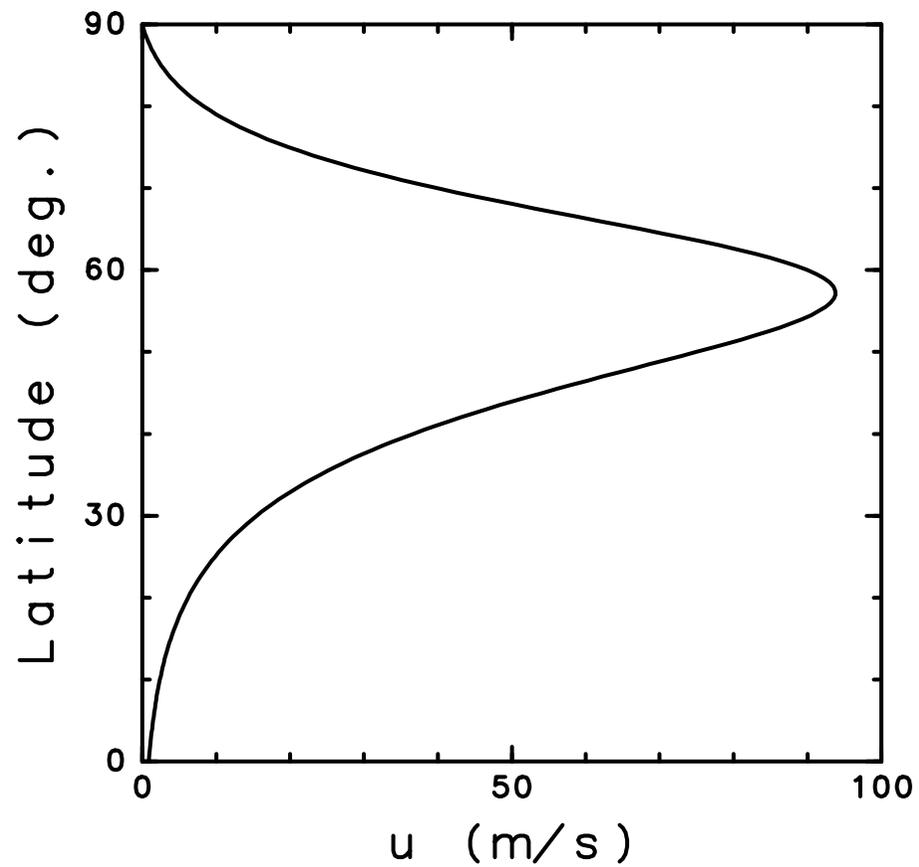


(中緯度域で不安定)

sech型ジェット

$$U = 180\text{m/s},$$

$$\phi_0 = 60^\circ, B = 20^\circ$$

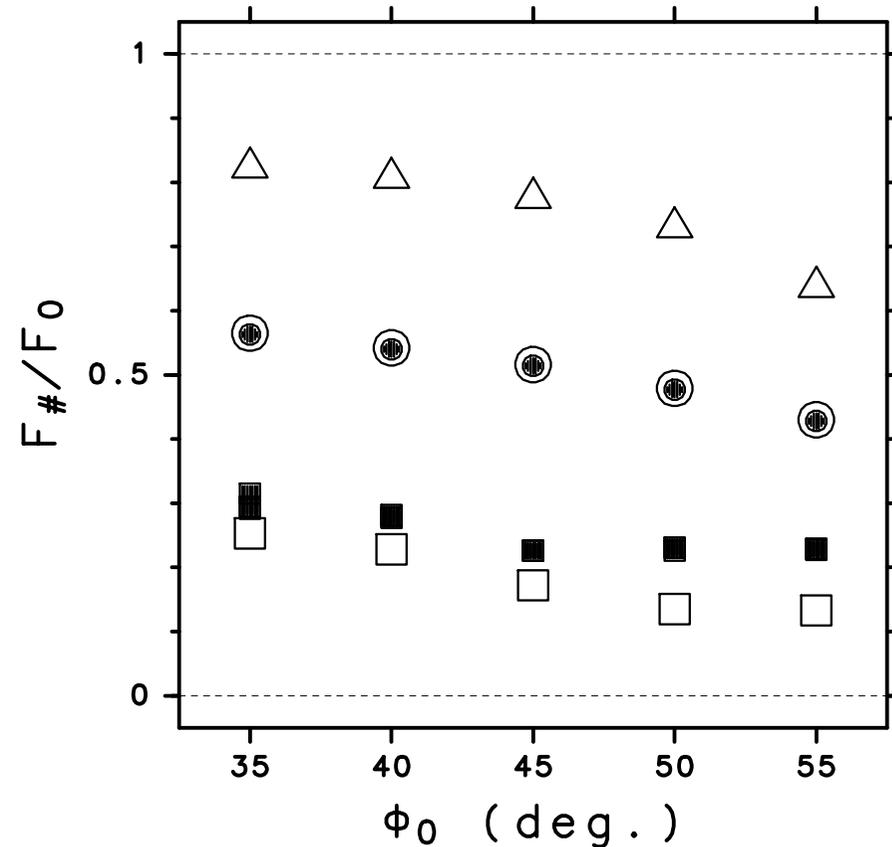


(極域で不安定)

結果 (上限値の比較)

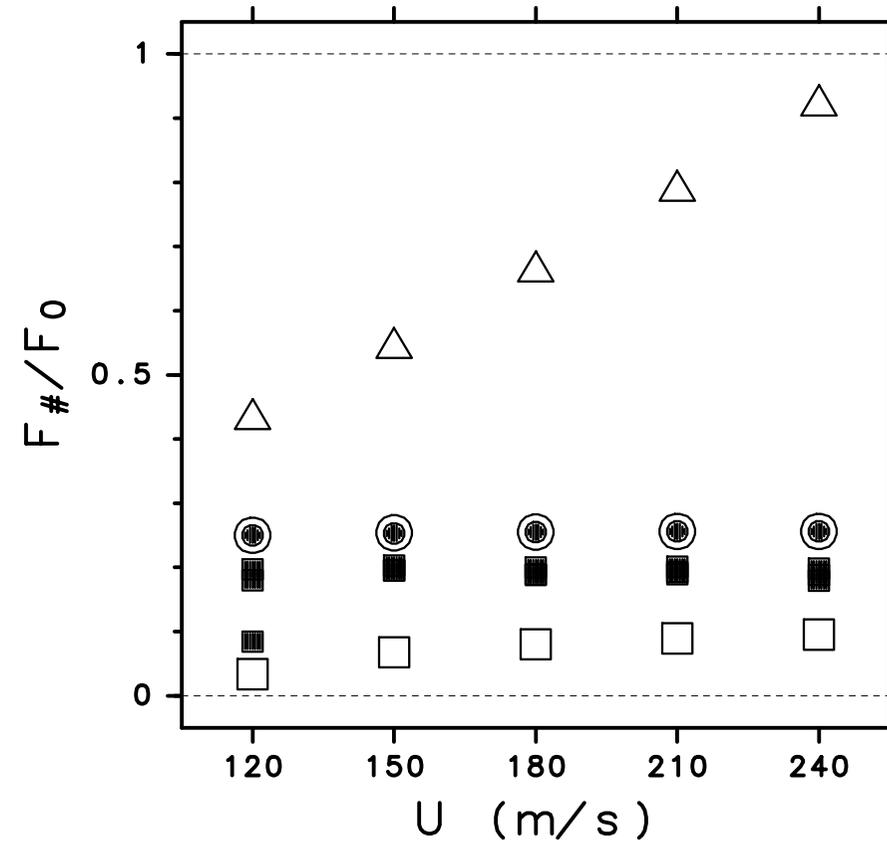
tanh型ジェット

$$U = 180\text{m/s}, B = 8^\circ$$



sech型ジェット

$$\phi_0 = 60^\circ, B = 20^\circ$$



: Shepherdの上限値 (オリジナル) (F_1)

: Shepherdの上限値 (改良版) (F_2)

: 数値実験における $(F_w)_{\max}$ (通常粘性)

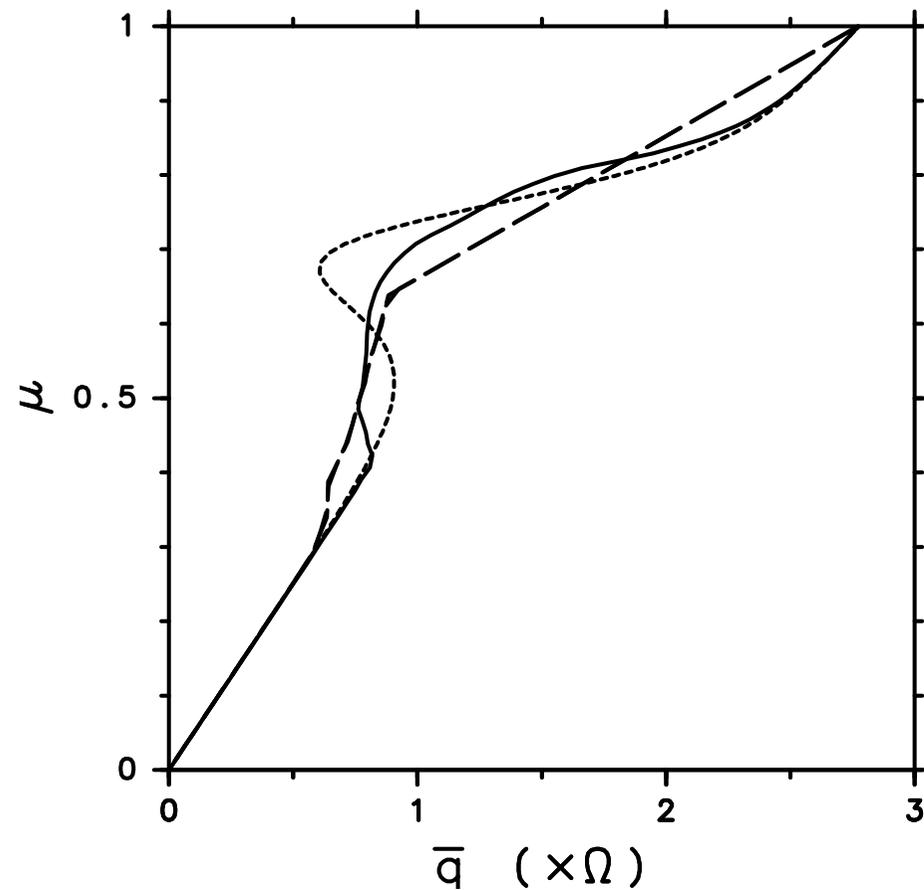
: 数値実験における $(F_w)_{\max}$ (高階粘性)

結果 (絶対渦度分布の比較)

tanh型ジェット

$$U = 180\text{m/s},$$

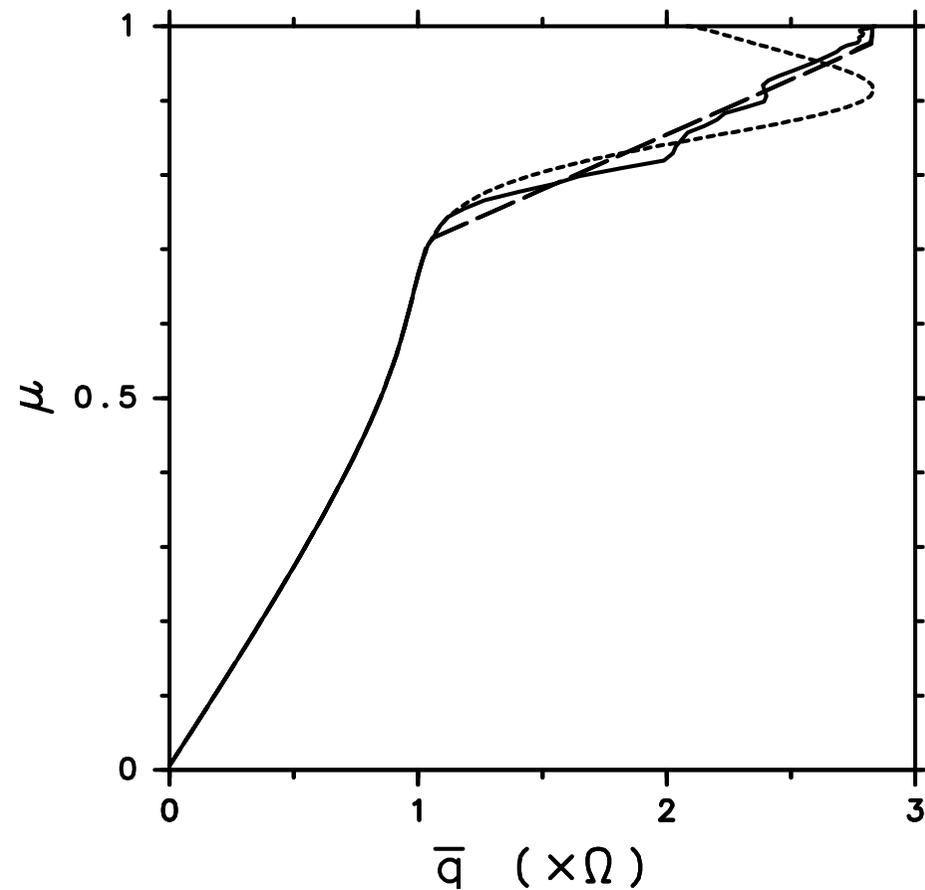
$$\phi_0 = 45^\circ, B = 8^\circ$$



sech型ジェット

$$U = 180\text{m/s},$$

$$\phi_0 = 60^\circ, B = 20^\circ$$



点線: 初期の絶対渦度分布 $\bar{q}_0(\mu)$

破線: F_2 を与える $Q(\mu)$ 分布

実線: $(F_w)_{\max}$ に対応する $\bar{q}(\mu)$ 分布

Shepherdの上限値(オリジナルも改良版も)は D およびある一つの「最適な」 C_f の保存を束縛条件として得られている。

では、 D および「すべての」 C_f の保存を束縛条件として与えたらより tight な上限値が得られるはず。

すべての C_f が保存されるには、実現される絶対渦度分布 $q(\lambda, \mu)$ が初期の絶対渦度分布 $\bar{q}_0(\mu)$ の並べ替えにならない。

全球を M 個の帯状領域に離散化して考えれば、並べ替えは変数 r_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, M$) によって記述できる。

r_{ij} : 流体の移動量 (i 番目の帯 \rightarrow j 番目の帯)

i 番目の帯の面積を w_i とすれば、 r_{ij} に対する拘束条件は

$$\sum_{i=1}^M r_{ij} = w_j \quad (j = 1, 2, \dots, M),$$

$$\sum_{j=1}^M r_{ij} = w_i \quad (i = 1, 2, \dots, M),$$

$$r_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, M).$$

j 番目の帯における絶対渦度の平均 \bar{q}_j は

$$\bar{q}_j = \frac{1}{w_j} \sum_{i=1}^M q_i r_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, M).$$

ここに, $q_i = \bar{q}_0(\mu_i)$; μ_i は i 番目の帯の中心の μ 座標. \bar{q}_j を使うと, D および F_z は以下のように表せる.

$$D = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j \mu_j \bar{q}_j,$$

$$F_z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j \frac{1}{2} (\bar{q}_j)^2.$$

$F_w = F - F_z$ で、 F は保存量であるから、 D および「すべての」 C_f の保存の束縛条件のもとでの F_w のとりうる上限値を求めるには、

「 r_{ij} に対する制約条件のもとで F_w を最大化せよ」

という(M^2 個の変数 r_{ij} に関する2次計画問題)が解ければよいということになる。こうして得られる上限値を直接上限値 F_3 と呼ぶことにする。

M が十分大きければ、

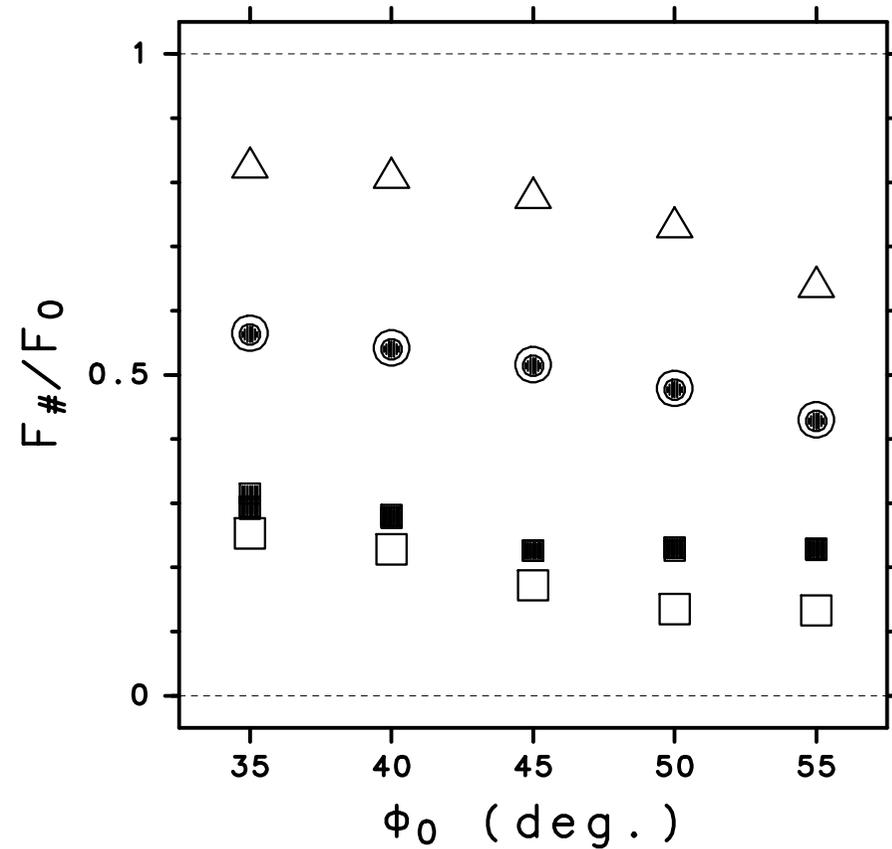
$$F_w \leq F_3 \leq F_2 \leq F_1 \leq F_0 \leq F$$

なはずである。

結果 (上限値の比較)

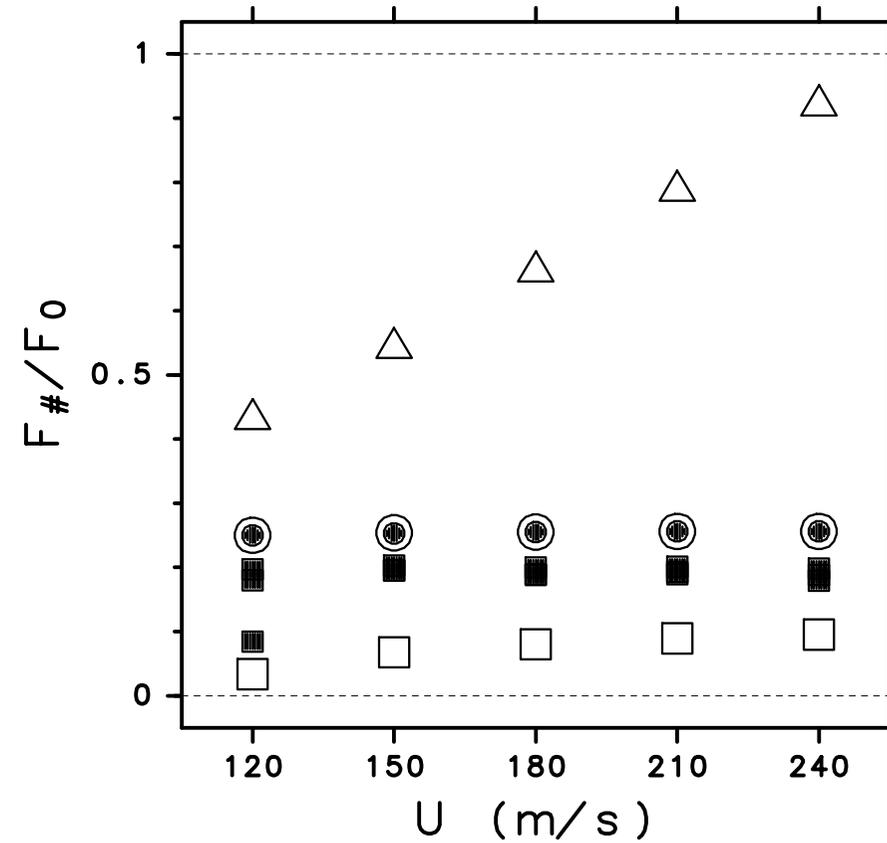
tanh型ジェット

$$U = 180\text{m/s}, B = 8^\circ$$



sech型ジェット

$$\phi_0 = 60^\circ, B = 20^\circ$$



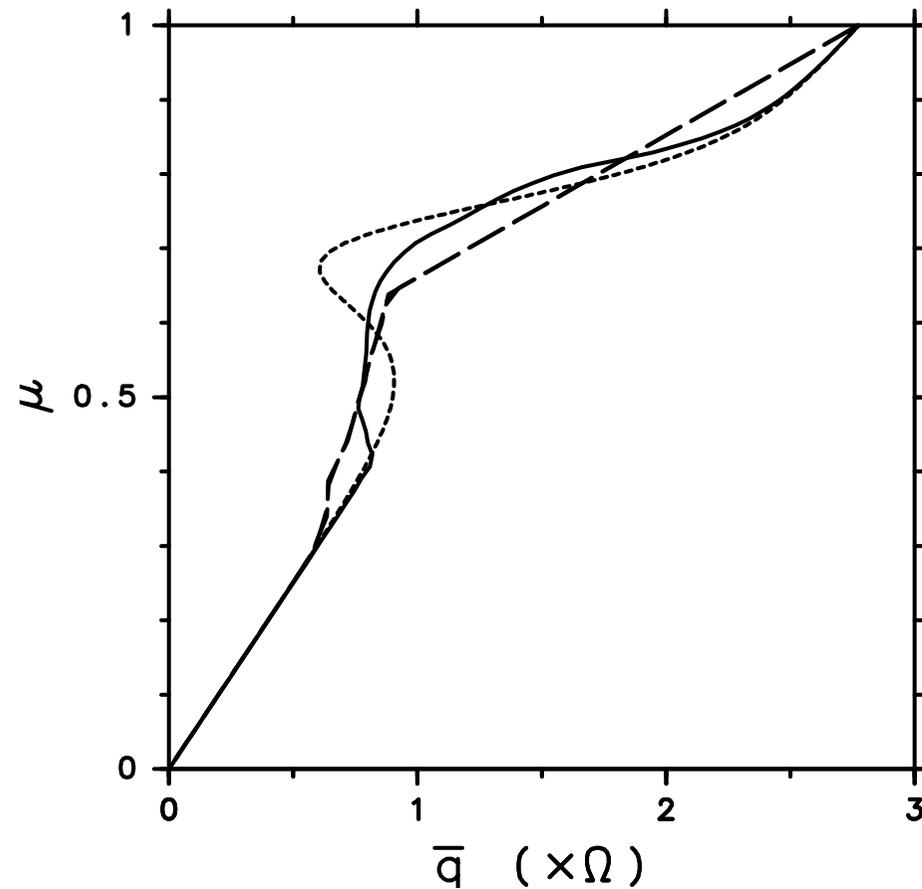
- : **Shepherdの上限値(改良版) (F_2)**
- : **直接上限値 (F_3)**
- : **数値実験における $(F_w)_{\max}$ (通常粘性)**
- : **数値実験における $(F_w)_{\max}$ (高階粘性)**

結果 (絶対渦度分布の比較)

tanh型ジェット

$$U = 180\text{m/s},$$

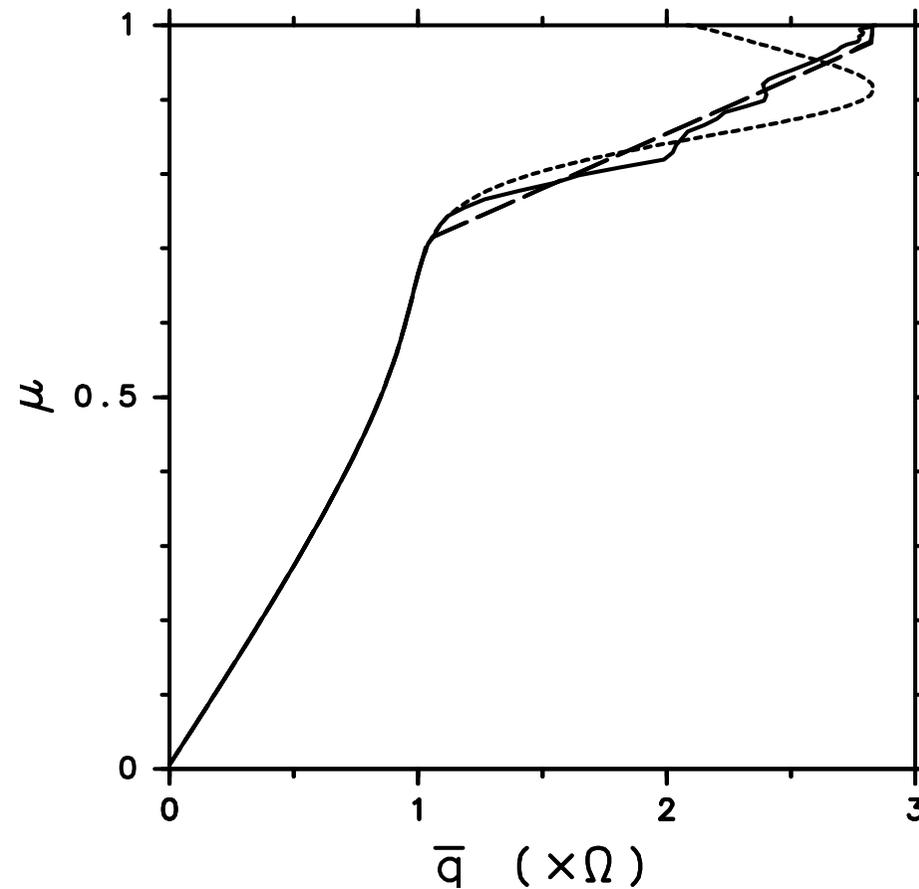
$$\phi_0 = 45^\circ, B = 8^\circ$$



sech型ジェット

$$U = 180\text{m/s},$$

$$\phi_0 = 60^\circ, B = 20^\circ$$



点線: 初期の絶対渦度分布 $\bar{q}_0(\mu)$

破線: F_2 を与える $Q(\mu)$ 分布および F_3 を与える \bar{q}_j 分布

実線: $(F_w)_{\max}$ に対応する $\bar{q}(\mu)$ 分布

数値計算の結果得られた予想(石岡の予想?)

改良された Shepherd の上限値 (F_2) と直接上限値 (F_3) は必ず同じ値を与える? → 未解決問題だった.

ここまでの話に興味のある方は, **K. Ishioka and S. Yoden (1996):**
Journal of the Meteorological Society of Japan, **74**, 167–174.
を参照されたい.

予想の解決について

証明の詳細は略す(別紙資料参照)が、以下の手順によって F_3 に対応する $\bar{q}(\mu)$ 分布が作れて、 $Q(\mu)$ をその $\bar{q}(\mu)$ と同一のものとして与えると $F_3 = F_2$ となることが証明できる。

手順:

1. 与えられた $\bar{q}_0(\mu)$ 分布をソーティングする。
2. 勾配 $d\bar{q}/d\mu$ が大きいところから順に気塊の交換を行って行って勾配の最大値を減じていく。
3. 全絶対角運量 D の値が与えられた値になったところで終了。

なぜ $d\bar{q}/d\mu$ が大きいところから q の交換を行うのか？

2箇所の帯状領域 $\mu_a < \mu_b$ において，帯状平均絶対渦度がそれぞれ $\bar{q}_a < \bar{q}_b$ であったとする． この2箇所の帯状領域で気塊交換が行われて， μ_a の帯状領域での平均絶対渦度が $\bar{q}_a + \delta q$ に， μ_b の帯状領域での平均絶対渦度が $\bar{q}_b - \delta q$ に，それぞれなったとする ($\delta q > 0$ とする)． この気塊交換による D の増分 δD は，

$$\delta D = -\frac{1}{M}(\mu_b - \mu_a)\delta q < 0$$

である． また，帯状エンストロフィー F_z の増分 δF_z は，

$$\begin{aligned} \delta F_z &= \frac{1}{2M} \left\{ (\bar{q}_a + \delta q)^2 + (\bar{q}_b - \delta q)^2 - \bar{q}_a^2 - \bar{q}_b^2 \right\} \\ &= \frac{1}{M} \left\{ -(\bar{q}_b - \bar{q}_a)\delta q + (\delta q)^2 \right\} \\ &\approx -\frac{1}{M}(\bar{q}_b - \bar{q}_a)\delta q < 0, \end{aligned}$$

となる。以上から、

$$\frac{\delta F_z}{\delta D} \approx \frac{\bar{q}_b - \bar{q}_a}{\mu_b - \mu_a}$$

を得るが、右辺は2点 (μ_a, \bar{q}_a) と (μ_b, \bar{q}_b) を結ぶ直線の傾きの勾配である。従って、気塊交換によって D を減少させていくとき、できるだけ F_z を減少させるためには、帯状平均絶対渦度の勾配が大きな区間から気塊交換をしていけば良いことになる。

この手順は、いわゆる「焼きなまし」に類似していることに気がつく。焼きなましは、金属加工などにおいて、金属の温度を一旦上げてから徐々に冷却することによって、元の状態よりも自由エネルギーの小さな結晶状態にすることを指す用語である。今の手順の場合、全角運動量 D を温度、帯状成分エンストロフィー F_z を自由エネルギーと読み換えれば類似性は明らかであろう。