

<https://www.gfd-dennou.org/seminars/gfdsemi/>

2013年夏の地球流体セミナー@休暇村支笏湖

Lecture note for the 2013 Summer Seminar in Geophysical Fluid Dynamics

## 海洋の傾圧渦や風波に対する Lagrange 平均理論の発展

Development of Lagrangean mean theories for baroclinic eddies and wind waves in the ocean

相木 秀則

Hidenori Aiki

海洋研究開発機構

Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology

<http://www.jamstec.go.jp/frcgc/research/d1/aiki/>

2013年8月20-21日

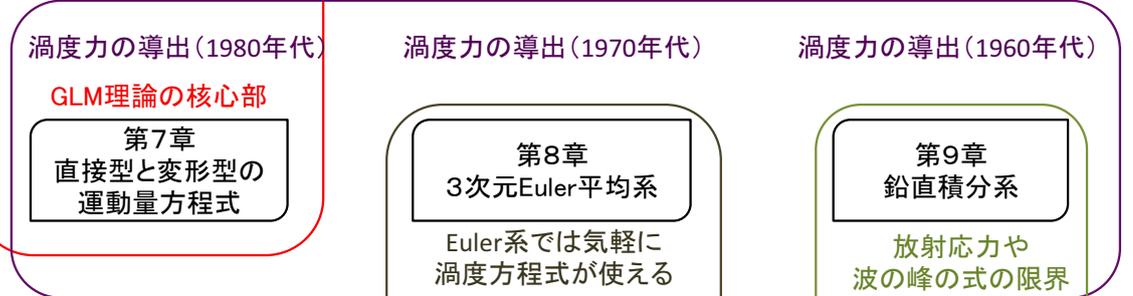
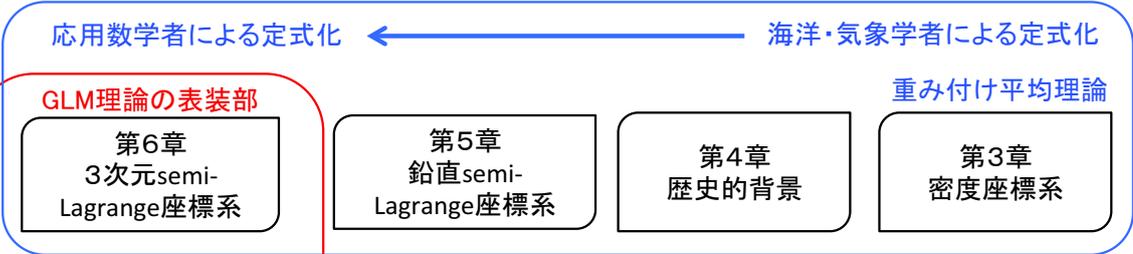
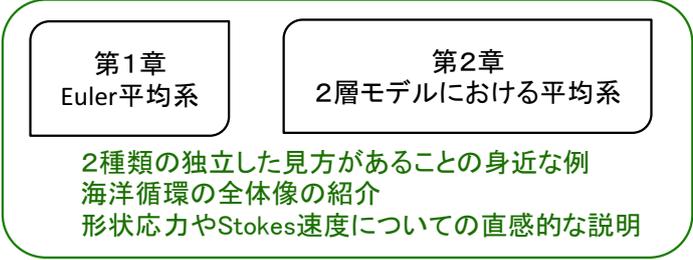
August 21-22, 2013

## 謝辞

2日間のセミナーでは多数の参加者から有益な意見や質疑を頂くことができました。それを参考に当日使ったテキストを修正したのが本書になります。今回の話題提供の場を設けてくださいました林祥介教授、竹広真一准教授ならびに運営委員の皆様にご感謝いたします。本テキストに関する一連の研究は山形俊男名誉教授、Richard J. Greatbatch 教授、佐久間弘文さん、高谷康太郎さん、田村仁さんをはじめとする色々な方との交流を通して発展しました。乙部直人さん、古恵亮さんには編集上の助言を頂きました。

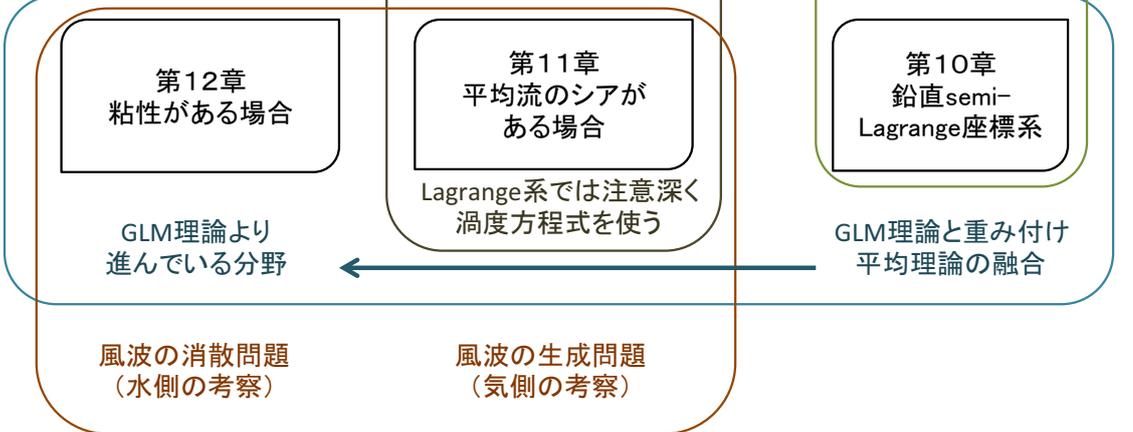
2013年9月3日

相木秀則



本講義の大局観の解説

- 直接型の運動量方程式(予報変数はLagrange平均速度)
- 変形型の運動量方程式(予報変数はLagrange平均速度マイナスLagrange疑運動量)



# 目次

<b>第 I 部 傾圧渦</b>	<b>8</b>
<b>第 1 章 Euler 平均系</b>	<b>9</b>
1.1 3次元 Euler 座標系におけるプリミティブ方程式	9
1.2 平均場の位置エネルギー (従来の研究)	10
1.3 平均場の位置エネルギー (本講義)	11
1.4 Lorenz のエネルギーダイアグラムの完全版 (AZG13)	12
1.5 海洋大循環の主要な力学過程	14
1.6 まとめ	15
<b>第 2 章 2 層モデルにおける平均系</b>	<b>16</b>
2.1 従来のエネルギー方程式 (Holland and Lin, 1975)	16
2.2 重み付け平均を用いた運動エネルギーの分離 (Bleck, 1985)	17
2.3 擾乱の残差によるオーバーターニング循環	18
2.4 Montgomery ポテンシャル	18
2.5 形状応力: 砕波によらない運動量混合	20
2.6 2 層モデルのエネルギーダイアグラムの完全版 (AZG13)	21
2.7 まとめ	22
<b>第 3 章 密度座標系</b>	<b>24</b>
3.1 偏微分の連鎖律	24
3.2 パッシブトレーサーの保存式	25
3.3 等密度面の深さの時間平均	27
3.4 積み重ね則 (AY06)	29
3.5 重み付け平均された運動量の式	30
3.6 まとめ	31
<b>第 4 章 歴史的背景</b>	<b>32</b>
4.1 ボーラス速度の欠点と準 Stokes 速度の利点	33
4.2 Euler 平均速度を予報変数とする系	34
4.3 全輸送速度を予報変数とする系	36
4.4 Ertel の渦位の重み付け平均	36
4.5 新しい渦位 (Young, 2012)	39
4.6 まとめ	40

<b>第 5 章</b>	<b>鉛直 semi-Lagrange 座標系</b>	<b>41</b>
5.1	ラベリングの妙	41
5.2	仕様と制約	43
5.3	パッシブトレーサーの保存式	44
5.4	重み付け平均された運動量の式	45
5.5	積み重ね則	46
5.6	Euler 平均量の Taylor 近似	47
5.7	まとめ	48
5.8	追記	49
<b>第 6 章</b>	<b>3次元 semi-Lagrange 座標系</b>	<b>50</b>
6.1	物質微分演算子の天下りの導入 (AM78a)	51
6.2	圧力勾配項	52
6.3	運動量の式	53
6.4	行列式	54
6.5	一般化疑エネルギー (AM78b)	54
6.6	まとめ	56
<b>第 II 部</b>	<b>風波</b>	<b>58</b>
<b>第 7 章</b>	<b>直接型と変形型の運動量方程式</b>	<b>59</b>
7.1	渦度力	59
7.2	3次元 Lagrange 座標系 (Lagrange, 1788)	60
7.3	変形型の式と一般化疑運動量 (AM78a)	63
7.4	渦度力の導出	65
7.5	まとめ	66
<b>第 8 章</b>	<b>3次元 Euler 平均系</b>	<b>70</b>
8.1	漸近展開	70
8.2	Langmuir 循環のスケーリング	70
8.3	渦度を持つ波	72
8.4	渦度力を用いた平均流方程式	73
8.5	Coriolis-Stokes 力	74
8.6	まとめ	75
8.7	追記	75
<b>第 9 章</b>	<b>鉛直積分系</b>	<b>78</b>
9.1	水深積分された運動量方程式 (直接型)	79
9.2	波のエネルギーの収支式	80
9.3	波の作用の保存式	82
9.4	水深積分された運動量方程式 (変形型)	84
9.5	まとめ	85
9.6	厳密な漸近展開による確認	85

<b>第 10 章 鉛直 semi-Lagrange 座標系</b>	<b>89</b>
10.1 支配方程式 (AG12)	90
10.2 直接型の運動方程式 (AG12)	91
10.3 変形型の運動方程式 (AG13b)	93
10.4 各種平均量の比較	94
10.5 薄い粘性境界層	94
10.6 まとめ	96
<b>第 11 章 平均流のシアがある場合</b>	<b>98</b>
11.1 鉛直シアを持つ風に関する渦度方程式	98
11.2 疑運動量と Kelvin の循環	100
11.3 Taylor (1915) の恒等式	102
11.4 風波の気側のエネルギー収支	103
11.5 まとめ	104
<b>第 12 章 粘性がある場合</b>	<b>105</b>
12.1 風波の水側のエネルギー収支	105
12.2 直接型の運動量方程式の粘性項 (AG12)	106
12.3 変形型の運動量方程式の粘性項 (AG13b)	107
12.4 まとめ	109
12.5 追記 (Pierson, 1962)	110

表 1: 本講義で使う数式記号.  $A$  は任意の物理量.

$\mathbf{U} \equiv (u, v, w)$	3次元速度
$\mathbf{V} \equiv (u, v)$	水平速度
$w$	鉛直速度
$(x^\epsilon, y^\epsilon, z^\epsilon, t^\epsilon)$	3次元 Euler 座標系 (深さ座標系)
$\nabla^\epsilon \equiv (\partial_{x^\epsilon}, \partial_{y^\epsilon})$	3次元 Euler 座標系における水平微分 ( $\nabla^\epsilon z^\epsilon = 0$ )
$\nabla^\epsilon \equiv (\partial_{x^\epsilon}, \partial_{y^\epsilon}, \partial_{z^\epsilon})$	3次元 Euler 座標系における空間微分 $\nabla^\epsilon \equiv (\nabla^\epsilon, \partial_{z^\epsilon})$
$\mathcal{D}_t^\epsilon \equiv \partial_{t^\epsilon} + \mathbf{V} \cdot \nabla^\epsilon + w \partial_{z^\epsilon}$	3次元 Euler 座標系における物質微分 ( $\mathcal{D}_t^\epsilon z^\epsilon = w$ )
$\overline{A}^\epsilon$	3次元 Euler 座標系における時間平均 (Euler 平均)
$A' \equiv A - \overline{A}^\epsilon$	Euler 平均からのずれ ( $z^\epsilon$ を固定して比較)
$(x, y, \rho, t)$	密度座標系 ( $\tilde{z} \equiv z^{\epsilon^0}, z^\epsilon = \tilde{z} + z^{\epsilon''}$ )
$\nabla \equiv (\partial_x, \partial_y)$	密度座標系における等密度面微分 ( $\nabla \rho = 0, \nabla = \nabla^\epsilon + (\nabla z^\epsilon) \partial_{z^\epsilon}$ )
$\mathcal{D}_t \equiv \partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + m \partial_\rho$	密度座標系における物質微分 ( $\mathcal{D}_t z^\epsilon = w, \mathcal{D}_t \rho = m$ )
$\hat{A} \equiv z_\rho^\epsilon \overline{A^0} / \tilde{z}_\rho$	密度座標系における重み付け時間平均
$A'' \equiv A - \hat{A}$	重み付け平均からのずれ ( $\rho$ を固定して比較, $z_\rho^\epsilon A''^0 \equiv 0$ )
$\overline{A}^0 = \hat{A}$	密度座標系における重みなし時間平均
$A''' \equiv A - \overline{A}^0$	重みなし平均からのずれ ( $\rho$ を固定して比較, $\overline{A}'''^0 \equiv 0$ )
$\mathcal{R}\mathcal{S}^A$ for $A = u, v$	Reynolds 応力の発散 $\equiv (1/\tilde{z}_\rho) \nabla \cdot (z_\rho^\epsilon \mathbf{V}'' A''^0)$
$\mathcal{F}\mathcal{S}^V$	形状応力の発散 $\equiv (1/\tilde{z}_\rho) [-(z^{\epsilon''} \nabla p^{\epsilon''})_\rho + \nabla \cdot (z^{\epsilon''} p_\rho^{\epsilon''})]$
$(\hat{\mathbf{V}}, \tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z})$	全輸送速度 $[\nabla \cdot \hat{\mathbf{V}} + \partial_{\tilde{z}}(\tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z}) = 0, \nabla^\epsilon = \nabla - (\nabla \tilde{z}) \partial_{\tilde{z}}$
$\mathbf{V}^B \equiv \hat{\mathbf{V}} - \tilde{\mathbf{V}}$	ボーラス速度の水平成分
$w^B \equiv \tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z} - \tilde{w}$	ボーラス速度の鉛直成分 ( $\nabla^\epsilon \cdot \mathbf{V}^B + \partial_{\tilde{z}} w^B \neq 0$ )
$\mathbf{V}^{qs} \equiv \hat{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{V}}^\epsilon$	準 Stokes 速度の水平成分
$w^{qs} \equiv \tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z} - \overline{w}^\epsilon$	準 Stokes 速度の鉛直成分 ( $\nabla^\epsilon \cdot \mathbf{V}^{qs} + \partial_{\tilde{z}} w^{qs} = 0$ )
$(\hat{\mathbf{V}}, \hat{w})$	重み付け平均速度
$(x, y, z, t)$	鉛直 semi-Lagrange (VL) 座標系 ( $z \equiv z^\epsilon, z^\epsilon = z + z^{\epsilon''}$ )
$\nabla \equiv (\partial_x, \partial_y)$	VL 座標系における横方向微分 ( $\nabla z = 0, \nabla z^\epsilon = \nabla z^{\epsilon''}, \nabla = \nabla^\epsilon + (\nabla z^\epsilon) \partial_{z^\epsilon}$ )
$\mathcal{D}_t \equiv \partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \varpi \partial_z$	VL 座標系における物質微分 ( $\mathcal{D}_t z^\epsilon = w, \mathcal{D}_t z = \varpi$ )
$\hat{A} \equiv z_z^\epsilon \overline{A}$	VL 座標系における重み付け時間平均
$A'' \equiv A - \hat{A}$	重み付け平均からのずれ ( $z$ を固定して比較, $z_z^\epsilon A'' \equiv 0$ )
$\overline{A}$	VL 座標系における重みなし時間平均
$A''' \equiv A - \overline{A}$	重みなし平均からのずれ ( $z$ を固定して比較, $\overline{A}''' \equiv 0$ )
$\mathcal{R}\mathcal{S}^A$ for $A = u, v$ and $w$	Reynolds 応力の発散 $\equiv \nabla \cdot (z_z^\epsilon \mathbf{V}'' A'') + (z_z^\epsilon \varpi'' A'')_z$
$\mathcal{F}\mathcal{S}^V$	形状応力の発散 $\equiv -(z^{\epsilon''} \nabla p^{\epsilon''})_z + \nabla \cdot (z^{\epsilon''} p_z^{\epsilon''})$
$(\hat{\mathbf{V}}, \hat{\varpi})$	全輸送速度 ( $\nabla \cdot \hat{\mathbf{V}} + \hat{\varpi}_z = 0$ )
$(\mathbf{V}^{qs}, w^{qs}) \equiv (\hat{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{V}}^\epsilon, \hat{\varpi} - \overline{\varpi}^\epsilon)$	準 Stokes 速度 ( $\nabla \cdot \mathbf{V}^{qs} + w_z^{qs} = 0$ )
$(\hat{\mathbf{V}}, \hat{w})$	重み付け平均速度
$(x_1, x_2, x_3, t)$	3次元 semi-Lagrange 座標系 (Andrews and McIntyre, 1978)
$(\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, t^\epsilon)$	3次元 Euler 座標系
$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv (\Xi_1 - x_1, \Xi_2 - x_2, \Xi_3 - x_3)$	3次元変位
$(u_1, u_2, u_3)$	3次元速度
$(u_1^{gp}, u_2^{gp}, u_3^{gp})$	一般化 (generalized Lagrangian) 疑運動量
$A^\xi = A^\xi(x_1, x_2, x_3, t) = A(\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, t^\epsilon)$	肩字 $\xi$ の有無によって Lagrange 座標系か Euler 座標系かを区別する
$A^l = A^\xi - \overline{A}^L$	3次元 semi-Lagrange 平均からのずれ ( $x_i$ を固定して比較)
$\overline{A}^L$	3次元 semi-Lagrange 平均
$(a, b, c, t)$	3次元 Lagrange 座標系 (Lagrange, 1788; Pierson, 1962)
$\overline{A}^L$	3次元 Lagrange 平均
$\mathbf{p} \equiv (g/\rho_0) \int_{z^\epsilon} (\rho - \overline{\rho}^{gs}) dz^\epsilon$	静水圧のアンマリ $[\mathbf{p}_{z^\epsilon} = -(g/\rho_0)(\rho - \overline{\rho}^{gs})]$
$p \equiv (g/\rho_0) \int_{z^\epsilon} \rho dz^\epsilon$	静水圧 $[p_{z^\epsilon} = -(g/\rho_0)\rho]$
$\varphi \equiv p + (g\rho/\rho_0)z^\epsilon$	Montgomery ポテンシャル $[\nabla \varphi = \nabla^\epsilon p = \nabla^\epsilon \mathbf{p}, \varphi_\rho = (g/\rho_0)z^\epsilon]$
$p$	非静水圧
$\mathbf{p}(= p + p)$	全圧 (非静水圧と静水圧の和)
$p = \rho \mathbf{p}$	本来の全圧 (Andrews and McIntyre, 1978)

表 2: 第 1 部と第 2 部のそれぞれに特有の仮定や近似.

第 1 部 (傾圧渦)	海面変位なし (鍋蓋近似)、成層あり (静力学)、断熱混合 (等密度面混合)
第 2 部 (風波)	海面変位あり、成層なし (非静力学)、乱流粘性あり

# 第I部

## 傾圧渦

1

2

# 第1章 Euler 平均系

海洋の水深は平均して 4000 m 程度、深さ 500 m に密度躍層が存在しその上を表層と下を深層と呼ぶ。表層の海水の密度は  $1024 \text{ kg/m}^3$  程度、深層の海水の密度は  $1027 \text{ kg/m}^3$  程度である。海洋の大循環は 10 年スケールの風成循環と 1000 年スケールの熱塩循環に分けて考える事ができる。風成循環において風から与えられたエネルギーをカスケードさせる（あるいは消散する）役割を担うのが傾圧渦である。傾圧渦の直径は 10~100 km、高さは 500 m、擾乱の時間スケールは 100 日、Rossby 数は 0.1 程度である。傾圧渦の基本的な挙動は準地衡力学によって説明することができる (Masumoto et al., 2004; Miyazawa et al., 2004, 2009; Tsujino et al., 2010)。

## 1.1 3次元 Euler 座標系におけるプリミティブ方程式

まず Euler 直交座標系を  $(x^\epsilon, y^\epsilon, z^\epsilon, t^\epsilon)$ 、3次元の勾配を  $\nabla^\epsilon \equiv (\partial_{x^\epsilon}, \partial_{y^\epsilon}, \partial_{z^\epsilon})$ 、3次元速度ベクトルを  $\mathbf{U} \equiv (u, v, w)$ 、水平速度ベクトルを  $\mathbf{V} \equiv (u, v)$ 、水平勾配を  $\nabla^\epsilon \equiv (\partial_{x^\epsilon}, \partial_{y^\epsilon})$  と表す。第1部は海洋の成層の擾乱に関する考察を目的としているので、簡単のために海面高度の変位はないとする。これを海洋物理学では鍋蓋 (rigid-lid) 近似と呼ぶ。海面は  $z^\epsilon = 0$  にあり、そこでは  $w = 0$  である。海底地形は  $z^\epsilon = -H_b(x^\epsilon, y^\epsilon)$  にあり任意の形状をとることができる。そこでは法線無流境界条件 ( $w = -\mathbf{V} \cdot \nabla^\epsilon H_b$ ) が成り立つ。海水のポテンシャル密度を  $\rho$ 、その基準となる定数を  $\rho_0$ 、重力加速度を  $g$ 、Coriolis パラメータを  $f$  で表そう。海水の運動は非圧縮・Boussinesq・静水圧近似された運動方程式で記述される。

$$(\partial_{t^\epsilon} + \mathbf{U} \cdot \nabla^\epsilon) \rho = 0, \quad (1.1a)$$

$$\nabla^\epsilon \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1.1b)$$

$$(\partial_{t^\epsilon} + \mathbf{U} \cdot \nabla^\epsilon) \mathbf{V} + f \mathbf{z} \times \mathbf{V} = -\nabla^\epsilon p, \quad (1.1c)$$

$$0 = -\partial_{z^\epsilon} p - (g/\rho_0)(\rho - \bar{\rho}^{\text{gs}}), \quad (1.1d)$$

記号  $\mathbf{z}$  は上向き単位ベクトルである。  $p \equiv (g/\rho_0) \int_{z^\epsilon} (\rho - \bar{\rho}^{\text{gs}}) dz^\epsilon$  は静水圧<sup>\*1.1</sup>で、不定積分となっているのは  $p|_{z^\epsilon=0}$  が海面圧力の水平分布を表すようにするためである。背景密度  $\bar{\rho}^{\text{gs}} = \bar{\rho}^{\text{gs}}(z^\epsilon)$  は鉛直1次元分布だけを持つ。すなわち水平には一様かつ時間的に固定されている。このため  $\bar{\rho}^{\text{gs}}$  は運動量の式 (1.1c) の圧力の水平勾配には影響しない。背景密度  $\bar{\rho}^{\text{gs}}$  の分布を得るには、例えば、海洋全体の流体粒子をその密度に基づいてグローバルにソーティングすればよい。その意味で肩字が  $g_s$  になっている。

式 (1.1a)-(1.1d) は、外力や (3次元乱流や内部重力波の碎波のような微細スケールの) 非断熱混合の効果を省略している。

任意の物理量  $A$  の Euler 時間平均を  $\bar{A}^\epsilon$  と表記する。Euler 平均とは深さ  $z^\epsilon$  を固定した平均の事である。Euler 平均に基づく擾乱を  $A' \equiv A - \bar{A}^\epsilon$  と表記する。この引き算は同じ深さ  $z^\epsilon$  で行う

<sup>\*1.1</sup>本講義では、本来の圧力を海水の基準密度  $\rho_0$  で割った物を圧力と呼ぶ。エネルギーや応力についても同様である。

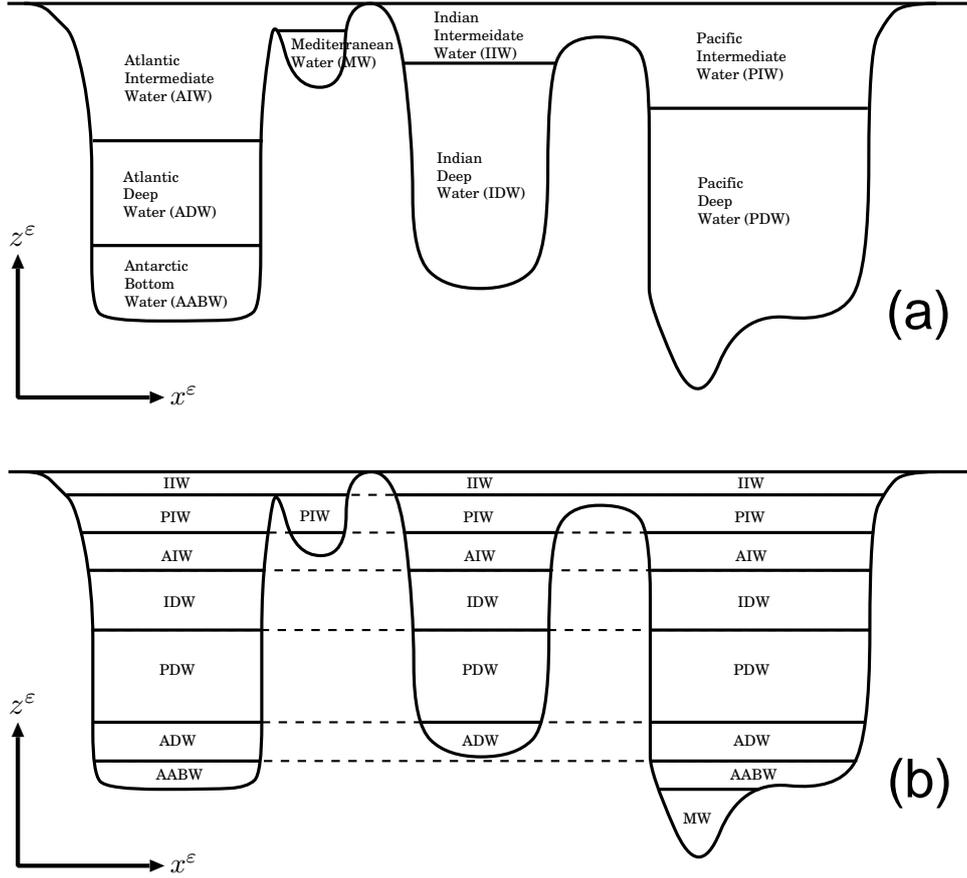


図 1.1: 東西鉛直断面における (a) 大西洋、インド洋、太平洋の海水の分布の模式図と (b) 各水塊の密度に基づいて全球で並べ替えた後の分布。

34 ことに注意しよう。式 (1.1c) に Euler 平均を施すと、

$$35 \quad (\partial_t^\epsilon + \bar{\mathbf{U}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon) \bar{\mathbf{V}}^\epsilon + \nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{U}}^\epsilon \bar{\mathbf{V}}^\epsilon) + f \mathbf{z} \times \bar{\mathbf{V}}^\epsilon = -\nabla^\epsilon \bar{p}^\epsilon, \quad (1.2)$$

36 となる。渦による平均流への寄与は 3 次元の Reynolds 応力項によって表されている<sup>\*1.2</sup>。

## 37 1.2 平均場の位置エネルギー（従来の研究）

38 大気や海洋のような成層流体の分野では、伝統的に有効位置エネルギー (PE) という概念が使わ  
39 れている。海洋全体の有効 PE の算出手順は次のようになる (図 1.1)。

- 40 1 閉じた空間内 (つまり海洋全体) にある全ての流体粒子を重い順に番号付ける。
- 41 2 流体粒子を元の空間の一番底の部分から重い順に満たしていく。
- 42 3 このように並べ替えをして得られた鉛直 1 次元の密度分布を  $\bar{\rho}^{\text{gs}} = \bar{\rho}^{\text{gs}}(z^\epsilon)$  のように書く。

\*1.2  $\nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{U}}^\epsilon \bar{\mathbf{V}}^\epsilon) = \partial_{x^\epsilon} (\bar{u}^\epsilon \bar{v}^\epsilon) + \partial_{y^\epsilon} (\bar{v}^\epsilon \bar{u}^\epsilon) + \partial_{z^\epsilon} (\bar{w}^\epsilon \bar{u}^\epsilon)$ 。

43 4 並べ替えをする前の密度の3次元空間分布を  $\rho = \rho(x^\epsilon, y^\epsilon, z^\epsilon)$  と表すと、有効 PE は

$$44 \quad \frac{g}{2\rho_0} \frac{(\rho - \bar{\rho}^{\text{GS}})^2}{(-\partial_{z^\epsilon} \bar{\rho}^{\text{GS}})} \quad (1.3)$$

45 と定義される。

46 次に有効 PE を大循環（平均流）による成分と渦（擾乱）による成分に分けることを考える。大  
47 気力学では各緯度に沿う帯状平均がよく使われるが、海洋の地形はかなり複雑なので、時間平均を  
48 使うのが海洋物理学のノウハウである。傾圧渦による擾乱を取り出すには、3ヶ月程度の時間ス  
49 ケールで平均すればよい。式 (1.3) に Euler 平均を施すと、有効 PE を平均場による成分と擾乱場  
50 による成分に分離することができる (Böning and Budish, 1993)。

$$51 \quad \frac{g}{2\rho_0} \frac{(\rho - \bar{\rho}^{\text{GS}})^2}{(-\partial_{z^\epsilon} \bar{\rho}^{\text{GS}})} = \underbrace{\frac{g}{2\rho_0} \frac{(\bar{\rho}^\epsilon - \bar{\rho}^{\text{GS}})^2}{(-\partial_{z^\epsilon} \bar{\rho}^{\text{GS}})}}_{\mathbf{A}^{\text{mean}}} + \underbrace{\frac{g}{2\rho_0} \frac{\overline{\rho'^2}}{(-\partial_{z^\epsilon} \bar{\rho}^{\text{GS}})}}_{\mathbf{A}^{\text{eddy}}} \quad (1.4)$$

52 以下、 $\mathbf{A}^{\text{mean}}$  を平均有効 PE、 $\mathbf{A}^{\text{eddy}}$  を擾乱有効 PE と呼ぶ事にする。 $\mathbf{A}^{\text{mean}}$  と  $\mathbf{A}^{\text{eddy}}$  のそれぞれ  
53 に対する時間発展式を考えよう。どうやら一筋縄にはいかないらしく、従来の研究では密度の保存  
54 式 (1.1a) を  $(\partial_{t^\epsilon} + \mathbf{V} \cdot \nabla^\epsilon)\rho + w\partial_{z^\epsilon}\bar{\rho}^{\text{GS}} = 0$  のように単純化したりして対処している。そうすると、

$$56 \quad (\partial_{t^\epsilon} + \overline{\mathbf{V}^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon)\mathbf{A}^{\text{mean}} - \frac{g}{\rho_0 \partial_{z^\epsilon} \bar{\rho}^{\text{GS}}} \nabla^\epsilon \cdot [(\bar{\rho}^\epsilon - \bar{\rho}^{\text{GS}})\overline{\mathbf{V}'\rho'}^\epsilon] = -\frac{\overline{\rho'\mathbf{V}'^\epsilon}}{\partial_{z^\epsilon} \bar{\rho}^{\text{GS}}} \cdot \frac{g}{\rho_0} \nabla^\epsilon \bar{\rho}^\epsilon + \frac{g}{\rho_0} \overline{w'}(\bar{\rho}^\epsilon - \bar{\rho}^{\text{GS}}) \quad (1.5a)$$

$$58 \quad (\partial_{t^\epsilon} + \overline{\mathbf{V}^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon)\mathbf{A}^{\text{eddy}} - \frac{g}{\rho_0 \partial_{z^\epsilon} \bar{\rho}^{\text{GS}}} \overline{\mathbf{V}' \cdot \nabla^\epsilon (\bar{\rho}^\epsilon \rho')^\epsilon} = \frac{\overline{\rho'\mathbf{V}'^\epsilon}}{\partial_{z^\epsilon} \bar{\rho}^{\text{GS}}} \cdot \frac{g}{\rho_0} \nabla^\epsilon \bar{\rho}^\epsilon + \frac{g}{\rho_0} \overline{w'\rho'}^\epsilon, \quad (1.5b)$$

59 が得られる。この式は数値実験結果の解析などに近年の研究でもよく使われている (Masina et al.,  
60 1999; Wells et al., 2000)。

61 しかし、式 (1.4) による擾乱有効 PE の定義は  $\bar{\rho}_{z^\epsilon}^{\text{GS}}$  という全球的な物理量に依存している。同様  
62 に、式 (1.5a)-(1.5b) の右辺の第1項にある平均有効 PE から擾乱有効 PE への変換項も  $\bar{\rho}_{z^\epsilon}^{\text{GS}}$  に依存  
63 している。例えば、黒潮続流域の擾乱有効 PE やその生成率を見積もるのに、大西洋や地中海を含  
64 む全球的な海水の密度分布を加味しなくてはならないというのは不自然である (図 1.1)。さらに、  
65 式 (1.5a)-(1.5b) の左辺は、3次元フラックスの発散で書かれていないので、大陸棚や海峡を含む  
66 現実的な海底地形を考えた場合、移流項の体積積分が保存しない。

67 このような問題点がある為に次節では式 (1.3)-(1.5b) は使用しない定式化を導入する。

### 68 1.3 平均場の位置エネルギー（本講義）

69 物理量  $(g/\rho_0)\rho z^\epsilon$  は生の PE と呼ばれる。生の PE の体積積分が最小になるように流体粒子を並  
70 べ替えたのが背景密度  $\bar{\rho}^{\text{GS}}$  であると言っても良い。そこで PE と KE を次のように定義する。

$$71 \quad \mathcal{P} = (g/\rho_0)(\rho - \bar{\rho}^{\text{GS}})z^\epsilon, \quad (1.6a)$$

$$72 \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2}|\mathbf{V}|^2. \quad (1.6b)$$

73 式 (1.1b)-(1.1d) を使って、 $\mathcal{P}$  と  $\mathcal{K}$  の時間発展式と圧力フラックスの収束発散を表す式を導くと、次  
74 のようになる。

$$75 \quad \partial_{t^\epsilon} \mathcal{P} + \nabla^\epsilon \cdot [\mathbf{U}(\mathcal{P} + \bar{\Phi}^{\text{gs}})] = (g/\rho_0)(\rho - \bar{\rho}^{\text{gs}})w, \quad (1.7a)$$

$$76 \quad \partial_{t^\epsilon} \mathcal{K} + \nabla^\epsilon \cdot (\mathbf{U}\mathcal{K}) = -\mathbf{V} \cdot \nabla^\epsilon \mathbf{p}, \quad (1.7b)$$

$$77 \quad \nabla^\epsilon \cdot (\mathbf{U}\mathbf{p}) = \mathbf{V} \cdot \nabla^\epsilon \mathbf{p} - (g/\rho_0)(\rho - \bar{\rho}^{\text{gs}})w, \quad (1.7c)$$

78 ここで  $\bar{\Phi}^{\text{gs}} = (g/\rho_0)(\int_{z^\epsilon} \bar{\rho}^{\text{gs}} dz^\epsilon + \bar{\rho}^{\text{gs}} z^\epsilon)$  は背景密度に基づく Montgomery ポテンシャルである。  
79 よって  $\bar{\Phi}^{\text{gs}}$  も鉛直 1 次元構造だけを持ち時間変化しない。何の仮定や近似も必要とないという点で、  
80 式 (1.7a) は完全な PE 収支の式であり、有限振幅の密度擾乱や急峻な海底斜面をふくむ境界条件  
81 にも適用可能である (Aiki et al., 2011a)。閉じた空間内つまり海洋全体における  $(g/\rho_0)(\rho - \bar{\rho}^{\text{gs}})z^\epsilon$   
82 の体積積分は必ず正になる。

83  $\mathcal{P}$  と  $\mathcal{K}$  のそれぞれについて Euler 時間平均をとり、平均エネルギーと擾乱エネルギーに分離する。  
84

$$85 \quad \bar{\mathcal{P}}^\epsilon = \underbrace{\frac{g}{\rho_0}(\bar{\rho}^\epsilon - \bar{\rho}^{\text{gs}})z^\epsilon + \frac{g}{2\rho_0} \frac{\overline{\rho'^2}^\epsilon}{\partial_{z^\epsilon} \bar{\rho}^\epsilon}}_{\mathcal{P}^{\text{mean}}} + \underbrace{\frac{g}{2\rho_0} \frac{\overline{\rho'^2}^\epsilon}{(-\partial_{z^\epsilon} \bar{\rho}^\epsilon)}}_{\mathcal{P}^{\text{eddy}}}, \quad (1.8a)$$

$$86 \quad \bar{\mathcal{K}}^\epsilon = \underbrace{\frac{1}{2}|\bar{\mathbf{V}}^\epsilon|^2}_{\mathcal{K}^{\text{mean}}} + \underbrace{\frac{1}{2}|\overline{\mathbf{V}'}^\epsilon|^2}_{\mathcal{K}^{\text{eddy}}}. \quad (1.8b)$$

87 ここで  $\mathcal{P}^{\text{eddy}}$  の分母は、局所的な密度  $\bar{\rho}^\epsilon$  の鉛直勾配に基づいているので、式 (1.4) 式の  $\mathbf{A}^{\text{eddy}}$  の  
88 問題点を克服している。以下、 $\mathcal{P}^{\text{mean}}$  を平均 PE、 $\mathcal{P}^{\text{eddy}}$  を擾乱 PE と呼ぶことにする。平均 PE  
89 と擾乱 PE の和が  $(g/\rho_0)(\bar{\rho}^\epsilon - \bar{\rho}^{\text{gs}})z^\epsilon$  になるのは、Euler 時間平均が深さを固定した平均だからで  
90 ある。

## 91 1.4 Lorenz のエネルギーダイアグラムの完全版 (AZG13)

92 Lorenz (1955) のエネルギーダイアグラムとは平均 PE、擾乱 PE、平均 KE、擾乱 KE の 4 種類  
93 のエネルギーの相互変換を記述した系のことである。従来の研究では式 (1.4) の  $\mathbf{A}^{\text{mean}}$  と  $\mathbf{A}^{\text{eddy}}$   
94 を用いてエネルギーダイアグラムを完成させているが、前述のような問題点があるので、本講義で  
95 は式 (1.8a) の  $\mathcal{P}^{\text{mean}}$  と  $\mathcal{P}^{\text{eddy}}$  を使う。

96  $\mathcal{P}^{\text{eddy}}$  の収支式を導くには、密度の保存式 (1.1a) の派生形である  $(\partial_{t^\epsilon} + \bar{\mathbf{U}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon) \rho' = -\mathbf{U}' \cdot \nabla^\epsilon \bar{\rho}^\epsilon -$   
97  $\nabla^\epsilon \cdot (\mathbf{U}' \rho')$  と  $(\partial_{t^\epsilon} + \bar{\mathbf{U}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon) \bar{\rho}_{z^\epsilon}^\epsilon = -(\bar{\mathbf{U}}_{z^\epsilon}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon) \bar{\rho}^\epsilon - \nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{U}}' \rho')_{z^\epsilon}$  を使う。さらに式 (1.1b)-(1.1d)  
98 を使って、擾乱 PE と擾乱 KE の収支式と圧力擾乱フラックスの式を導くと、

$$99 \quad \partial_{t^\epsilon} \mathcal{P}^{\text{eddy}} + \nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{U}}^\epsilon \mathcal{P}^{\text{eddy}}) =$$

$$100 \quad (g/\rho_0) \overline{\rho' w'}^\epsilon + \underbrace{(-\Psi_{app}^{qs} \cdot (g/\rho_0) \nabla^\epsilon \bar{\rho}^\epsilon + \bar{w}_z^\epsilon \mathcal{P}^{\text{eddy}})}_{\#1}, \quad (1.9a)$$

$$101 \quad \partial_{t^\epsilon} \mathcal{K}^{\text{eddy}} + \nabla^\epsilon \cdot [\bar{\mathbf{U}}^\epsilon \mathcal{K}^{\text{eddy}} + \bar{\mathbf{U}}' \mathcal{K}^\epsilon] = -\bar{\mathbf{V}}' \cdot \nabla^\epsilon \mathbf{p}'^\epsilon + \underbrace{\bar{\mathbf{V}}^\epsilon \cdot [\nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{U}}' \mathbf{V}'^\epsilon)]}_{\#2}, \quad (1.9b)$$

$$102 \quad \nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{U}}' \mathbf{p}'^\epsilon) = \bar{\mathbf{V}}' \cdot \nabla^\epsilon \mathbf{p}'^\epsilon - (g/\rho_0) \overline{\rho' w'}^\epsilon, \quad (1.9c)$$

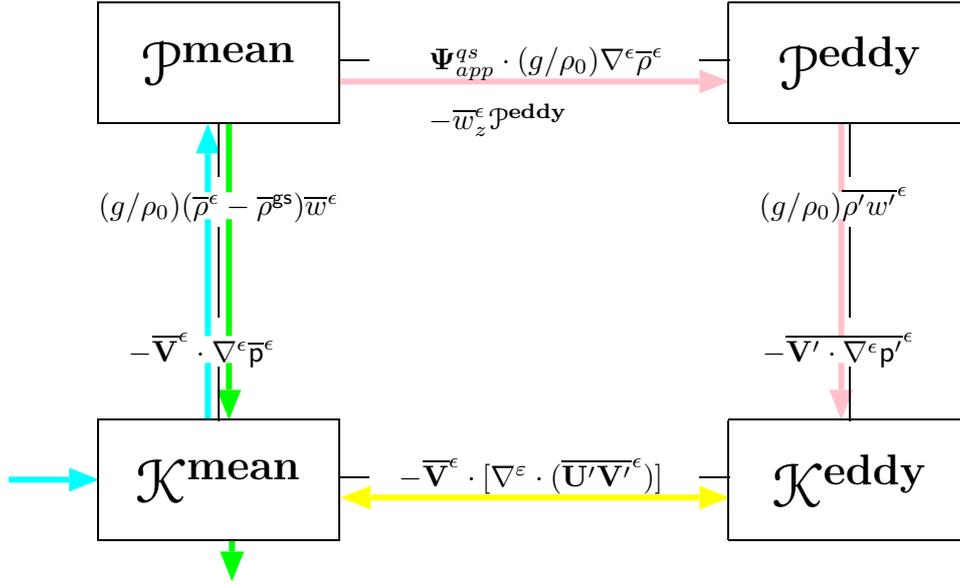


図 1.2: Euler 平均を用いて平均場と擾乱場の運動エネルギー ( $\mathcal{K}^{\text{mean}}$ ,  $\mathcal{K}^{\text{eddy}}$ ) を定義した場合のエネルギーダイアグラム. Lorenz (1955) のエネルギーダイアグラムの完全版ともいえる. 水色の矢印は風成 Ekman 流によるエネルギー変換経路、緑の矢印は摩擦 Ekman 流によるエネルギー変換経路、桃色矢印は渦残差速度によるエネルギー変換経路、黄色の矢印は Reynolds 応力によるエネルギー変換経路. Aiki, Zhai, and Greatbatch (2013).

103 となる。簡単の為に式 (1.9a) は擾乱の 3 次の積で表される項を省略している。式 (1.9a) の記号  $\Psi_{app}^{qs}$   
 104 は

$$105 \quad \Psi_{app}^{qs} \equiv -\frac{\overline{\rho' \mathbf{V}'^{\epsilon}}}{\partial_z \bar{\rho}^{\epsilon}} + \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho'^2}}{(\partial_z \bar{\rho}^{\epsilon})^2} \bar{\mathbf{V}}_z^{\epsilon}, \quad (1.10)$$

106 によって定義されるオーバーターニング流線関数であり、McDougall and McIntosh (2001) によっ  
 107 て導入された準 Stokes 流線関数  $\Psi^{qs}$  の近似式になっている \*5.3。その意味で添字の  $app$  が付けら  
 108 れている \*1.3。

109 式 (1.7a)-(1.7c) に Euler 時間平均を施し、そこから式 (1.9a)-(1.9c) を引くと、平均 PE と平均

\*1.3 本章に関係する 4 種類の渦残差速度を比較すると

- (i) 完全な準 Stokes 速度  $\mathbf{V}_{\text{eddy}} = \partial_z \Psi^{qs}$  : 海底と海面での法線無流条件を満たす (第 4 - 5 章で説明)。
- (ii) 準 Stokes 速度を海面や海底から十分に離れた深さを念頭において近似した速度  $\mathbf{V}_{\text{eddy}} = \partial_z \Psi_{app}^{qs}$  : 式 (1.10) 参照。
- (iii) 変形 Euler 平均 (TEM, Andrews and McIntyre, 1976) 理論の渦残差速度  $\mathbf{V}_{\text{eddy}} = \partial_z (-\overline{\rho' \mathbf{V}'^{\epsilon}} / \bar{\rho}_z^{\epsilon})$  : 式 (1.10) の最後の項 (平均流の鉛直シアによる項) を省いたもの。
- (iv) 式 (1.5b) の右辺第 1 項にでてきた渦残差速度  $\mathbf{V}_{\text{eddy}} = \partial_z (-\overline{\rho' \mathbf{V}'^{\epsilon}} / \bar{\rho}_z^{\text{gs}})$  : 分母が  $\bar{\rho}_z^{\text{gs}}$  という全球の密度分布に依存する表現になっているので (黒潮流域など) 局所的な領域の渦に対する考察に使うには違和感がある (第 1.2 節)。

110 KE の時間発展式および平均圧力フラックスの式が得られる。

$$111 \quad \partial_{t^\epsilon} \mathcal{P}^{\text{mean}} + \nabla^\epsilon \cdot [\overline{\mathbf{U}}^\epsilon (\mathcal{P}^{\text{mean}} + g \overline{\rho}^{\text{gs}} z^\epsilon) + \overline{\mathbf{U}'}^\epsilon g z^\epsilon] =$$

$$112 \quad (g/\rho_0) \overline{\rho}^\epsilon \overline{w}^\epsilon - \underbrace{(-\Psi_{app}^{qs} \cdot (g/\rho_0) \nabla^\epsilon \overline{\rho}^\epsilon + \overline{w}_z^\epsilon \mathcal{P}^{\text{eddy}})}_{\#1}, \quad (1.11a)$$

$$113 \quad \partial_{t^\epsilon} \mathcal{K}^{\text{mean}} + \nabla^\epsilon \cdot (\overline{\mathbf{U}}^\epsilon \mathcal{K}^{\text{mean}}) = -\overline{\mathbf{V}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon \overline{\mathbf{p}}^\epsilon - \underbrace{\overline{\mathbf{V}}^\epsilon \cdot [\nabla^\epsilon \cdot (\overline{\mathbf{U}'}^\epsilon \mathbf{V}'^\epsilon)]}_{\#2}, \quad (1.11b)$$

$$114 \quad \nabla^\epsilon \cdot (\overline{\mathbf{U}}^\epsilon \overline{\mathbf{p}}^\epsilon) = \overline{\mathbf{V}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon \overline{\mathbf{p}}^\epsilon - (g/\rho_0) \overline{\rho}^\epsilon \overline{w}^\epsilon, \quad (1.11c)$$

115  $\mathcal{P}^{\text{mean}}$  の収支式 (1.11a) と  $\mathcal{P}^{\text{eddy}}$  の収支式 (1.9a) のいずれも、左辺が3次元フラックスの収束発散  
116 で書かれているので、どんな海底地形であっても移流項は保存性を満たす。前述したとおり  $\mathbf{A}^{\text{mean}}$   
117 の収支式 (1.5a) と  $\mathbf{A}^{\text{eddy}}$  の収支式 (1.5b) のいずれも、左辺が3次元フラックスの収束発散で書か  
118 れていないので、保存性の問題がある。

119 式 (1.9a)-(1.11c) に基づいて、平均 PE、擾乱 PE、平均 KE、擾乱 KE の4種類のエネルギーの  
120 相互変換をまとめると図 1.2 のようになる。これは Lorenz (1955) のエネルギーダイアグラムの完  
121 全版ともいえる。平均エネルギーと擾乱エネルギーとの間の変換は、渦残差によるオーバーター  
122 ニング循環が平均場の密度面の傾きをとる効果と Reynolds 応力が平均流に作用する効果の2つに  
123 よって表される。

## 124 1.5 海洋大循環の主要な力学過程

125 水平スケールが数千 km の海洋循環を理解する為には、式 (1.2) の右辺に外力項（厳密には乱流  
126 粘性項）を付け加える必要がある。外力項は風ベクトル  $F^{\mathbf{V}} = (F^u, F^v)$  と沿岸や海底における摩  
127 擦ベクトル  $D^{\mathbf{V}} = (D^u, D^v)$  の2つの効果によって表される。

128 Euler 平均した水平流速ベクトルは次の3成分の和として考えるとわかりやすい (Aiki et al.,  
129 2011b)。第1成分が地衡流で

$$130 \quad f \mathbf{z} \times \overline{\mathbf{V}}_{\text{geo}}^\epsilon = -\nabla^\epsilon \overline{\mathbf{p}}^\epsilon, \quad (1.12a)$$

131 のように、北（南）半球では圧力が高い方向を右（左）に見て進む。第2成分が海面近くの風成  
132 Ekman 流

$$133 \quad f \mathbf{z} \times \overline{\mathbf{V}}_{\text{wind}}^\epsilon = F^{\mathbf{V}}, \quad (1.12b)$$

134 で、風下を見て北（南）半球では右（左）向きに流れる（図 1.3）。第3成分が沿岸や海底における  
135 摩擦 Ekman 流

$$136 \quad f \mathbf{z} \times \overline{\mathbf{V}}_{\text{drag}}^\epsilon = D^{\mathbf{V}}, \quad (1.12c)$$

137 で、地衡流が流れる先の方向を見て、北（南）半球では左（右）に流れる。

138 式 (1.12a) と式 (1.12b) を使って平均 KE の収支式を導くと、

$$139 \quad 0 = \underbrace{\overline{\mathbf{V}}_{\text{geo}}^\epsilon \cdot F^{\mathbf{V}}}_{\text{positive}} - \underbrace{\overline{\mathbf{V}}_{\text{wind}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon \overline{\mathbf{p}}^\epsilon}_{\text{positive}}, \quad (1.13a)$$

140 のように、風成 Ekman 流に関連するエネルギー変換が現れる。風外力が地衡流を押し出すことで平均  
141 KE が増える一方で、風成 Ekman 流が圧力が高い方向に流れることで平均 KE が減る (i.e. 平均

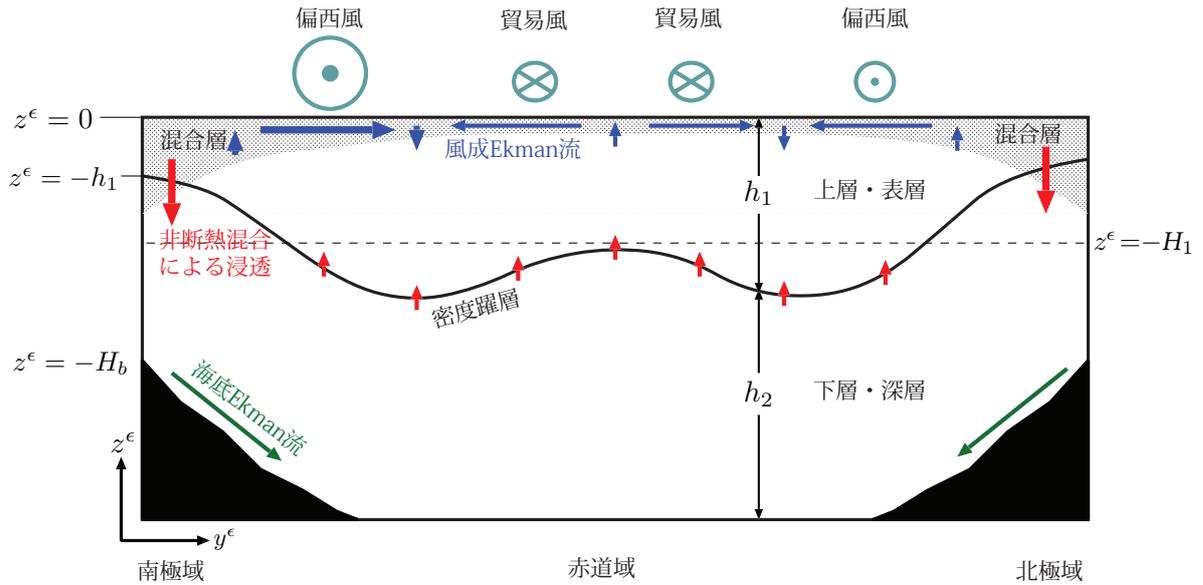


図 1.3: 南北鉛直断面における海洋の構造と力学過程の模式図.

142 PE に変換される)。このエネルギー変換経路は図 (1.2) の水色線で表されている。式 (1.12a) と式  
 143 (1.12c) を使って平均 KE の収支式を導くと、

$$144 \quad 0 = \underbrace{\overline{\mathbf{V}}_{\text{geo}}^{\epsilon} \cdot D^{\mathbf{V}}}_{\text{negative}} - \underbrace{\overline{\mathbf{V}}_{\text{drag}}^{\epsilon} \cdot \nabla^{\epsilon} \bar{p}^{\epsilon}}_{\text{negative}}, \quad (1.13b)$$

145 のように、摩擦 Ekman 流に関連するエネルギー変換が現れる。地衡流に沿岸摩擦が掛かる事で平  
 146 均 KE が減じられる一方で、摩擦 Ekman 流が圧力の低い方向に流れることで平均 KE が増える  
 147 (i.e. 平均 PE が開放される)。このエネルギー変換経路は図 1.2 の緑色線で表されている。

## 148 1.6 まとめ

- 149 ● 海洋は大気と比べて地形が複雑なので、平均場と擾乱場を定義する際には、時間的なローパ  
 150 スフィルターを使用する。定常渦は平均場に入ってしまうので注意が必要である。
- 151 ● 平均 PE の定義の仕方には 2 種類ある。深さを用いる方法だと局所的には正定値にはならな  
 152 いが体積積分をとると正になる。どのような海底地形に対しても保存式を導く事ができると  
 153 という利点がある。また傾圧渦によるエネルギー変換項が準 Stokes 速度の流線関数によって表  
 154 される。従来の密度差の 2 乗を用いて平均 PE を定義する方法には複数の問題点がある。
- 155 ● 従来の研究では、KE の式 (1.7b) に圧力フラックスの式 (1.7c) を組み込んでしまう事が多い  
 156 (その証拠に PE と KE の変換項は一般的に  $(g/\rho_0)\rho w$  のように鉛直流速を使った形で表され  
 157 る事が多い) が、成層流体のエネルギー収支を扱う場合には、むしろ圧力フラックスの式は  
 158 位置エネルギーの式と密接に関係しているので注意が必要である。
- 159 ● 本章の内容は Aiki, Zhai, and Greatbatch (2013) の一部に加筆したものである。

## 第2章 2層モデルにおける平均系

海洋の上層と下層の密度がそれぞれ一定であると仮定して2層モデルを考える。2層モデルは傾圧不安定を再現できる最も簡単な系の一つである。さらに2層モデルは断熱的な (i.e. 密度が変わらない) 混合と非断熱的な (i.e. 密度が変わる) 混合を区別するのに向いている。一般に海洋の傾圧渦による混合は断熱的で、非断熱混合は内部重力波の碎波によって起こると考えられている。後者は本講義では扱わない。

上層と下層を  $i = 1$  と  $2$  とし、各層の厚さを  $h_i$ 、水平速度ベクトルを  $\mathbf{V}_i = (u_i, v_i)$  で表す (図 1.3)。本講義の第1部 (傾圧渦) では海面変位はないと仮定している (鍋蓋近似)。上層と下層の厚さの和は時間変化しない。

$$h_1 + h_2 = H_b \quad (2.1)$$

海底地形の形状  $H_b = H_b(x, y)$  は任意である。各鉛直コラムにおける有効 PE と各層の KE は次のように表される。

$$P = \frac{g^*}{2}(H_1 - h_1)^2, \quad (2.2a)$$

$$K_i = \frac{1}{2}h_i|\mathbf{V}_i|^2, \quad (2.2b)$$

ここで  $g^* = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_0$  は上層と下層の密度  $\rho_i$  の差による浮力加速度である。 $H_1$  は上層の厚さの基準となる定数である。

### 2.1 従来のエネルギー方程式 (Holland and Lin, 1975)

海洋の数値モデルの発展史において、Holland and Lin (1975) の論文は、風成循環による西岸境界流の形成とそこからの傾圧不安定渦の発達を、初めて再現した数値実験の報告例として知られている。彼らは (本章で扱うのと同じ) 浅水方程式に基づく2層モデルを用いて、数値実験とそのエネルギー解析を行った。彼らを使用したのは (1章で紹介した) Lorenz (1955) のエネルギーダイアグラム of 2層モデル版ともいべきものであるが、彼らを使用した平均有効 PE、擾乱有効 PE、平均 KE、擾乱 KE の相互変換を表す式は完全ではない。というのも、各層の KE は式 (2.2b) で示されているとおり3次のモーメントであるので、KE が2次のモーメントであった Euler 平均系とは少し事情が違うからである。

このことを説明する為にまず、任意の物理量  $A_i$  に対して各層における時間平均を  $\tilde{A}_i$ 、それからのずれを  $A_i''' \equiv A_i - \tilde{A}_i$  と表す ( $\tilde{A}_i''' = 0$ )。この引き算は同じ層で行う。式 (2.1) の仮定から  $\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 = H_b$  と  $h_1''' + h_2''' = 0$  が得られる。時間平均した有効 PE は平均有効 PE と擾乱有効 PE

188 の和として書く事ができる。

$$189 \quad h_i \equiv \tilde{h}_i + h_i''', \quad (2.3a)$$

$$190 \quad \tilde{P} = \underbrace{\frac{g^*}{2}(H_1 - \tilde{h}_1)^2}_{P^{\text{mean}}} + \underbrace{\frac{g^*}{2}\overline{h_1'''^2}}_{P^{\text{eddy}}}, \quad (2.3b)$$

191 ここで  $\overline{A_i^e} \equiv \tilde{A}_i$  である。式 (2.3b) の  $P^{\text{eddy}}$  は  $H_1$  や  $\bar{p}^{\text{gs}}$  のような全球的な量とは独立している  
 192 ので、1章で説明した ( $A^{\text{eddy}}$  ではなくて)  $P^{\text{eddy}}$  に近い物理量である。一方、Holland and Lin  
 193 (1975, 彼らの式 14 参照) は平均 KE を  $(1/2)\tilde{h}_i|\tilde{\mathbf{V}}_i|^2$ 、擾乱 KE を  $(1/2)(\overline{h_i|\mathbf{V}_i|^2}^e - \tilde{h}_i|\tilde{\mathbf{V}}_i|^2)$  と定  
 194 義した。しかし後者は正定値ではないので、すっきりとした擾乱 KE の時間発展式が得られなかつ  
 195 たら。これが尾を引き、Holland and Lin (1975) は平均有効 PE、擾乱有効 PE、平均 KE、擾乱 KE  
 196 の相互変換を閉じる段となって精度を欠いている。そもそも Lorenz (1955) とは異なるエネルギー  
 197 ダイアグラムが存在するとは思ってもよらなかったであろう。

## 198 2.2 重み付け平均を用いた運動エネルギーの分離 (Bleck, 1985)

199 上記のような問題を実質的に解決したのが Bleck (1985) である。Bleck (1985) は連続成層した  
 200 大気に対する等エントロピー座標系を用いて定式化したために、海洋の研究分野ではその本質が認  
 201 知されていないのが残念である。本章では2層モデルを用いても Bleck (1985) のエネルギーダイ  
 202 アグラムを再現することができることを説明する。

203 まず任意の物理量  $A$  の重み付け平均を  $\hat{A}_i \equiv \overline{h_i A_i^e} / \tilde{h}_i$ 、それからのずれを  $A_i'' \equiv A_i - \hat{A}_i$  と表  
 204 す ( $\overline{h_i A_i''^e} = 0$ )。この引き算は同じ層で行う。このように分解された水平速度を式 (2.2b) に代入  
 205 すると

$$206 \quad \mathbf{V}_i \equiv \hat{\mathbf{V}}_i + \mathbf{V}_i'', \quad (2.4a)$$

$$207 \quad \tilde{K}_i = \underbrace{\frac{1}{2}\tilde{h}_i|\hat{\mathbf{V}}_i|^2}_{K_i^{\text{mean}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\overline{h_i|\mathbf{V}_i''|^2}}_{K_i^{\text{eddy}}}, \quad (2.4b)$$

208 が得られる。擾乱 KE が擾乱速度の2乗で表されているのでこれは正定値である<sup>\*2.1</sup>。同じ手法が  
 209 Iwasaki (2001) でも使われている。

210 式 (2.4b) の  $K_i^{\text{mean}}$  は重み付け速度を使って定義されている。この速度は

$$211 \quad \hat{\mathbf{V}}_i \equiv \frac{\overline{h_i \mathbf{V}_i^e}}{\tilde{h}_i} = \frac{\overline{(\tilde{h}_i + h_i''')(\tilde{\mathbf{V}}_i + \mathbf{V}_i''')^e}}{\tilde{h}_i} = \tilde{\mathbf{V}}_i + \underbrace{\frac{\overline{h_i''' \mathbf{V}_i'''}^e}}{\tilde{h}_i}}_{\mathbf{V}_i^B}, \quad (2.5)$$

212 のように重みなし平均速度  $\tilde{\mathbf{V}}_i$  といわゆるボラス速度  $\mathbf{V}_i^B$  に分離する事ができる (Rhines, 1982)。  
 213 重みなし平均速度  $\tilde{\mathbf{V}}_i$  は大循環の地衡流成分や海面や海底の Ekman 流成分を表すという点で、そ  
 214 の物理的な役割は Euler 平均系における  $\overline{\mathbf{V}}^e$  と似ている (が数学的には両者は同じではない)。ボ  
 215 ラス速度  $\mathbf{V}^B$  は擾乱による残差的な輸送を表すという点で、その物理的な役割は準 Stokes 速度や  
 216 TEM 理論の渦残差速度と似ている (が数学的には両者は同じではない)<sup>\*1.3</sup>。いずれにしても式

<sup>\*2.1</sup>このような重み付け平均の手法は、圧縮性流体の分野の方で広く使われている (Favre, 1965)。圧縮性流体では密度  $\rho$  が優位に変化するので、ブジネス近似を使う事ができない。すなわち時間・空間変化する  $\rho$  が運動量の式や運動エネルギーの定義に掛かっている。そこで (本章のような層厚ではなく) 密度  $\rho$  で重み付け平均する定式化が発展した。

217 (2.4b) の  $K_i^{\text{mean}}$  はポーラス速度の寄与を含んでいる。このように KE を平均成分と擾乱成分に分  
 218 離する際の物理的な配分が変更されていることが重要である。それ故に Bleck (1985) や Iwasaki  
 219 (2001) のエネルギーダイアグラムの構造は、古典的な Lorenz (1955) のものと異なってくる。本章  
 220 では Holland and Lin (1975) による平均有効 PE と擾乱有効 PE の定義式 (2.3b) をそのまま使う  
 221 が、このことについて問題は生じない。

## 2.3 擾乱の残差によるオーバーターニング循環

223 図 2.1 を使ってポーラス速度の役割を説明する。北半球における東西に周期的な流路を考え、上  
 224 層に東向きの基本地衡流があるとする。基本流を維持している密度面の傾きを減らすには、不安定  
 225 擾乱が発達して、上層で正味北向き、下層で正味南向きの輸送が生じる必要がある (図 2.1)。こ  
 226 れは擾乱速度の南北成分の位相と層の厚さの位相によって決まる。擾乱速度の傾圧成分は密度の傾  
 227 きと位相が同じ (図 2.1b) なので正味の南北輸送には寄与しない。擾乱速度の順圧成分が図 2.1c  
 228 のようになっていればポーラス速度が上層で北向き、下層で南向きになる。擾乱速度の順圧成分と  
 229 傾圧成分を合成すると、擾乱速度の等位相線が基本流の鉛直シアと交差する向きになっている (図  
 230 2.1d)。これは線形波動論における傾圧不安定の条件と一致する (Charney, 1947; Eady, 1949)。

## 2.4 Montgomery ポテンシャル

232 各層の厚さと運動量の時間発展は次のような浅水方程式で表される。

$$233 \quad \partial_t h_i + \nabla \cdot (h_i \mathbf{V}_i) = 0, \quad (2.6a)$$

$$234 \quad (\partial_t + \mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i + f \mathbf{z} \times \mathbf{V}_i = -\nabla \Phi_i, \quad (2.6b)$$

$$235 \quad \Phi_2 = \Phi_1 + g^*(H_1 - h_1), \quad (2.6c)$$

236 ここで  $\partial_t$  と  $\nabla \equiv (\partial_x, \partial_y)$  は各層における時間微分と横方向微分の演算子である (これらの記号は  
 237 成層流体中の等密度面に沿う偏微分演算子として第 3 章に引き継がれる)。記号  $\Phi_i$  は各層におけ  
 238 る Montgomery ポテンシャル (MP) のアノマリーである。 $\Phi_i$  の事を静水圧と呼んだりしている教  
 239 科書があるが、後でエネルギー収支の式をみれば  $\Phi_i$  が間違いなく MP である事に納得できる事を  
 240 約束する。

241 一般に MP は静水圧と生の PE の和として定義される ( $\Phi \equiv (g/\rho_0) \int_{z^\epsilon} \rho dz^\epsilon + (g/\rho_0) \rho z^\epsilon$ )。まず  
 242  $p^s = p^s(x, y, t)$  を海面 ( $z^\epsilon = 0$ ) における圧力とすると、上層内のすべての深さ (i.e.  $-h_1 < z^\epsilon < 0$ )  
 243 において、MP は

$$244 \quad \Phi = [p^s - (g/\rho_0) \rho_1 z^\epsilon] + (g/\rho_0) \rho_1 z^\epsilon$$

$$245 \quad = p^s \quad (2.7a)$$

246 と書く事ができる。では、下層内のすべての深さ (i.e.  $-H_b < z^\epsilon < -h_1$ ) においては、MP は

$$247 \quad \Phi = [p^s + (g/\rho_0) \rho_1 h_1 + (g/\rho_0) \rho_2 (-h_1 - z^\epsilon)] + (g/\rho_0) \rho_2 z^\epsilon$$

$$248 \quad = p^s - (g/\rho_0) (\rho_2 - \rho_1) h_1$$

$$249 \quad = p^s - g^* h_1 \quad (2.7b)$$

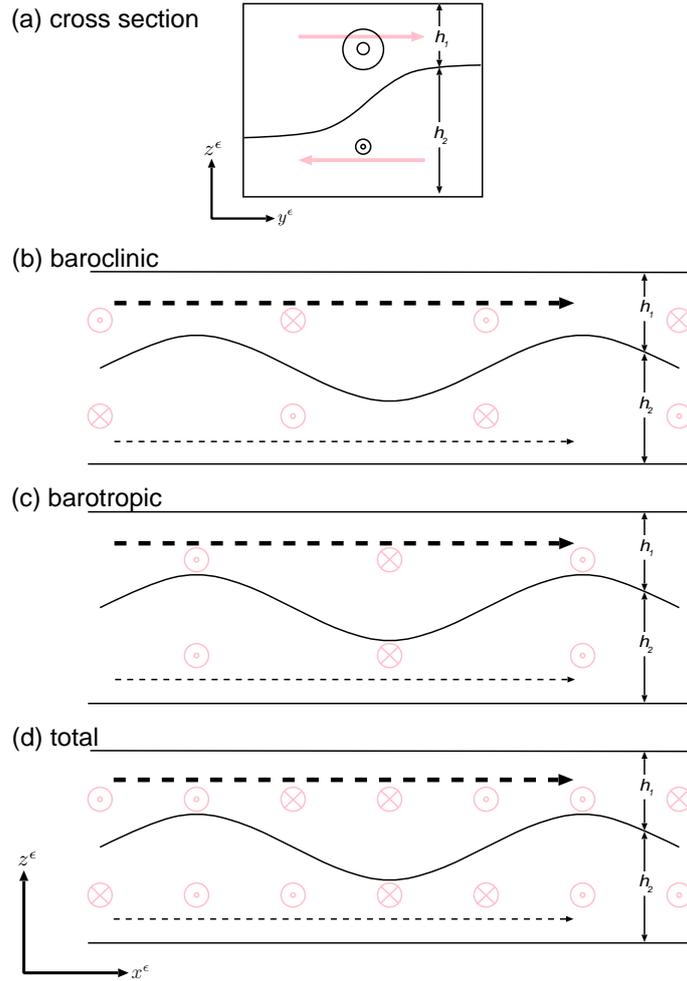


図 2.1:  $x^\epsilon$  軸の正の方向に流れる上層の基本地衡流とその不安定擾乱の模式図. 北半球における東西に周期的な流路を想定. 黒色矢印が基本流の速度、桃色矢印が擾乱速度の  $y^\epsilon$  方向成分を表す. (a) 平均流の断面, (b) 擾乱速度の傾圧成分, (c) 擾乱速度の順圧成分, (d) 擾乱速度の傾圧成分と順圧成分の合成.

250 と書く事ができる。よって上層と下層の MP の差は  $-g^*h_1$  であり、そのアノマリーは  $g^*(H_1 - h_1) =$   
 251  $\Phi_2 - \Phi_1$  となる。これが式 (2.6c) である。

252 式 (2.6a)-(2.6c) を使って、有効 PE と KE の時間発展式と MP フラックスの発散の式を導くと

253 
$$\partial_t P = -g^*(H_1 - h_1)\partial_t h_1 = \Phi_1 \partial_t h_1 + \Phi_2 \partial_t h_2, \quad (2.8a)$$

254 
$$\partial_t K_i + \nabla \cdot (\mathbf{V}_i K_i) = -h_i \mathbf{V}_i \cdot \nabla \Phi_i, \quad (2.8b)$$

255 
$$\nabla \cdot (\Phi_i h_i \mathbf{V}_i) = -\Phi_i \partial_t h_i + h_i \mathbf{V}_i \cdot \nabla \Phi_i, \quad (2.8c)$$

256 となる。式 (2.8a) の導出には式 (2.6c) と  $\partial_t h_1 = -\partial_t h_2$  を使った。式 (2.8a)-(2.8c) の和をとると、  
 257 右辺の全ての項は相殺されて、 $P + K_1 + K_2$  の保存式が得られる。興味深い事に、有効 PE の式  
 258 (2.8a) には移流項が含まれていない。何故ならば、移流項はすでに式 (2.8c) の MP フラックスの  
 259 一部として勘定されているからである。もし式 (2.6b) の時点で  $\Phi_i$  が静水圧であると勘違いしてし  
 260 まっていたら、式 (2.8a) に移流項が欠けている事を説明できない。このように、圧力フラックスと

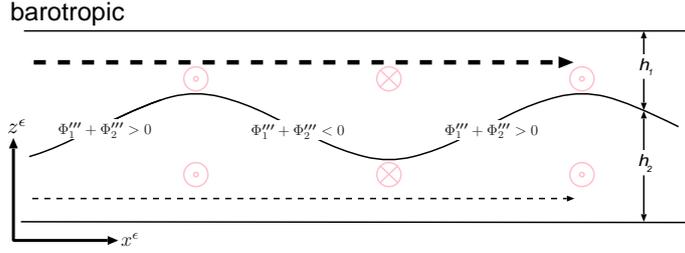


図 2.2: 形状応力の式 (2.10a)-(2.10b) の右辺第 1 項に関する模式図. 図 2.1c からの転載.

261 有効 PE の移流フラックスは微妙に関係し合っている。

## 262 2.5 形状応力：砕波によらない運動量混合

263 平均流に対する運動方程式を導こう。まず、層厚の保存式 (2.6a) の時間平均をとると、

$$264 \quad \partial_t \tilde{h}_i + \nabla \cdot (\tilde{h}_i \hat{\mathbf{V}}_i) = 0, \quad (2.9a)$$

265 となる。次に、式 (2.6a) を使って運動量の式 (2.6b) をフラックス発散型に書き換えた後に、その  
266 時間平均をとると

$$267 \quad \partial_t (\tilde{h}_i \hat{\mathbf{V}}_i) + \nabla \cdot (\tilde{h}_i \hat{\mathbf{V}}_i \hat{\mathbf{V}}_i) + f \mathbf{z} \times \tilde{h}_i \hat{\mathbf{V}}_i = -\tilde{h}_i \nabla \tilde{\Phi}_i - \overline{h_i''' \nabla \Phi_i'''}^e - \nabla \cdot (\overline{h_i \mathbf{V}_i'' \mathbf{V}_i''}^e), \quad (2.9b)$$

$$269 \quad \tilde{\Phi}_2 = \tilde{\Phi}_1 + g^*(H_1 - \tilde{h}_1), \quad \Phi_2''' = \Phi_1''' - g^* h_1''', \quad (2.9c)$$

270 となる。式 (2.9b) の  $-\nabla \cdot (\overline{h \mathbf{V}_i'' \mathbf{V}_i''}^e)$  は横方向の Reynolds 応力の発散を表す。式 (2.9b) の  $-\overline{h_i''' \nabla \Phi_i'''}^e$   
271 のように圧力擾乱の残差を表す項は、一般に層厚形状応力項と呼ばれている<sup>\*2.2</sup>。この項は式 (2.9c)  
272 を使って次のように書き換える事ができる。

$$273 \quad -\overline{h_1''' \nabla \Phi_1'''}^e = -(1/2) \overline{h_1''' \nabla (\Phi_1''' + \Phi_2''')}^e - (1/2) \nabla P^{\text{peddy}}, \quad (2.10a)$$

$$274 \quad -\overline{h_2''' \nabla \Phi_2'''}^e = +(1/2) \overline{h_1''' \nabla (\Phi_1''' + \Phi_2''')}^e - (1/2) \nabla P^{\text{peddy}}, \quad (2.10b)$$

275 式 (2.10b) の導出には  $h_1''' + h_2''' = 0$  を使った。Aiki and Richards (2008) は、全球渦解像海洋モ  
276 デルの数値実験結果を解析して、式 (2.10a)-(2.10b) の右辺の第 1 項 (鉛直再分配項) の正味の寄  
277 与が第 2 項 (横方向勾配項) の寄与に比べて 1 桁大きい事を示した。

278 式 (2.10a)-(2.10b) の右辺第 1 項は上層から下層への運動量の伝達を表す。この事を確かめる為  
279 に図 2.2 について説明をする。この図の桃色矢印は図 2.1c から転載したもので、 $y^e$  方向の順圧擾  
280 乱速度の位相を表す。この速度が地衡流であると仮定すると順圧擾乱 MP は図 2.2 に記されている  
281 ような位相になっているはずである。つまり上層が膨らんでいる ( $h_1''' > 0$ ) 所で順圧 MP の  $x^e$  方  
282 向勾配が正になっている ( $\partial_x (\Phi_1''' + \Phi_2''') > 0$ )。従って下層の応力の式 (2.10b) の右辺第 1 項は正に  
283 なって、下層の流体粒子が  $x^e$  軸の方向に加速される。

284 総括すると、基本流は温度風平衡しているので鉛直シアが必ずあり、傾圧不安定によって発達す  
285 る渦が形状応力を働かせて基本流の鉛直シアを弱めるのである。このような解釈は南極環流 (のよ

\*2.2 海洋力学の論文では、海底形状応力と層厚形状応力を区別することが多いが、本講義では後者しか扱わないので簡単に形状応力と呼ぶことにする。層厚形状応力は渦形状応力とも呼ばれる。

286 うな東西に周回する海流) の運動量収支を説明する際によく使われる (Munk and Palmén, 1951;  
287 Johnson and Bryden, 1989)。式 (2.10a)-(2.10b) の右辺第 1 項はまた、Eliassen-Palm フラックス  
288 の圧力に基づく表現の鉛直成分と関係している (Andrews, 1983; Lee and Leach, 1996)。

289 式 (2.10a)-(2.10b) の最後の項は擾乱の残差によって生じた圧力の横方向勾配と見なす事ができ  
290 る。 $P^{\text{eddy}}$  の係数に  $1/2$  が掛かっているのは不自然ではない。というのも本章で使用している有効  
291 PE は、式 (2.2a) にあるとおり、既に水深積分された物理量だからである。一方、フラックス発  
292 散型で書かれた平均運動量の式 (2.9b) は、既に各層の厚さ  $h_i$  が掛かっているため、形状応力項の  
293 水深積分をとるには単純に式 (2.10a)-(2.10b) の和をとればよい。そうすると右辺第 2 項の水深積  
294 分は  $-\nabla P^{\text{eddy}}$  になる。

## 295 2.6 2層モデルのエネルギーダイアグラムの完全版 (AZG13)

296 まず平均場の式をみてみよう。式 (2.9a)-(2.9c) を使って、平均有効 PE と平均 KE の時間発展式  
297 と平均 MP フラックスの式を導くと、

$$298 \quad \partial_t P^{\text{mean}} = -g^*(H_1 - \tilde{h}_1) \partial_t \tilde{h}_1 = \tilde{\Phi}_1 \partial_t \tilde{h}_1 + \tilde{\Phi}_2 \partial_t \tilde{h}_2, \quad (2.11a)$$

$$299 \quad \partial_t K_i^{\text{mean}} + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{V}}_i K_i^{\text{mean}}) = -\tilde{h}_i \hat{\mathbf{V}}_i \cdot \nabla \tilde{\Phi}_i - \underbrace{\hat{\mathbf{V}}_i \cdot \overline{h_i'''' \nabla \Phi_i''''^e}}_{\#1} - \underbrace{\hat{\mathbf{V}}_i \cdot [\nabla \cdot (h_i \mathbf{V}_i'' \mathbf{V}_i''^e)]}_{\#2}, \quad (2.11b)$$

$$300 \quad \nabla \cdot (\tilde{\Phi}_i \tilde{h}_i \hat{\mathbf{V}}_i) = -\tilde{\Phi}_i \partial_t \tilde{h}_i + \tilde{h}_i \hat{\mathbf{V}}_i \cdot \nabla \tilde{\Phi}_i, \quad (2.11c)$$

302 式 (2.11a) の導出には式 (2.9c) と  $\partial_t \tilde{h}_1 = -\partial_t \tilde{h}_2$  を使った。式 (2.11b) の最後の 2 項は形状応力  
303 項と Reynolds 応力項によるエネルギー変換で、平均場と擾乱場間の相互作用を表す。

304 次に擾乱場の式をみてみよう。式 (2.8a)-(2.8c) を時間平均した物から式 (2.11a)-(2.11c) を引く  
305 と、擾乱 PE と擾乱 KE の時間発展式と擾乱 MP フラックスの式が得られる。

$$306 \quad \partial_t P^{\text{eddy}} = g^* \overline{h_1'''' \partial_t h_1''''^e} = \overline{\Phi_1'''' \partial_t h_1''''^e} + \overline{\Phi_2'''' \partial_t h_2''''^e}, \quad (2.12a)$$

$$307 \quad \partial_t K_i^{\text{eddy}} + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{V}}_i K_i^{\text{eddy}} + \overline{\mathbf{V}_i'' K_i''^e}) = -\overline{h_i \mathbf{V}_i'' \cdot \nabla \Phi_i''^e} + \underbrace{\hat{\mathbf{V}}_i \cdot [\nabla \cdot (h_i \mathbf{V}_i'' \mathbf{V}_i''^e)]}_{\#2}, \quad (2.12b)$$

$$308 \quad \nabla \cdot (\overline{\Phi_i'''' h_i''''^e} \hat{\mathbf{V}}_i + \overline{\Phi_i h_i \mathbf{V}_i''^e}) = -\overline{\Phi_i'''' \partial_t h_i''''^e} + \underbrace{\hat{\mathbf{V}}_i \cdot \overline{h_i'''' \nabla \Phi_i''''^e}}_{\#1} + \overline{h_i \mathbf{V}_i'' \cdot \nabla \Phi_i''^e}. \quad (2.12c)$$

310 式 (2.11a)-(2.12c) に基づくエネルギーダイアグラムを図 2.3 に示す。従来の研究では KE の収支の  
311 中に隠れてしまっているが、図 2.3 のダイアグラムでは MP フラックスの式 (2.11c) と (2.12c) に関  
312 するエネルギー変換経路を詳しく描いている。さらに式 (2.11b) の右辺第 1 項に関するエネルギー  
313 変換経路は  $\hat{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}} + \mathbf{V}^B$  を使って 2 つの経路に分けられている。

314 傾圧不安定によるエネルギーサイクルの源は大スケールの有効 PE である。この有効 PE の一部  
315 が傾圧渦によって解放されて擾乱場にカスケードする過程を図 2.3 を使って説明しよう。まず平均  
316 流が地衡流平衡にあることによって大スケールの密度の水平勾配が常に存在する。これは 2 層モ  
317 デルでいうと上層と下層の間の境界面の傾きに相当するが、この傾きをゆるめるようにポーラス速度  
318 が働くのが傾圧不安定である。これは図 2.3 の  $-\tilde{h} \mathbf{V}^B \cdot \nabla \tilde{\Phi}$  で記されたエネルギー変換経路に対応  
319 する。この経路は平均 PE と平均 KE をつないでいるので、平均 PE の一部が解放されることによ

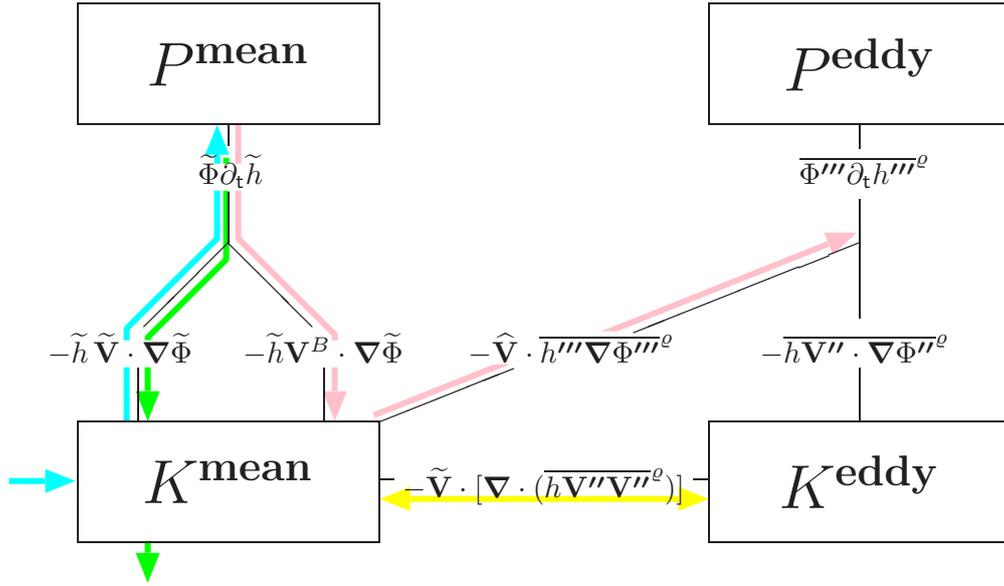


図 2.3: 層モデルにおける平均を用いて平均運動エネルギー ( $K^{\text{mean}}$ ) と渦運動エネルギー ( $K^{\text{eddy}}$ ) を定義した場合のエネルギーダイアグラム. Bleck (1985) や Iwasaki (2001) のエネルギーダイアグラムの海洋版ともいえる。水色の矢印は風成 Ekman 流によるエネルギー変換経路、緑の矢印は摩擦 Ekman 流によるエネルギー変換経路、桃の矢印は傾圧渦の残差的なオーバーターニング循環によるエネルギー変換経路、黄色の矢印は Reynolds 応力によるエネルギー変換経路. Aiki, Zhai, and Greatbatch (2013).

320 り平均流が加速することを意味する\*2.3。ところが平均流は実際には加速しない。なぜならば、形  
 321 状応力による運動量の鉛直再分配によって絶えず減速の効果が加わっていて、加速と減速の効果が  
 322 が相殺するからである。確かに図 2.3 の  $-\hat{V} \cdot \overline{h''' \nabla \Phi'''^e}$  で記されているとおり、渦形状応力は平均  
 323 平均 KE を奪って擾乱エネルギーに変換する役割を果たす。図 2.3 の擾乱場ではエネルギー変換経路  
 324  $-\hat{V} \cdot \overline{h''' \nabla \Phi'''^e}$  は二手に別れてそれぞれ擾乱 PE と擾乱 KE に繋がっている。これは MP フラックス  
 325 の式 (2.12c) による。とりわけ、擾乱 PE と平均 KE が直接繋がっているという事は、密度面の擾  
 326 乱の存在と渦形状応力の存在を同時に説明するのに相応しい。

327 以上のエネルギー経路は、既に Bleck (1985) と Iwasaki (2001) によって、大気の傾圧不安定の  
 328 エネルギーサイクルに関して論じられている。言い換えると、図 2.3 のダイアグラムにおいて海洋  
 329 独自のエネルギー変換経路は重みなし平均速度による  $-\tilde{h} \tilde{V} \cdot \nabla \tilde{\Phi}$  である。この経路は海面近くの  
 330 風成 Ekman 流と海底近くの摩擦 Ekman 流の役割を表す (第 1 章)。

## 331 2.7 まとめ

- 332 • 平均 KE と擾乱 KE の物理的な配分を変えた事で、エネルギーサイクルの見え方が変わり、  
 333 形状応力によるエネルギー変換経路が新たに現れた。

\*2.3 これに反して、1 章で説明した Lorenz のエネルギーダイアグラムでは、図 1.2 の  $\Psi_{app}^{qs} \cdot (g/\rho_0) \nabla^e \bar{\rho}^e$  に記されているエネルギー変換経路は平均 PE から擾乱 PE に繋がっている。

- 334 ● 2層モデルは、Bleck (1985) と Iwasaki (2001) のエネルギーダイアグラムの本質を説明する  
335 ことのできる最も簡単な系である。しかしその事実は過去の論文では指摘されていない。
- 336 ● 形状応力は圧力擾乱の残差的な効果を表し、碎波に頼らずに運動量を伝えることができる。  
337 すなわち温度、塩分、密度が鉛直混合を起こさないような場合でも、運動量の鉛直フラック  
338 スが存在するという状況を実現する事ができる。
- 339 ● 層モデルの場合、運動量の式の圧力勾配項に現れるスカラー量は、実は静水圧ではなく MP  
340 である。位置エネルギーの式に移流項が現れないのは、MP フラックスとして既に勘定され  
341 ているからである。
- 342 ● ボーラス速度の水平成分は定義したが、鉛直成分がどのように定義されるのかは不明である。
- 343 ● 本章の内容は Aiki, Zhai, Greatbatch (2013) の一部に加筆した物である。

## 第3章 密度座標系

本章では、密度座標系で平均された物理量を Euler 直交座標系に射影するという作業を説明しながら、座標変換と平均操作に関する基礎知識をまとめる。

### 3.1 偏微分の連鎖律

高校の数学や物理の授業で円柱座標系を習った時のことを思い出そう。まず円柱座標系における半径方向の位置を  $r$ 、角度を  $\theta$  と表わすと、円柱座標系から直線直交座標系への変換は  $(x^\epsilon, y^\epsilon) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  のように書くことができる。すると円柱座標系における偏微分は

$$\begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial r} & \frac{\partial y^\epsilon}{\partial r} \\ \frac{\partial x^\epsilon}{\partial \theta} & \frac{\partial y^\epsilon}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x^\epsilon} \\ \partial_{y^\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x^\epsilon} \\ \partial_{y^\epsilon} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

となる。これが円柱座標系と直線直交座標系との間の「偏微分の連鎖律」である。

密度座標系  $(x, y, \rho, t)$  から Euler 座標系  $(x^\epsilon, y^\epsilon, z^\epsilon, t^\epsilon)$  への変換は次のように書くことができる。

$$x^\epsilon = x, \quad y^\epsilon = y, \quad z^\epsilon = z^\epsilon(x, y, \rho, t), \quad t^\epsilon = t \quad (3.2)$$

両座標系との間の偏微分の連鎖律は次のようになる (Kasahara, 1974)。

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_\rho \\ \partial_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_x^\epsilon & 0 \\ 0 & 1 & z_y^\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & z_\rho^\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & z_t^\epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x^\epsilon} \\ \partial_{y^\epsilon} \\ \partial_{z^\epsilon} \\ \partial_{t^\epsilon} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

左辺が密度座標系における微分で、右辺の列ベクトルが Euler 座標系における微分である。式 (3.3) を使くと、Euler 座標系の物質微分演算子  $\mathcal{D}_{t^\epsilon}$  を密度座標系の物質微分演算子  $\mathcal{D}_t$  に書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{t^\epsilon} &\equiv \partial_{t^\epsilon} + \mathbf{V} \cdot \nabla^\epsilon + w \partial_{z^\epsilon} \\ &= \partial_{t^\epsilon} + u \partial_{x^\epsilon} + v \partial_{y^\epsilon} + w \partial_{z^\epsilon} \\ &= \partial_t + u \partial_x + v \partial_y + (w - z_t^\epsilon - u z_x^\epsilon - v z_y^\epsilon) \partial_{z^\epsilon} \\ &= \partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + (w - z_t^\epsilon - \mathbf{V} \cdot \nabla z^\epsilon) (1/z_\rho^\epsilon) \partial_\rho \\ &= \underbrace{\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + m \partial_\rho}_{\equiv \mathcal{D}_t}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここで  $\nabla \equiv (\partial_x, \partial_y)$  であり、さらに便宜上  $m \equiv (w - z_t^\epsilon - \mathbf{V} \cdot \nabla z^\epsilon)/z_\rho^\epsilon$  という新しい物理量を定義した。この定義を書き直すと、

$$(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + m \partial_\rho) z^\epsilon = w, \quad (3.5a)$$

368 となるので Euler 座標系における物質微分による鉛直速度の定義 ( $\mathcal{D}_{t^\epsilon} z^\epsilon = w$ ) と整合する。次に  
 369  $\partial_x \rho = \partial_y \rho = \partial_t \rho = 0$  である事に注意すると、

$$370 \quad (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + m \partial_\rho) \rho = m, \quad (3.5b)$$

371 となる。式 (3.5b) と密度の保存式 (1.1a) を比較すると混合が断熱である限り  $m = 0$  であることが  
 372 わかる。つまり  $m$  は本来、(内部重力波の碎波など) 微細スケールの非断熱混合 (密度の鉛直混  
 373 合) によってじわじわと密度面を横切る水フラックスを表す (図 1.3 の赤色矢印)。一般に海洋  
 374 の傾圧渦による混合は断熱的 (i.e. 等密度面に沿う横方向の混合) であると考えられている。内部  
 375 重力波の碎波によって起こる非断熱混合 (i.e. 密度の鉛直混合) は本講義では取り扱わないので以  
 376 下  $m = 0$  とする。

### 377 3.2 パッシブトレーサーの保存式

378 3次元 Euler 座標系で表された非圧縮の式 (1.1b) とパッシブトレーサー  $S$  の保存式を、連鎖律  
 379 の式 (3.3) を使って書き換えると、

$$380 \quad \partial_t(z^\epsilon) + \nabla \cdot (z^\epsilon \mathbf{V}) = 0, \quad (3.6a)$$

$$381 \quad \mathcal{D}_{t^\epsilon} S = \mathcal{D}_t S = (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) S = 0, \quad (3.6b)$$

382 となる。密度座標系における層厚は  $z_\rho^\epsilon (< 0)$  で、符号が負である事に注意しよう。式 (3.6a)-(3.6b)  
 383 を組み合わせれば、パッシブトレーサーの保存式をフラックス発散型で書くことができる。

$$384 \quad \partial_t(z_\rho^\epsilon S) + \nabla \cdot (z_\rho^\epsilon \mathbf{V} S) = 0, \quad (3.7)$$

385 第2章と同じように、任意の物理量  $A$  に対して各密度面における時間平均を  $\tilde{A}$ 、それからのずれ  
 386 を  $A''' \equiv A - \tilde{A}$  と表す ( $\tilde{A}''' = 0$ )。この引き算は同じ密度面で行う。この表記法については、便  
 387 宜上、以下の2点も許容する。

- 388 • 各密度面の深さ  $z^\epsilon$  については特別に、その時間平均を  $\tilde{z}^\epsilon = \tilde{z}$ 、擾乱を  $(z^\epsilon)''' = z'''$  と表し  
 389 て肩字  $\epsilon$  を省略する ( $z^\epsilon = \tilde{z} + z'''$ )。これは  $\tilde{z}$  や  $z'''$  が頻繁にでてくるからである。
- 390 • 重みなし平均を表す記号については  $\tilde{A} = \overline{A}^\rho$  も使うことにする。これは  $A$  が2文字以上の数  
 391 式記号になるときに適用する。

392 次に、任意の物理量  $A$  の重み付け平均を  $\hat{A} \equiv \overline{z_\rho^\epsilon A} / \tilde{z}_\rho$ 、それからのずれを  $A'' \equiv A - \hat{A}$  と表す  
 393 ( $\overline{z_\rho^\epsilon A''} = 0$ )。この引き算は同じ密度面で行う。

394 層厚の式 (3.6a) とトレーサーの式 (3.7) の時間平均をとると、

$$395 \quad \partial_t(\tilde{z}_\rho) + \nabla \cdot (\tilde{z}_\rho \hat{\mathbf{V}}) = 0, \quad (3.8a)$$

$$396 \quad \partial_t(\tilde{z}_\rho \hat{S}) + \nabla \cdot (\tilde{z}_\rho \hat{\mathbf{V}} \hat{S}) + \nabla \cdot (\overline{z_\rho^\epsilon \mathbf{V}'' S''}^\rho) = 0, \quad (3.8b)$$

397 となる。トレーサーの式 (3.8b) の擾乱フラックス項は等密度面上の発散演算子  $\nabla \cdot$  で書かれている  
 398 ので、等密度面混合を表す。層厚の式 (3.8a) を使ってトレーサーの式 (3.8b) を移流型の表現に書  
 399 き換えると、

$$400 \quad (\partial_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \hat{S} + \frac{1}{\tilde{z}_\rho} \nabla \cdot (\overline{z_\rho^\epsilon \mathbf{V}'' S''}^\rho) = 0, \quad (3.9)$$

401 となる。

402 密度座標系で書かれた方程式は一見すっきりしているが、(1) 速度や擾乱フラックスの鉛直成分  
 403 がどうなっているのか、(2) 海底での境界条件がどうなっているのか、等がわかりにくい。この問  
 404 題点を克服する為に、密度座標系で時間平均された物理量を深さ座標系に射影することがよく行わ  
 405 れる (Gallimore and Johnson, 1981; de Szoeke and Bennett, 1993)。射影する先は各密度面の時  
 406 間平均した深さ  $\tilde{z}$  である。この時間平均された深さ座標系  $(x^\epsilon, y^\epsilon, \tilde{z}, t^\epsilon)$  を  $\tilde{z}$  座標系と呼ぶことにす  
 407 る。密度座標系と  $\tilde{z}$  座標系との間の偏微分の連鎖律は次のように書く事ができる。

$$408 \quad \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_\rho \\ \partial_t \end{pmatrix} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tilde{z}_x & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{z}_y & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{z}_\rho & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{z}_t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x^\epsilon} \\ \partial_{y^\epsilon} \\ \partial_{\tilde{z}} \\ \partial_{t^\epsilon} \end{pmatrix} \tilde{A}. \quad (3.10)$$

409 これはオリジナルの連鎖律の式 (3.3) の  $z^\epsilon$  を  $\tilde{z}$  に置き換えたものである。新しい連鎖律の式 (3.10)  
 410 は密度座標系で時間平均された物理量に対してのみ適用されることとする。密度座標系は直交座標  
 411 系ではない ( $\nabla \tilde{z} \neq 0$ ) のに対し、 $\tilde{z}$  座標系は直交座標系 ( $\nabla^\epsilon \tilde{z} = 0$ ) であることに注意しよう。

412 新しい連鎖律の式 (3.10) をパッシブスカラーの式 (3.9) に代入すると、

$$413 \quad [\partial_{t^\epsilon} + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla^\epsilon + (\tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z}) \partial_{\tilde{z}}] \hat{S} + \nabla^\epsilon \cdot \left( \frac{z_\rho^\epsilon \mathbf{V}'' S''^0}{\tilde{z}_\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{\nabla \tilde{z} \cdot z_\rho^\epsilon \mathbf{V}'' S''^0}{\tilde{z}_\rho} \right) = 0, \quad (3.11)$$

414 が得られる。物質微分演算子に現れた 3 次元速度 ( $\hat{\mathbf{V}}, \tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z}$ ) は、擾乱の残差による輸送  
 415 も含むので全輸送速度 (あるいはトレーサー輸送速度) と呼ばれている。全輸送速度は古典的な  
 416 Lagrange 平均速度 (= Euler 平均速度 + Stokes ドリフト速度) に対応する物である。全輸送速度  
 417 ( $\hat{\mathbf{V}}, \tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z}$ ) と重み付け平均速度は ( $\hat{\mathbf{V}}, \hat{w}$ ) は、水平成分は同じであるが鉛直成分が異なる事  
 418 に注意しよう。

419 式 (3.11) の最後の 2 項はパッシブトレーサーの等密度面混合を表す\*3.1。これらの項を導くには  
 420 次のような変形式を式 (3.9) の最後の項に適用する。

$$421 \quad \begin{aligned} \frac{\nabla \tilde{A}}{\tilde{z}_\rho} &= \nabla \left( \frac{\tilde{A}}{\tilde{z}_\rho} \right) - \tilde{A} \nabla \left( \frac{1}{\tilde{z}_\rho} \right) \\ 422 \quad &= \nabla \left( \frac{\tilde{A}}{\tilde{z}_\rho} \right) + \left( \frac{\tilde{A}}{\tilde{z}_\rho} \right) \frac{\nabla \tilde{z}_\rho}{\tilde{z}_\rho} \\ 423 \quad &= \nabla \left( \frac{\tilde{A}}{\tilde{z}_\rho} \right) + \left( \frac{\tilde{A}}{\tilde{z}_\rho} \right) \frac{\partial \nabla \tilde{z}}{\partial \tilde{z}} \\ 424 \quad &= \nabla^\epsilon \left( \frac{\tilde{A}}{\tilde{z}_\rho} \right) + (\nabla \tilde{z}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{\tilde{A}}{\tilde{z}_\rho} \right) + \left( \frac{\tilde{A}}{\tilde{z}_\rho} \right) \frac{\partial \nabla \tilde{z}}{\partial \tilde{z}} \\ 425 \quad &= \nabla^\epsilon \left( \frac{\tilde{A}}{\tilde{z}_\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{\tilde{A}}{\tilde{z}_\rho} \nabla \tilde{z} \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

426  $\tilde{A}$  は密度座標系内で平均された任意の物理量である。式 (3.12) の最初の行は密度座標系の偏微分  
 427 で書かれていて、最後の行は  $\tilde{z}$  座標系の偏微分で書かれている。

\*3.1 擾乱フラックスが海面と海底でゼロになる事を示すには (海面と海底で  $z_\rho^\epsilon = 0$  であると言いたいところだが現実的には  
 そうはいかないので)、Aiki and Richards (2008) のように改良型の密度座標系  $(x, y, s, t)$  [i.e.,  $\rho = s$  for  $\rho_{top} < s < \rho_{btm}$ ,  
 $\rho = \rho_{top}$  for  $s \leq \rho_{top}$ ,  $\rho = \rho_{btm}$  for  $s \geq \rho_{btm}$ ] を導入してから、厚さ  $z_s^\epsilon$  が海面と海底でゼロになる事を利用する。

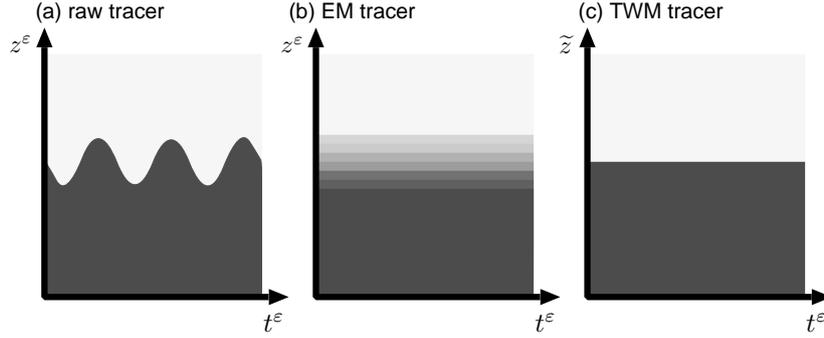


図 3.1: (a) 二色トレーサーの鉛直分布の時間変化の模式図. (b) Euler 平均量の分布. (b) 密度座標系における重み付け平均量を  $\tilde{z}$  座標系に射影した後の分布. Aiki and Yamagata (2006).

428 式 (3.11) と Euler 平均したパッシブトレーサーの式を比較してみよう。

$$429 \quad [\partial_{t^\epsilon} + \bar{\mathbf{V}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon + \bar{w}^\epsilon \partial_{z^\epsilon}] \bar{S}^\epsilon + \nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{V}}^\epsilon S'^\epsilon) + \partial_{z^\epsilon} (\bar{w}^\epsilon S'^\epsilon) = 0 \quad (3.13)$$

430 まず式 (3.11) の予報変数は  $\hat{S}$  であるのに対し、式 (3.13) の予報変数は  $\bar{S}^\epsilon$  になっている。両者の  
 431 違いを理解するために、図 3.1a のような 2 色トレーサーの擾乱を考えよう。Euler 平均したトレー  
 432 サー (図 3.1b) は 2 色の境界をなまらせたものである。重み付け平均したトレーサー (図 3.1c) は  
 433 2 色の境界のコントラストを保ったまま擾乱を取り除いたものである。元の式に戻って比較を続け  
 434 ると、式 (3.11) の移流項は全輸送速度 ( $\hat{\mathbf{V}}, \hat{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{z}$ ) に基づいているのに対し、式 (3.13) の移  
 435 流項は Euler 平均速度 ( $\bar{\mathbf{V}}^\epsilon, \bar{w}^\epsilon$ ) に基づいている。また式 (3.11) の擾乱相関フラックスは時間平均  
 436 した等密度面の傾きに沿っているのに対し、式 (3.13) の擾乱フラックスの向きにはそのような制  
 437 限がない。言い換えると Euler 平均系した式は見かけの鉛直混合を含んでいる。これは図 3.1b の  
 438 Euler 平均トレーサーがなまってしまっている事に対応する。

### 439 3.3 等密度面の深さの時間平均

440 式 (3.11) に  $S = \rho$  を代入すると、

$$441 \quad [\partial_{t^\epsilon} + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla^\epsilon + (\hat{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{z}) \partial_{\hat{z}}] \hat{\rho} = 0 \quad (3.14)$$

442 が得られる。なぜ擾乱フラックス項が消えたかという各密度面で  $\rho$  は定数 (i.e.  $\rho'' = \rho''' = 0$ )  
 443 だからである。密度座標系では  $\rho$  を平均量なのか擾乱量なのか区別する必要がない。しかし  $\rho$  を  $\tilde{z}$   
 444 座標系に射影した時は  $\hat{\rho} = \hat{\rho}(x^\epsilon, y^\epsilon, \tilde{z}, t^\epsilon)$  と表記した方が平均量であることが分かりやすい。それ  
 445 が式 (3.14) の  $\hat{\rho}$  の意味である。

446 密度はパッシブトレーサーの一種なので、 $\hat{\rho}$  と  $\bar{\rho}^\epsilon$  の違いは図 3.1 を使ってある程度理解できる。  
 447 さらについでに連続成層している場合を考えよう。図 3.2a は擾乱を含む密度  $\rho = \rho(t^\epsilon, z^\epsilon)$  その  
 448 ものである。コンターは密度の等値線を表す。図 3.2b は Euler 平均密度  $\bar{\rho}^\epsilon$  で、その海面における  
 449 値  $\bar{\rho}^\epsilon|_{z^\epsilon=0}$  は図 3.2a の赤線の密度と同じになり、海底における値  $\bar{\rho}^\epsilon|_{z^\epsilon=-H_b}$  は図 3.2a の青線の密  
 450 度と同じになる。図 3.2c が  $\hat{\rho}$  である。すなわち各密度面の時間平均した深さ  $\tilde{z}$  に基づいて図 3.2a  
 451 の  $\rho$  を再配置した物である。図 3.2a 上での領域 A, B, C の面積の比率が、図 3.2c ではきちんと再現  
 452 されていることが確認できる。その結果、 $\hat{\rho}$  のコンターの間隔は海面近くと海底近くで密になって  
 453 いる。すなわち成層がきつくなっているのである (Killworth, 2001)。

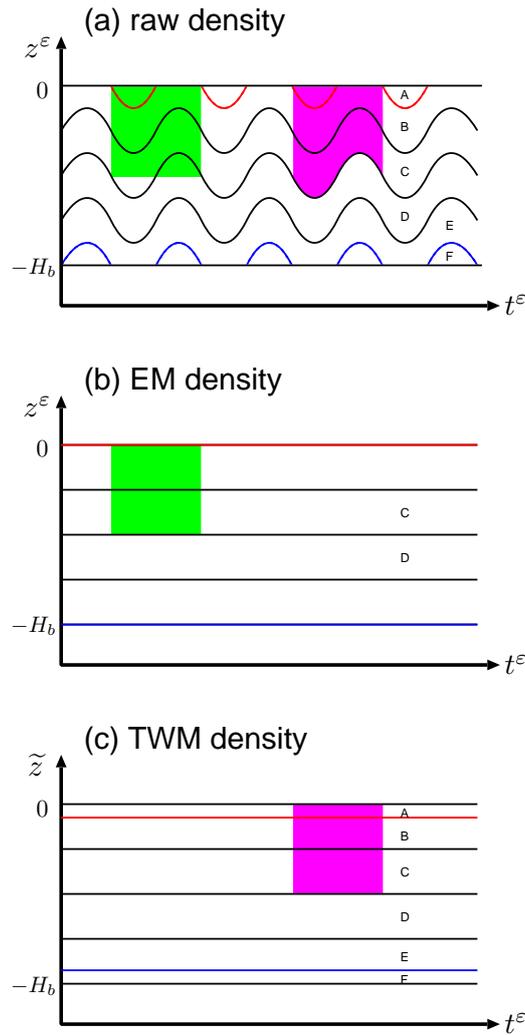


図 3.2: コンターは (a) 連続成層中の密度擾乱の鉛直分布の時間変化の模式図, (b) Euler 平均密度の分布, (b) 各密度面の高さを密度座標系で時間平均した後の分布を表す. 緑色の領域は Euler 平均した静水圧が参照する積分領域, 紫色の領域は密度座標系で平均した静水圧が参照する積分領域.

454 境界条件も興味深い。まず、図 3.2a で一番軽い水粒子は領域 A の海面に接した部分に点として  
 455 現れ、一番重い水粒子は領域 F の海底に接した部分に点として現れることに注意しよう。一番軽い  
 456 水粒子の密度を  $\rho_{min}$ 、一番重い水粒子の密度を  $\rho_{max}$  と書くことにする。一番軽い水粒子は図 3.2a  
 457 では海面に接しているの、その瞬間的な深さは必ず  $z^\epsilon = 0$  である。次にこの一番軽い水粒子が  
 458 図 3.2c のどの深さに射影されるのか考える。もちろんそれは  $\tilde{z} = 0$  である。つまり一番軽い水粒  
 459 子については必ず  $z''' = z^\epsilon - \tilde{z} = 0$  なのである。言い換えると、平均した深さが  $\tilde{z} = 0$  になるよう  
 460 な水粒子は、その深さの擾乱成分が必ず  $z''' = 0$  であり、その密度は  $\rho_{min}$  である。同様に、平均  
 461 した深さが  $\tilde{z} = -H_b$  になるような水粒子について考えると、その深さの擾乱成分が必ず  $z''' = 0$   
 462 であり、その密度は  $\rho_{max}$  である (McDougall and McIntosh, 2001)。

### 3.4 積み重ね則 (AY06)

任意の物理量  $A$  に対して、その Euler 平均量と重み付け平均量の水深積分は常に等しい。

$$\int_{-H_b}^0 \overline{A^\epsilon} dz^\epsilon = \int_{-H_b}^0 \overline{A} dz^\epsilon = \int_{\rho_{max}}^{\rho_{min}} \overline{Az_\rho^\epsilon} d\rho = \int_{\rho_{max}}^{\rho_{min}} \overline{Az_\rho^\epsilon} d\rho = \int_{\rho_{max}}^{\rho_{min}} \widehat{A} \widetilde{z}_\rho d\rho = \int_{-H_b}^0 \widehat{A} d\widetilde{z} \quad (3.15)$$

密度座標系での積分区間については、 $\rho_{min} < \rho_{max}$  であるので鉛直積分の向きが逆になっているように見えるが、これは  $z_\rho^\epsilon < 0$  であることと相殺するようになっている。

式 (3.15) は「積み重ね則 (pile-up rule)」と呼ばれ、非常に多くの事を説明することができる。例えば、位置エネルギー  $A = (g/\rho_0)\rho z^\epsilon$  を式 (3.15) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \overline{\rho^\epsilon} z^\epsilon dz^\epsilon &= \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \frac{\overline{z_\rho^\epsilon \rho z^\epsilon}}{\widetilde{z}_\rho} d\widetilde{z} \\ &= \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \widehat{\rho} \frac{(\widetilde{z}_\rho + z_\rho''')(\widetilde{z} + z''')^\epsilon}{\widetilde{z}_\rho} d\widetilde{z} \\ &= \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \widehat{\rho} \frac{(\widetilde{z}_\rho \widetilde{z} + z_\rho''' z''')^\epsilon}{\widetilde{z}_\rho} d\widetilde{z} \\ &= \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \widehat{\rho} \widetilde{z} d\widetilde{z} + \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \widehat{\rho} \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left( \frac{z'''^2}{2} \right) d\widetilde{z} \\ &= \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \widehat{\rho} \widetilde{z} d\widetilde{z} - \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \widetilde{z}} \left( \frac{z'''^2}{2} \right) d\widetilde{z} \\ &= \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \widehat{\rho} \widetilde{z} d\widetilde{z} + \int_{-H_b}^0 \left( \frac{-g}{\rho_0 \widetilde{z}_\rho} \right) \frac{z'''^2}{2} d\widetilde{z}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

が得られる。最後の行の第2項は常に正であり、式 (1.8a) の  $\mathcal{P}^{\text{eddy}}$  に対応する。図 3.1 や図 3.2 に示したとおり、重み付け平均密度  $\widehat{\rho}$  の方が Euler 平均密度  $\overline{\rho^\epsilon}$  より成層がきつい。このため前者に基づく PE の方が後者に基づく PE より常に小さいのである。

運動エネルギー  $A = (1/2)|\mathbf{V}|^2$  を式 (3.15) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-H_b}^0 (|\overline{\mathbf{V}^\epsilon}|^2 + |\overline{\mathbf{V}'^\epsilon}|^2) dz^\epsilon &= \frac{1}{2} \int_{-H_b}^0 \overline{|\mathbf{V}|^2} dz^\epsilon \\ &= \frac{1}{2} \int_{-H_b}^0 \frac{\overline{z_\rho^\epsilon |\mathbf{V}|^2}}{\widetilde{z}_\rho} d\widetilde{z} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-H_b}^0 \frac{\overline{z_\rho^\epsilon |\widehat{\mathbf{V}} + \mathbf{V}''|^2}}{\widetilde{z}_\rho} d\widetilde{z} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-H_b}^0 \left( |\widehat{\mathbf{V}}|^2 + \frac{\overline{z_\rho^\epsilon |\mathbf{V}''|^2}}{\widetilde{z}_\rho} \right) d\widetilde{z}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる。左辺は Euler 平均系における運動エネルギーの分割式 (1.8b) に対応し、右辺の最後の行は 2層モデルにおける運動エネルギーの分割式 (2.4b) に対応する。第2章で説明したとおり、 $\widehat{\mathbf{V}}$  は Lagrange 平均速度 (= Euler 平均速度 + Stokes ドリフト速度) に相当するので、Euler 平均系と密度座標における平均系では平均 KE と擾乱 KE の物理的な配分が変えられている。

### 3.5 重み付け平均された運動量の式

3次元 Euler 座標系の運動量の式 (1.1c) と静力学<sup>\*3.2</sup>の式 (1.1d) に連鎖律 (3.3) を代入すると

$$(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + f \mathbf{z} \times \mathbf{V} = -\nabla p + p_{z^\epsilon} \nabla z^\epsilon = -\nabla \varphi, \quad (3.18a)$$

$$0 = -\partial_\rho p - (g/\rho_0) \rho z_\rho^\epsilon = -\partial_\rho \varphi + (g/\rho_0) z^\epsilon, \quad (3.18b)$$

となる。記号  $\varphi \equiv p + (g/\rho_0) \rho z^\epsilon$  は Montgomery ポテンシャルである。層厚の式 (3.6a) と運動量の式 (3.18a) を組み合わせると、

$$\partial_t(z_\rho^\epsilon \mathbf{V}) + \nabla \cdot (z_\rho^\epsilon \mathbf{V} \mathbf{V}) + f \mathbf{z} \times (z_\rho^\epsilon \mathbf{V}) = -z_\rho^\epsilon \nabla \varphi = -(z^\epsilon \nabla \varphi)_\rho + z^\epsilon \nabla \varphi_\rho, \quad (3.19)$$

のように、フラックス発散型で書く事ができる。運動量の式 (3.19) と静力学の式 (3.18b) の時間平均をとると、層厚重み付け平均した運動方程式が得られる (Bleck, 1985)。

$$(\partial_t + \widehat{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{V}} + f \mathbf{z} \times \widehat{\mathbf{V}} = -\nabla \tilde{\varphi} + \mathcal{FS}^{\mathbf{V}} - \mathcal{RS}^{\mathbf{V}}, \quad (3.20a)$$

$$\partial_\rho \tilde{\varphi} = (g/\rho_0) \tilde{z}, \quad (3.20b)$$

Reynolds 応力項<sup>\*3.3</sup>と形状応力項は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{RS}^{\mathbf{V}} &\equiv \frac{1}{\tilde{z}_\rho} \nabla \cdot (z_\rho^\epsilon \overline{\mathbf{V} \mathbf{V}''}) \\ &= \nabla^\epsilon \cdot \left( \frac{z_\rho^\epsilon \overline{\mathbf{V} \mathbf{V}''}}{\tilde{z}_\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{\nabla \tilde{z} \cdot z_\rho^\epsilon \overline{\mathbf{V} \mathbf{V}''}}{\tilde{z}_\rho} \right), \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{FS}^{\mathbf{V}} &\equiv \frac{1}{\tilde{z}_\rho} [-\overline{(z'''' \nabla \varphi''')} ]_\rho + (g/\rho_0) \nabla (\overline{z''''^2}/2) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{\overline{z'''' \nabla \varphi'''}}{\tilde{z}_\rho} - \frac{(g/\rho_0) \overline{(z''''^2)/2}}{\tilde{z}_\rho} \nabla \tilde{z} \right) - \nabla^\epsilon \left( \frac{g}{2\rho_0} \frac{\overline{z''''^2}}{(-\tilde{z}_\rho)} \right), \end{aligned} \quad (3.21b)$$

式 (3.21a) と式 (3.21b) それぞれについて、一行目は密度座標系の偏微分で書かれていて、2行目は  $\tilde{z}$  座標系の偏微分で書かれている [式 (3.12) を使った]。式 (3.21b) の最後の行の第1項は運動量の鉛直再分配を表し第2項は擾乱 PE の水平勾配になっている。これは2層モデルの形状応力項 (2.10a)-(2.10b) とよく似ている。第3.3節で説明したとおり  $\tilde{z} = 0$  と  $\tilde{z} = -H_b$  では必ず  $z'''' = 0$  になることから、式 (3.21b) の鉛直フラックスは海面と海底で必ずゼロになる。これは海底斜面の有無に関わらず成り立つ。

重み付け平均された運動量の式 (3.20a) の圧力勾配項は等密度面微分で書かれている。 $\tilde{z}$  座標系における微分を書き換えるには、連鎖律 (3.10) と  $\tilde{\varphi}_z = \tilde{\varphi}_\rho / \tilde{z}_\rho = (g/\rho_0) \tilde{z} \hat{\rho}_z$  を使って [式 (3.20b) 参照]、

$$\begin{aligned} -\nabla \tilde{\varphi} &= -\nabla^\epsilon \tilde{\varphi} - (\nabla \tilde{z}) \partial_{\tilde{z}} \tilde{\varphi} \\ &= -\nabla^\epsilon [\tilde{p} + (g/\rho_0) \tilde{\rho} \tilde{z}] - (g/\rho_0) (\nabla \tilde{z}) \tilde{z} \partial_{\tilde{z}} \hat{\rho} \\ &= -\nabla^\epsilon \tilde{p} - (g/\rho_0) \tilde{z} \nabla^\epsilon \hat{\rho} - (g/\rho_0) (\nabla \tilde{z}) \tilde{z} \partial_{\tilde{z}} \hat{\rho} \\ &= -\nabla^\epsilon \tilde{p} - (g/\rho_0) \tilde{z} \nabla \hat{\rho} \\ &= -\nabla^\epsilon \tilde{p}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

<sup>\*3.2</sup>第1章では静水圧のアノマリ-、 $p_{z^\epsilon} \equiv -(g/\rho_0)(\rho - \bar{\rho}^{85})$  を使ったが、本章以降では静水圧、 $p_{z^\epsilon} \equiv -(g/\rho_0)\rho$  を使う。

<sup>\*3.3</sup>この応力は層厚で重み付けされているので厳密には Favre 応力と呼ぶこともできる。

518 となる。右辺で  $\rho$  ではなく  $\hat{\rho}$  となっているのは、 $\tilde{z}$  座標系に射影した密度であることを強調してい  
 519 る。密度座標系で重みなし平均された静水圧  $\tilde{p}$  と Euler 平均した静水圧  $\bar{p}^\epsilon$  を比較すると、

$$520 \quad \tilde{p} \equiv (g/\rho_0) \overline{\int_{\rho} \rho z_{\rho}^{\epsilon} d\rho} = (g/\rho_0) \int_{\rho} \rho \tilde{z}_{\rho} d\rho = (g/\rho_0) \int_{\tilde{z}} \hat{\rho} d\tilde{z}, \quad (3.23a)$$

$$521 \quad \bar{p}^\epsilon \equiv (g/\rho_0) \int_{z^\epsilon} \bar{\rho}^\epsilon dz^\epsilon, \quad (3.23b)$$

522 となる。大まかにいうと、 $\tilde{p}$  は図 3.2 の紫色で塗られている部分の密度を積分量であり、 $\bar{p}^\epsilon$  は緑色  
 523 で塗られている部分の密度の積分量である。紫色と緑色の領域の面積は同じであるが、緑色の領域  
 524 の方がより重い水を含んでいる事がわかる。すなわち、同じ深さで比べると、 $\tilde{p} \leq \bar{p}^\epsilon$  となるので  
 525 ある。

### 526 3.6 まとめ

- 527 • 重み付け平均されたパッシブトレーサの保存式 (3.11) の予報変数は、Euler 平均量ではない。  
 528 TEM 理論のように Euler 平均量に対する時間発展式を立てるというこだわりはない。
- 529 • Euler 平均密度にくらべて重み付け平均密度の方が成層がきつくなる。これは擾乱 PE の定  
 530 義と関係している。
- 531 •  $z'''$  は海面と海底で 0 になる。海底斜面の有無とは関係しない。
- 532 • 数式展開の技法としては偏微分の連鎖律しか使っていない。傾圧渦による混合が断熱的であ  
 533 ると仮定したので  $m = 0$  とした。本来  $m$  が非断熱混合によって物質がゆっくりと密度面をま  
 534 たいでいくという効果を表すという風に覚えておくと、後で Andrews and McIntyre (1978)  
 535 の semi-Lagrange 座標系を学ぶ時に役に立つ。
- 536 • 密度座標系はうねっているが 3 次元速度  $(u, v, w)$  の基底ベクトルの向きには何ら手は加えて  
 537 いない。今後いろいろな Lagrange 座標系がでてくるが、 $(u, v, w)$  の基底ベクトルの向きを  
 538 変える事はない。

## 第4章 歴史的背景

千年スケールの全球海洋循環（グレートコンベヤーベルトなど）を数値モデルで再現するには水平解像度を粗くしなくてはならない。1980年代の計算機能力で実行可能な水平解像度は300 km程度であった。計算機の発達に伴って1990年代には200 km、2000年代には150 km、2010年代には100 km程度で実行可能となってきたが、未だに傾圧渦（直径10 km～100 km）を解像するにはほど遠い。サブグリッドスケールの傾圧渦の効果を表す為に、Gent and McWilliams (1990, 以下GM90) と Greatbatch and Lamb (1990, 以下GL90) という別々の手法が提案された。GM90の手法は、

- Euler 平均速度を予報変数とする系で必要となる。
- パッシブトレーサーの式の3次元移流項をパラメータ化する。
- Lorenz (1955) のエネルギーダイアグラムに基づいている（第1章）。
- 傾圧渦は非断熱混合（密度の鉛直混合）を起こさないと仮定する。
- 現状では世界の殆どの気候センターの数値モデルで使われている。
- 数値モデルの特性を重視した現実的な手法である。

という特徴がある。GL90の手法は、

- 全輸送速度を予報変数とする系で必要となる。
- 運動量の式の形状応力項をパラメータ化する。
- Bleck (1985) のエネルギーダイアグラムに基づいている（第2章）。
- 傾圧渦は非断熱混合（密度の鉛直混合）を起こさないと仮定する。
- 現状では世界の気候センターの数値モデルには殆ど使われていない。
- 海洋循環の理論を重視した理想的な手法である。

という特徴がある。2つの手法の1990年の原論文の段階では未完成であったが、その後20年あまりかけて理論基盤が整備された。特にボラス速度と準 Stokes 速度の理解の発展については（時系列を追って説明すると混乱の繰り返しになるので）数式上の事実関係だけを先に説明しよう。

## 4.1 ボーラス速度の欠点と準 Stokes 速度の利点

新しい連鎖律の式 (3.10) を層厚の式 (3.8a) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 0 &= (1/\tilde{z}_\rho)[(\partial_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla)\tilde{z}_\rho + \tilde{z}_\rho \nabla \cdot \hat{\mathbf{V}}] \\
 &= (1/\tilde{z}_\rho)[(\partial_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla)\tilde{z}]_\rho - (1/\tilde{z}_\rho)\hat{\mathbf{V}}_\rho \cdot \nabla \tilde{z} + \nabla \cdot \hat{\mathbf{V}} \\
 &= \nabla^\epsilon \cdot \hat{\mathbf{V}} + \partial_{\tilde{z}}(\tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z}),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

が得られる。最初の行は密度座標系の偏微分で書かれているが、最後の行は  $\tilde{z}$  座標系の偏微分で書かれている。全輸送速度は 3 次元非圧縮の条件を完全に満たすことが分かる (de Szoeke and Bennett, 1993)。

層モデルや密度座標系ではボーラス速度の水平成分しか現れないのでボーラス速度の鉛直成分については気にしない (第 2 章)。ところが  $\tilde{z}$  座標系で考えた場合いろいろな懸念が生じる。3 次元のボーラス速度は

$$\mathbf{V}^B \equiv \hat{\mathbf{V}} - \tilde{\mathbf{V}}, \tag{4.2a}$$

$$w^B \equiv \tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z} - \tilde{w}, \tag{4.2b}$$

のように全輸送速度と重みなし平均速度の差として定義することができる。ところがボーラス速度は 3 次元非圧縮の条件も満たさないし、傾圧性の条件も満たさない。

$$\nabla^\epsilon \cdot \mathbf{V}^B + \partial_{\tilde{z}} w^B = -(\nabla^\epsilon \cdot \tilde{\mathbf{V}} + \partial_{\tilde{z}} \tilde{w}) \neq 0, \tag{4.2c}$$

$$\int_{-H_b}^0 \mathbf{V}^B d\tilde{z} \neq 0, \tag{4.2d}$$

上記の非等号は「等号が成り立つ事の一般的な証明が存在しない」という論法に基づいている。

これらの欠点を克服するために導入されたのが準 Stokes 速度である<sup>\*4.1</sup>。この速度は全輸送速度と Euler 平均速度の差によって定義することができる (Aiki and Yamagata, 2006)。

$$\mathbf{V}^{qs} \equiv \hat{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{V}}^\epsilon, \tag{4.3a}$$

$$w^{qs} \equiv \tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z} - \bar{w}^\epsilon, \tag{4.3b}$$

このようにすると準 Stokes 速度は非圧縮の条件と傾圧性の条件の両方を満たす。

$$\nabla^\epsilon \cdot \mathbf{V}^{qs} + \partial_{\tilde{z}} w^{qs} = -(\nabla^\epsilon \cdot \bar{\mathbf{V}}^\epsilon + \partial_{\tilde{z}} \bar{w}^\epsilon) = 0, \tag{4.3c}$$

$$\int_{-H_b}^0 \mathbf{V}^{qs} d\tilde{z} = \int_{-H_b}^0 (\hat{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{V}}^\epsilon) d\tilde{z} = 0, \tag{4.3d}$$

これらの条件が意味する所は、準 Stokes 速度はオーバーターニング流線関数を使って表す事ができるということである。

$$\Psi^{qs} \equiv \int_{-H_b}^{\tilde{z}} (\hat{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{V}}^\epsilon) d\tilde{z}, \tag{4.4a}$$

$$\mathbf{V}^{qs} = \partial_{\tilde{z}} \Psi^{qs}, \tag{4.4b}$$

$$w^{qs} = -\nabla^\epsilon \cdot \Psi^{qs}, \tag{4.4c}$$

準 Stokes 速度は (傾圧渦、ロスビー波、内部重力波などの違いは問わず) さまざまな擾乱の効果を表す。準 Stokes 速度の定義式 (4.4a) は積分型で書かれているので擾乱が有限振幅であっても平均流に強いシアがあっても構わない。

<sup>\*4.1</sup>McDougall and McIntosh (2001) は準 Stokes 流線関数を  $\Psi^{qs} \equiv \int_{\tilde{z}}^{\tilde{z}+z'''} \mathbf{V} dz^\epsilon$  と定義した。

596 特に傾圧渦による擾乱を考えた場合、平均場の位置エネルギーを開放するように準 Stokes 速度  
597 が作用するはずである。式 (3.14), (4.3b), (4.4c) を使って位置エネルギーの式を導くと

$$\begin{aligned}
598 & (g/\rho_0)[(\widehat{\rho z})_{t^\epsilon} + \nabla^\epsilon \cdot (\widehat{\mathbf{V}} \widehat{\rho z}) + \partial_{z^\epsilon}((\bar{w}^\epsilon + w^{qs}) \widehat{\rho z})] \\
599 & = (g/\rho_0) \widehat{\rho} (\bar{w}^\epsilon + w^{qs}) \\
600 & = (g/\rho_0) [\widehat{\rho} \bar{w}^\epsilon - \widehat{\rho} (\nabla^\epsilon \cdot \Psi^{qs})] \\
601 & = (g/\rho_0) [\widehat{\rho} \bar{w}^\epsilon - \nabla^\epsilon \cdot (\widehat{\rho} \Psi^{qs}) + \Psi^{qs} \cdot \nabla^\epsilon \widehat{\rho}], \quad (4.5)
\end{aligned}$$

602 となる。最終行の最後の項の体積積分が負 ( $\int \int \int \Psi^{qs} \cdot \nabla^\epsilon \widehat{\rho} dz^\epsilon dy^\epsilon dx^\epsilon < 0$ ) になっていれば平均  
603 場の位置エネルギーが減少する (図 1.2 参照)。この積分不等式を満たす流線関数の一般解は 2 種  
604 類ある ( $\Psi^{qs} \propto -\nabla^\epsilon \widehat{\rho}$  と  $\partial_{z^\epsilon} \Psi^{qs} \propto \nabla^\epsilon \widehat{\rho}$ )。前者を導いたのが GM90 で、後者を導いたのが Aiki et  
605 al. (2004) である。

## 606 4.2 Euler 平均速度を予報変数とする系

607 千年スケールの全球海洋循環 (グレートコンベヤーベルトなど) を数値モデルで再現する際に  
608 は、密度躍層がなまらぬように細心の注意を払う必要がある。1980 年代の海洋モデルはサブグ  
609 リッドスケールの傾圧渦の効果を表す為に Fick 型の水平拡散を使って (温度や塩分のような) パッ  
610 シブトレーサーの時間発展を解いていた。このために数値的な非断熱混合 (密度の鉛直混合) が生  
611 じて密度躍層がなまってしまうという問題点があった。

612 この問題を解決するためにパッシブトレーサーを等密度面混合させるような手法 (Redi, 1982) が  
613 使われるようになった。これは式 (3.11) の最後の 2 項に対応するものである。しかしこれだけで  
614 は平均場の密度面の傾きに変化が生じない。式 (3.14) に示されているとおり、等密度面混合は平  
615 均場の密度分布の式には現れないからである。では、傾圧渦は等密度面混合の他にどのような役割  
616 を果たすのかを考えて、別々の答えを出したのが GM90 と GL90 である。

617 GM90 の場合、式 (3.5a) の重みなし平均を密度座標系でとり、

$$\begin{aligned}
618 & \tilde{z}_t + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z} - \tilde{w} = -\overline{\mathbf{V}''' \cdot \nabla z'''} \\
619 & = \nabla \cdot (\kappa^{\text{GM}} \nabla \tilde{z}), \quad (4.6)
\end{aligned}$$

620 右辺の 1 行目にある擾乱に関する項を、2 行目のように「密度面の深さ  $\tilde{z}$ 」の等密度面拡散という  
621 形でパラメータ化した。例えば図 1.3 や図 2.1a における上層と下層の境界面を横方向に拡散させ  
622 てやれば境界面が徐々に水平になっていくことが予想できる。GM90 拡散係数の値は  $1000 \text{ m}^2/\text{sec}$   
623 程度である。

624 式 (4.6) は密度座標系における運動の支配方程式の一部ではあるが、数値モデルは  $\tilde{z}$  座標系で書か  
625 れているので、式 (4.6) の 2 行目をどのように実装するのか考える必要がある。Gent et al. (1995)  
626 は、式 (4.6) の 2 行目に連鎖律の式 (3.10) を代入すると  $\nabla^\epsilon \cdot (\kappa^{\text{GM}} \nabla \tilde{z}) + (\nabla \tilde{z}) \cdot \partial_{z^\epsilon} (\kappa^{\text{GM}} \nabla \tilde{z})$  となる  
627 ことに着目して、次の様に書き換えた。

$$628 \quad [\partial_t + (\tilde{\mathbf{V}} + \mathbf{V}^B) \cdot \nabla] \tilde{z} = \tilde{w} + w^B, \quad (4.7a)$$

$$629 \quad \mathbf{V}^B = \partial_{z^\epsilon} (-\kappa^{\text{GM}} \nabla \tilde{z}), \quad \text{obsolete}, \quad (4.7b)$$

$$630 \quad w^B = -\nabla^\epsilon \cdot (-\kappa^{\text{GM}} \nabla \tilde{z}), \quad \text{obsolete}, \quad (4.7c)$$

631 このようにすると鉛直断面の流線関数 ( $-\kappa^{\text{GM}} \nabla \tilde{z}$ ) を用いてポアソン速度をパラメータ化している  
632 という風に解釈することができる。

633 数値モデルの予報変数が重みなし平均された速度であると仮定して、パッシブトレーサーの式に  
634 傾圧渦による移流効果を追加したのが、Gent et al. (1995) である。その支配方程式は、

$$635 \quad \left[ \partial_{t^\epsilon} + (\tilde{\mathbf{V}} + \mathbf{V}^B) \cdot \nabla^\epsilon + (\tilde{w} + w^B) \partial_{\tilde{z}} \right] \hat{S} = -\mathcal{R}S^S, \quad (4.8a)$$

$$636 \quad \left[ \partial_{t^\epsilon} + (\tilde{\mathbf{V}} + \mathbf{V}^B) \cdot \nabla^\epsilon + (\tilde{w} + w^B) \partial_{\tilde{z}} \right] \hat{\rho} = 0, \quad (4.8b)$$

$$637 \quad \nabla^\epsilon \cdot \tilde{\mathbf{V}} + \partial_{\tilde{z}} \tilde{w} = 0, \quad \text{obsolete} \quad (4.8c)$$

$$638 \quad (\partial_{t^\epsilon} + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla^\epsilon + \tilde{w} \partial_{\tilde{z}}) \tilde{\mathbf{V}} + f \mathbf{z} \times \tilde{\mathbf{V}} = -\nabla^\epsilon \tilde{p} + \dots, \quad \text{obsolete} \quad (4.8d)$$

$$639 \quad 0 = -\tilde{p}_{\tilde{z}} - (g/\rho_0) \hat{\rho}, \quad (4.8e)$$

640 である。式 (4.8a)-(4.8b) のボーラス速度  $(\mathbf{V}^B, w^B)$  は式 (4.7b)-(4.7c) のように GM90 パラメタリ  
641 ゼーションに基づく流線関数によって与えられる。1990 年代には世界中の気候センターの海洋モデ  
642 ルが上記の方程式系を採用し、海洋循環の再現性が著しく改善された (Griffies et al., 2000; Gent,  
643 2011)。

644 ところが後になって上記の方程式系にはいくつかの問題があることが分かった。

- 645 • 式 (4.8b) は重みなし平均速度が非圧縮であるとしているが、これは正しくない (前節参照)。
- 646 • 重みなし平均速度に対する時間発展式 (4.8c) には不正確な部分がある。
- 647 • 式 (4.7b)-(4.7c) を合わせると、ボーラス速度が非圧縮になるが、これは正しくない (前節  
648 参照)。
- 649 • ボーラス速度は傾圧性の条件を満たさない (前節参照)、 $(-\kappa^{\text{GM}} \nabla \tilde{z})$  を鉛直断面の流線  
650 関数とみなすのはおかしい。

651 これらの問題を解決するために、まず式 (4.3b), (4.4b)-(4.4c) を組み合わせて

$$652 \quad \begin{aligned} \tilde{z}_t + \overline{\mathbf{V}}^\epsilon \cdot \nabla \tilde{z} - \overline{w}^\epsilon &= w^{qs} - \mathbf{V}^{qs} \cdot \nabla \tilde{z} \\ &= -\nabla^\epsilon \cdot \Psi^{qs} - (\partial_{\tilde{z}} \Psi^{qs}) \cdot \nabla \tilde{z} \\ &= -\nabla \cdot \Psi^{qs}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

655 とする。この式の左辺は Euler 平均速度に基づいて書かれていることに注意しよう。このことによ  
656 り準 Stokes 速度の流線関数が自然な形で右辺に現れたのである。以上の考察に基づいて、現在世  
657 界各地の気候センターで使われている海洋数値モデルでは、数値モデルの予報変数が Euler 平均速  
658 度であると改心して次の支配方程式を解いている。

$$659 \quad \left[ \partial_{t^\epsilon} + (\overline{\mathbf{V}}^\epsilon + \mathbf{V}^{qs}) \cdot \nabla^\epsilon + (\overline{w}^\epsilon + w^{qs}) \partial_{\tilde{z}} \right] \hat{S} = -\mathcal{R}S^S, \quad (4.10a)$$

$$660 \quad \left[ \partial_{t^\epsilon} + (\overline{\mathbf{V}}^\epsilon + \mathbf{V}^{qs}) \cdot \nabla^\epsilon + (\overline{w}^\epsilon + w^{qs}) \partial_{\tilde{z}} \right] \hat{\rho} = 0, \quad (4.10b)$$

$$661 \quad \nabla^\epsilon \cdot \overline{\mathbf{V}}^\epsilon + \partial_{\tilde{z}} \overline{w}^\epsilon = 0, \quad (4.10c)$$

$$662 \quad (\partial_{t^\epsilon} + \overline{\mathbf{V}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon + \overline{w}^\epsilon \partial_{\tilde{z}}) \overline{\mathbf{V}}^\epsilon + f \mathbf{z} \times \overline{\mathbf{V}}^\epsilon = -\nabla^\epsilon \overline{p}^\epsilon - \nabla^\epsilon \cdot (\overline{\mathbf{V}}^\epsilon \overline{\mathbf{V}}^\epsilon) - \partial_{\tilde{z}} (\overline{w}^\epsilon \overline{\mathbf{V}}^\epsilon) \quad (4.10d)$$

$$663 \quad 0 = -\overline{p}_{\tilde{z}}^\epsilon - (g/\rho_0) \overline{\rho}^\epsilon, \quad (4.10e)$$

664 非圧縮の式 (4.10c)、運動量の式 (4.10d)、静力学の式 (4.10e) は Euler 平均系の式である (第 1 章)。  
665 式 (4.10a)-(4.10b) の準 Stokes 速度  $(\mathbf{V}^{qs}, w^{qs}) = (\partial_{\tilde{z}} \Psi^{qs}, -\nabla^\epsilon \cdot \Psi^{qs})$  は、GM90 パラメタリゼー  
666 ションの場合だと  $\Psi^{qs} = (-\kappa^{\text{GM}} \nabla \tilde{z}) = (\kappa^{\text{GM}} \nabla^\epsilon \hat{\rho} / \partial_{\tilde{z}} \hat{\rho})$  となる。しかし、実際にモデルを動かす場  
667 合には修正が必要である。

668 • 海洋の混合層など密度成層がない領域では分母の  $\partial_z \hat{\rho}$  がゼロになってしまうので、その影響  
669 が出ないようにその領域で  $\kappa^{\text{GM}}$  をゼロにする。

670 • 傾圧性の条件式 (4.3d) を満たす為に、 $\kappa^{\text{GM}}$  の値が海面と海底の近くでゼロになるように削る。

671 このようなチューニング作業にはいくつかの敷居値が必要となる。その任意性があるのは嬉しくな  
672 い。代案として流線関数を  $\partial_{z\bar{z}} \Psi^{qs} \propto \nabla^\epsilon \hat{\rho}$  の解から決定するよう提案したのが Aiki et al. (2004)  
673 である。現在の米国・地球流体力学研究所の海洋数値モデル (GFDL-MOM) では、GM90 の解と  
674 Aiki et al. (2004) の解の線形結合をとる手法を採用している (Ferrari et al., 2009)。

### 675 4.3 全輸送速度を予報変数とする系

676 この系はもはや数値モデルの支配方程式として使うには機を逃したので、数値実験結果の診断や  
677 理論の発展に使うしかない。特に南極環流の運動量収支 (Munk and Palmén, 1951; Johnson and  
678 Bryden, 1989) の理解に有効である。

$$679 \quad \left[ \partial_{t^\epsilon} + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla^\epsilon + (\tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z}) \partial_{\tilde{z}} \right] \hat{S} = -\mathcal{R}S^S, \quad (4.11a)$$

$$680 \quad \left[ \partial_{t^\epsilon} + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla^\epsilon + (\tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z}) \partial_{\tilde{z}} \right] \hat{\rho} = 0, \quad (4.11b)$$

$$681 \quad \nabla^\epsilon \cdot \hat{\mathbf{V}} + \partial_{\tilde{z}} (\tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z}) = 0, \quad (4.11c)$$

$$682 \quad \left[ \partial_{t^\epsilon} + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla^\epsilon + (\tilde{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{z}) \partial_{\tilde{z}} \right] \hat{\mathbf{V}} + f \mathbf{z} \times \hat{\mathbf{V}} = -\nabla^\epsilon \tilde{p} + \mathcal{F}S^{\mathbf{V}} - \mathcal{R}S^{\mathbf{V}}, \quad (4.11d)$$

$$683 \quad 0 = -\tilde{p}_{\tilde{z}} - (g/\rho_0) \hat{\rho}, \quad (4.11e)$$

684 Aiki and Richards (2008) と Aiki, Zhai and Greatbatch (2013) は図 2.3 のエネルギーサイクル  
685 を確かめる為に、水平解像度 0.1 度の全球海洋ハインドキャスト数値実験の結果 (Masumoto et  
686 al., 2004) を解析した。3 日毎の出力を密度座標系 (80 層) に射影し 4 年平均を施して、各種エネ  
687 ルギー変換率を算出した。全ての符号は平均 KE の収支に基づいている。重みなし平均速度によ  
688 る変換率 (図 4.1a,  $-\tilde{h} \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{\Phi}$ ) は海面と海底における Ekman 流の寄与を表し、全球で -0.77TW  
689 (1TW=10<sup>12</sup> watts) であるので風成 Ekman 流が平均 KE を平均 PE に変換する仕事のほうが卓越  
690 している。ポーラス速度による変換率 (図 4.1b,  $-\tilde{h} \mathbf{V}^B \cdot \nabla \tilde{\Phi}$ ) は渦残差によるオーバーターニング  
691 循環の寄与を表し、全球で +0.87TW なので (前述の風成 Ekman 流によって平均 PE に変換された)  
692 エネルギーがそっくり平均 KE に戻ってくる事を意味する。層厚形状応力による変換率 (図 4.1c,  
693  $-\hat{\mathbf{V}} \cdot \overline{h''' \nabla \Phi'''^e}$ ) は渦による運動量の鉛直再分配による寄与を表し、全球で -0.48TW なので確かに  
694 擾乱場へのカスケードを担っている。Reynolds 応力による変換率 (図 4.1d,  $-\hat{\mathbf{V}} \cdot [\nabla \cdot (\overline{h \mathbf{V}'' \mathbf{V}'''^e})]$ )  
695 は渦による運動量の水平再分配の寄与を表し、全球で -0.15TW なので、順/逆カスケード諸説あ  
696 るが、順カスケードの方が勝っている事を意味する。

### 697 4.4 Ertel の渦位の重み付け平均

698 水平方向の運動量の式 (3.18a) はベクトル不変型に書き直すと

$$699 \quad \partial_t \mathbf{V} + \mathbf{z} \times (z_\rho^e q \mathbf{V}) = -\nabla [\varphi + (1/2) |\mathbf{V}|^2], \quad (4.12)$$

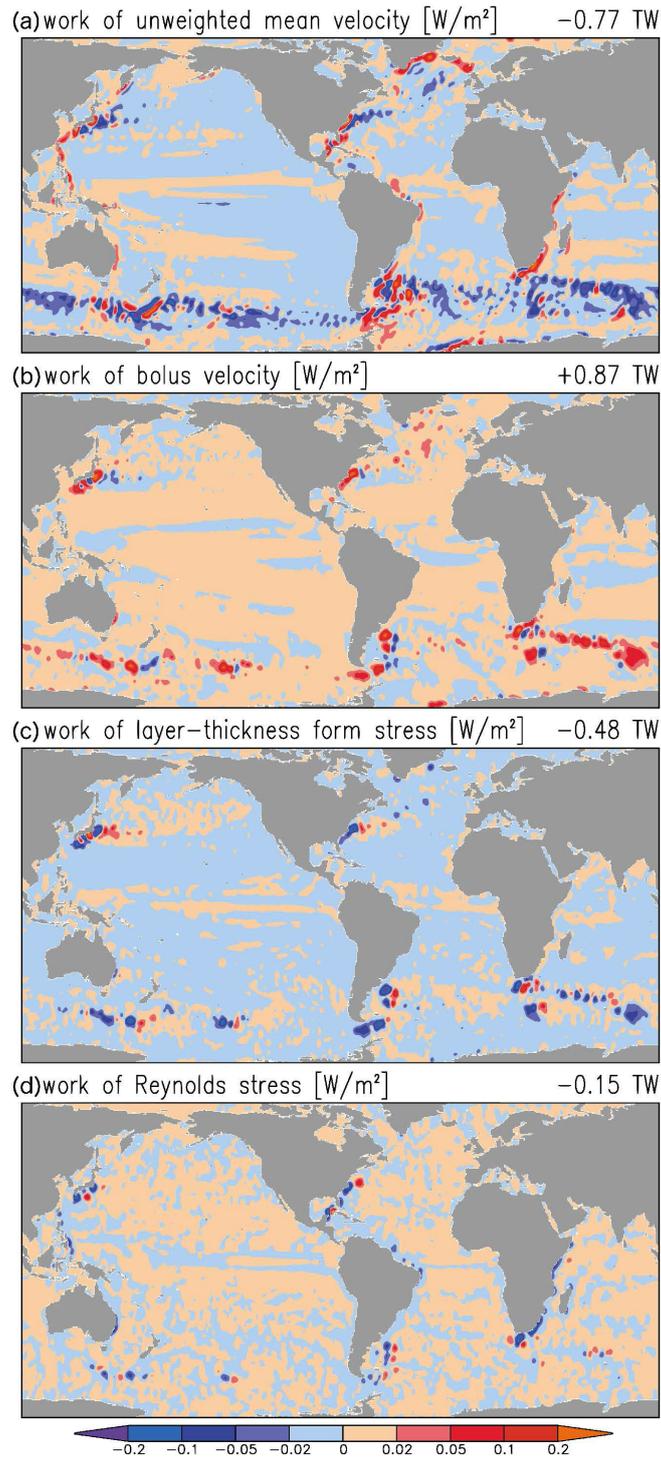


図 4.1: 密度座標系における時間平均を用いて算出した各種エネルギー変換率の水深積分 [W/m<sup>2</sup>]. (a)  $-\tilde{h} \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{\Phi}$ , (b)  $-\tilde{h} \mathbf{V}^B \cdot \nabla \tilde{\Phi}$ , (c)  $-\tilde{\mathbf{V}} \cdot \overline{h''' \nabla \Phi''^e}$ , (d)  $-\hat{\mathbf{V}} \cdot [\nabla \cdot (\overline{h \mathbf{V}''' \nabla \Phi''^e})]$ . 詳細は図 2.3 参照. Aiki, Zhai, and Greatbatch (2013).

700 となる。ここで Ertel の渦位 (EPV) は、

$$\begin{aligned}
701 \quad q &\equiv (f + v_{x^\epsilon} - u_{y^\epsilon})\rho_{z^\epsilon} - \rho_{x^\epsilon}v_{z^\epsilon} + \rho_{y^\epsilon}u_{z^\epsilon} \\
702 &= \frac{f + v_{x^\epsilon} - u_{y^\epsilon} + z_{x^\epsilon}^\epsilon v_{z^\epsilon} - z_{y^\epsilon}^\epsilon u_{z^\epsilon}}{z_\rho^\epsilon} \\
703 &= \frac{f + v_x - u_y}{z_\rho^\epsilon} \\
704 &= \frac{f + \nabla \times \mathbf{V}}{z_\rho^\epsilon}, \tag{4.13}
\end{aligned}$$

705 のように定義される。この式の最初の行は Euler 直交座標系の偏微分で書かれていて、最後の行は  
706 密度座標系の偏微分で書かれている。運動量の式 (4.12) の回転をとり、 $z_\rho^\epsilon q = f + v_x - u_y$  に注意  
707 すると、

$$708 \quad \underbrace{\partial_t(\nabla \times \mathbf{V})}_{=\partial_t(z_\rho^\epsilon q)} + \nabla \cdot (z_\rho^\epsilon q \mathbf{V}) = 0, \tag{4.14}$$

709 となる。渦度の式 (4.14) に層厚の式 (3.6a) を代入すると、Ertel の渦位の保存式が得られる。

$$710 \quad (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla)q = 0, \tag{4.15}$$

711 この式の重み付け平均を導くには、パッシブスカラーの保存式 (3.9) に  $S = q$  を代入すればよい。

$$712 \quad (\partial_t + \widehat{\mathbf{V}} \cdot \nabla)\widehat{q} + \frac{1}{\widetilde{z}_\rho} \nabla \cdot (z_\rho^\epsilon q'' \mathbf{V}''^\ell) = 0, \tag{4.16}$$

713 重み付け平均された EPV は

$$\begin{aligned}
714 \quad \widehat{q} &= \frac{z_\rho^\epsilon q^\ell}{\widetilde{z}_\rho} \\
715 &= \frac{f + \nabla \times \widetilde{\mathbf{V}}}{\widetilde{z}_\rho}, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

716 のように重みなし平均速度を基に定義されていることに注意しよう。積み重ね則 (3.15) に  $A = q$   
717 を代入すると、

$$718 \quad \int_{-H_b}^0 \widehat{q} d\widetilde{z} = \overline{\int_{-H_b}^0 q dz^\epsilon}, \tag{4.18}$$

719 であるので、 $\widehat{q}$  は EPV と密接に関係した量である。

720 重み付け平均された EPV の式 (4.16) を導出するには、もう一つの方法がある (Greatbatch, 1998;  
721 Smith, 1999)。運動量の式 (4.12) に密度座標系における重みなし平均を施すと、

$$722 \quad \partial_t \widetilde{\mathbf{V}} + \mathbf{z} \times (\widetilde{z}_\rho \widehat{\mathbf{V}} + \overline{z_\rho^\epsilon q'' \mathbf{V}''}) = -\nabla [\widetilde{\varphi} + (1/2)(|\widetilde{\mathbf{V}}|^2 + \overline{|\mathbf{V}''|^2}^\ell)], \tag{4.19}$$

723 となる。この式の回転をとると

$$724 \quad \underbrace{\partial_t(\nabla \times \widetilde{\mathbf{V}})}_{=\partial_t(\widetilde{z}_\rho \widehat{q})} + \nabla \cdot (\widetilde{z}_\rho \widehat{\mathbf{V}} + \overline{z_\rho^\epsilon q'' \mathbf{V}''}^\ell) = 0, \tag{4.20}$$

725 となる。この式に層厚の保存式 (3.8a) を代入すると重み付け平均された EPV の式 (4.16) が得られ  
726 る。式 (4.19)-(4.20) における渦位擾乱は

$$\begin{aligned}
727 \quad z_\rho^\epsilon q'' &= z_\rho^\epsilon (q - \hat{q}) \\
728 &= z_\rho^\epsilon q - z_\rho^\epsilon \hat{q} \\
729 &= f + \nabla \times \mathbf{V} - \frac{z_\rho^\epsilon}{\tilde{z}_\rho} (f + \nabla \times \tilde{\mathbf{V}}) \\
730 &= f + \nabla \times \mathbf{V} - \frac{\tilde{z}_\rho + z_\rho'''}{\tilde{z}_\rho} (f + \nabla \times \tilde{\mathbf{V}}) \\
731 &= \nabla \times \mathbf{V}''' - z_\rho''' \hat{q}, \tag{4.21}
\end{aligned}$$

732 のように書き直す事ができる。この式の最後の行は線形論における渦位擾乱に似ているが、式 (4.21)  
733 は擾乱の振幅に関する仮定は一切使っていない。

734 重み付け平均された運動量の式 (3.20a) から重みなし平均された運動量の式 (4.19) を引くと、成  
735 層流体中の様々な波動に対する疑運動量の時間発展式を導くことができる (Aiki et al., 執筆中)。本  
736 講義の第 2 部の用語で言うと、式 (3.20a) が直接型の運動量の式、式 (4.19) が変形型の運動量の式  
737 に対応すると考えられる。

## 738 4.5 新しい渦位 (Young, 2012)

739 重み付け平均された運動量の式 (3.20a) を、まずベクトル不変型に書き直し、次に密度座標系に  
740 における回転をとると

$$741 \quad \underbrace{\partial_t(\nabla \times \hat{\mathbf{V}})}_{\partial_t(\tilde{z}_\rho \Omega)} + \nabla \cdot (\tilde{z}_\rho \Omega \hat{\mathbf{V}}) = \nabla \times (\mathcal{F}\mathcal{S}^{\mathbf{V}} - \mathcal{R}\mathcal{S}^{\mathbf{V}}), \tag{4.22}$$

742 となる。記号  $\Omega$  は Young (2012) の平均渦位 (YMPV) と呼ばれ、次のように定義される。

$$743 \quad \Omega \equiv \frac{f + \nabla \times \hat{\mathbf{V}}}{\tilde{z}_\rho} \tag{4.23}$$

744 右辺の形は EPV の定義の式 (4.13) と形が似ているが、YMPV と EPV に直接関係がある訳ではな  
745 い。例えば、

$$746 \quad \int_{-H_b}^0 \Omega d\tilde{z} \neq \overline{\int_{-H_b}^0 q dz^\epsilon} \tag{4.24}$$

747 となる。この式の水深積分を体積積分に取り替えても等号は成り立たないであろう。YMPV の時間  
748 発展式を導くには、まず絶対渦度の式 (4.22) に層厚の式 (3.8a) を代入して、次に式 (3.12) を使う。

$$\begin{aligned}
749 \quad (\partial_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \Omega &= \frac{\nabla \times (\mathcal{F}\mathcal{S}^{\mathbf{V}} - \mathcal{R}\mathcal{S}^{\mathbf{V}})}{\tilde{z}_\rho} \\
750 &= \frac{\nabla \cdot [(\mathcal{F}\mathcal{S}^{\mathbf{V}} - \mathcal{R}\mathcal{S}^{\mathbf{V}}) \times \mathbf{z}]}{\tilde{z}_\rho} \\
751 &= \nabla^\epsilon \cdot \left[ \frac{(\mathcal{F}\mathcal{S}^{\mathbf{V}} - \mathcal{R}\mathcal{S}^{\mathbf{V}})}{\tilde{z}_\rho} \times \mathbf{z} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[ \frac{(\nabla \tilde{z}) \times (\mathcal{F}\mathcal{S}^{\mathbf{V}} - \mathcal{R}\mathcal{S}^{\mathbf{V}})}{\tilde{z}_\rho} \right], \tag{4.25}
\end{aligned}$$

752 右辺の 3 行目の [] の中身は 3 次元フラックスと解釈することができる。このフラックスがよい境界  
753 条件 (固定壁を横切る成分がないこと) を満たせば、YMPV は保存量となる。

## 754 4.6 まとめ

- 755 • Euler 平均速度を予報変数とする系は気候 (i.e. 水平解像度が粗くて傾圧渦を再現できない)  
756 海洋モデルの予報方程式に使われる。気候海洋モデルでは、トレーサー (温度、塩分、密度)  
757 については重み付け平均量 (図 3.1c) を予報変数としている。これは密度躍層 (図 1.3) を  
758 数値的になまらせないためである。
- 759 • 全輸送速度を予報変数とする系は高解像度 (i.e. 傾圧渦が再現できる) 海洋モデルの診断 (例  
760 えば南極環流の運動量収支解析) や理論の発展に使うことができる。
- 761 • 全輸送速度と重み付け平均速度は鉛直成分が異なる。非圧縮の条件を完全に満たすのは前者  
762 である。準 Stokes 速度は全輸送速度と Euler 平均速度の差なので非圧縮の条件を満たす。積  
763 み重ね則を使えば準 Stokes 速度が傾圧性の条件を満たすことが明らかである。
- 764 • ボーラス速度に若干の圧縮性があるのは重みなし平均速度に若干の圧縮性があるからである。  
765 ボーラス速度は傾圧性の条件を満たさない。

766 重み付け平均された EPV の長所と短所は

- 767 •  $\hat{q}$  が保存量であり、EPV と直接関係のある量であることは明らかである。
- 768 • 平均渦位の時間発展式 (4.16) や重みなし平均された運動量の式 (4.19) には、渦位擾乱の  
769 フラックス項があるので、準地衡渦度方程式を用いた古典的な研究と関連づけがしやすい  
770 (Bretherton, 1966)。
- 771 •  $\hat{q}$  は重みなし平均速度  $\tilde{\mathbf{V}}$  に基づいて定義されているので、重み付け平均した運動量の式 (3.20a)  
772 と関連づけがしにくい。

773 である。YMPV の長所と短所は

- 774 •  $\mathcal{Q}$  は重み付け平均速度  $\hat{\mathbf{V}}$  に基づいて定義されているので、重み付け平均した運動量の式 (3.20a)  
775 と関連づけしやすい。
- 776 • 式 (4.25) の最後の行にある 3次元フラックスがよい境界条件を満たすかどうか証明されてい  
777 ないので、 $\mathcal{Q}$  が保存量であるかどうかは定かでない。
- 778 •  $\mathcal{Q}$  の時間発展式 (4.25) には渦位擾乱のフラックスが出てこないなので、準地衡流渦度方程式を  
779 用いた古典的な研究との関連づけがしにくい。

780 である。

## 781 第5章 鉛直 semi-Lagrange 座標系

782 まず3次元 semi-Lagrange 座標系とは何なのかを説明しよう。大雑把にいうとこれは、まず流体  
783 粒子の運動を高周波数成分と低周波数成分に分解して、高周波成分の動きに対してだけ Lagrange  
784 座標系で、低周波数成分の動きについては Euler 座標系になるようにしたものである (Andrews  
785 and McIntyre, 1978)。3次元 semi-Lagrange 座標系は次章で説明するが、その下準備として本章  
786 では、鉛直 semi-Lagrange 水平 Euler 座標系を考える (Jacobson and Aiki, 2006)。これは前節の  
787 密度座標系すなわち鉛直 Lagrange 水平 Euler 座標系を改変したものである。流体粒子の軌跡を参  
788 照 (これが3次元 semi-Lagrange 座標系の考え方) するより、密度面の深さの時間変化を参照 (こ  
789 れが鉛直 semi-Lagrange 座標系の考え方) したほうが semi-Lagrange 座標系の本質や裏事情を簡  
790 単に理解できるというのが著者の持論である。

### 791 5.1 ラベリングの妙

792 まず本章の主題である鉛直 semi-Lagrange 水平 Euler 座標系を  $(x, y, z, t)$  と表すことにする。簡  
793 単の為にこれを鉛直 semi-Lagrange 座標系と呼ぶ。

794 次に図 5.1 のように各密度面 (黒線) の深さが振動しながらゆっくり鉛直上向きにドリフトする  
795 ような状況を考える。各密度面の深さの振動は傾圧渦による擾乱そのものを表す。密度面がゆっく  
796 りと上にドリフトしていくのは、例えば、その海域が大スケールの循環で湧昇域 (上層で水平発散  
797 かつ下層で水平収束) になっていると考えればよい。図 5.1 のフィルター窓の幅 (つまり時間平均  
798 のタイムスケール) は密度面の振動すなわち渦による擾乱を捉えるには十分であるが、密度面の  
799 上向きドリフトを捉える程の幅を持たない。

800 例えば3ヶ月平均という時間フィルターを考えよう。いわゆるランニング時間フィルターとは、  
801 2000年1月1日を中心とする3ヶ月平均、2000年1月2日を中心とする3ヶ月平均という風に、  
802 フィルター窓の中心時刻を少しずつずらして行く作業の事である。このように図 5.1 のフィルター  
803 窓を右側に少しずつスライドしていった時に何が起きるか考える。フィルター窓 A では時間平均  
804 した深さが  $z = -1500$  m になるような密度面は  $\rho = 1024.0$  kg/m<sup>3</sup> であるが、フィルター窓 B で  
805 は時間平均した深さが  $z = -1500$  m になるような密度面は  $\rho = 1025.0$  kg/m<sup>3</sup> にすり替わってい  
806 る。鉛直 semi-Lagrange 座標系のコンセプトとは、このように密度面の  $\rho$  の値が徐々にすり代わっ  
807 ていくのを許容しながら、絶えず時間平均した深さが値  $-1500$  m になるような密度面を探し続け  
808 て、つなぎ合わせることである。図 5.1 の各青線がそのような作業によって定義されている。結果  
809 として、図 5.1 の青線は密度面の短周期振動だけを捉えていて、密度面のゆっくりとした上向きド  
810 リフトの影響を受けない。最後に各青線の時間平均をとるとどうなるか考えよう。興味深い事に、  
811 各青線は  $z$  軸に平行な直線になるはずである。

812 以上の説明を数式を使って書き表そう。「各密度面 (黒線)」の瞬間的な深さは  $z^e(\rho, t)$  である。  
813 「時間平均した深さの値が  $z$  になるような密度面のつなぎ合わせ (青線)」の瞬間的な深さは  $z^e(z, t)$   
814 である。t は第3章で用いた密度座標系のフォントが使われていて、 $t$  は本章で導入した鉛直 semi-

815 Lagrange 座標系のフォントが使われている事に注意しよう。異なる記号（フォント）を使う事に  
 816 よって  $\partial z^\epsilon / \partial t \neq \partial z^\epsilon / \partial t$  といった関係を表す事ができる。左辺は図 5.1 の黒線の瞬間的な傾きなの  
 817 で上方ドリフト成分を含み、右辺は青線の瞬間的な傾きなのでドリフト成分を含まない。以上の作  
 818 業を水平座標の各固定点において行ったのが鉛直 semi-Lagrange 座標系である。つまり水平座標  
 819  $(x, y)$  を固定しながら、時刻  $t$  を中心とする時間フィルターを考える。時間平均した深さの値が  $z$   
 820 になるような密度面の瞬間的な深さを  $z^\epsilon = z^\epsilon(x, y, z, t)$  と表す。各青線の時間平均をとると  $t^\epsilon$  軸  
 821 に平行な直線になるので、

$$822 \quad \bar{z}^\epsilon = z, \quad (5.1a)$$

$$823 \quad z^\epsilon(x, y, z, t) = z + z'''(x, y, z, t), \quad (5.1b)$$

824 となる。ここで  $\bar{A}$  は任意の物理量  $A$  に対する  $z$  面に沿う時間平均、 $A''' \equiv A - \bar{A}$  はそれからのず  
 825 れである ( $z$  を固定して比較)。

826 鉛直 semi-Lagrange 座標系  $(x, y, z, t)$  から Euler 座標系  $(x^\epsilon, y^\epsilon, z^\epsilon, t^\epsilon)$  への変換は次のように書  
 827 くことができる。

$$828 \quad x^\epsilon = x, \quad y^\epsilon = y, \quad z^\epsilon = z^\epsilon(x, y, z, t), \quad t^\epsilon = t \quad (5.2)$$

829 両座標系間の偏微分の連鎖律は次のようになる。

$$830 \quad \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_x^\epsilon & 0 \\ 0 & 1 & z_y^\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & z_z^\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & z_t^\epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x^\epsilon} \\ \partial_{y^\epsilon} \\ \partial_{z^\epsilon} \\ \partial_{t^\epsilon} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

831 左辺が鉛直 semi-Lagrange 座標系における微分で、右辺の列ベクトルが Euler 座標系における微分  
 832 である。(5.3) を使うと、Euler 座標系の物質微分演算子  $\mathcal{D}_{t^\epsilon}$  を鉛直 semi-Lagrange 座標系の物質  
 833 微分演算子  $\mathcal{D}_t$  に書き換えることができる。

$$834 \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_{t^\epsilon} &\equiv \partial_{t^\epsilon} + \mathbf{V} \cdot \nabla^\epsilon + w \partial_{z^\epsilon} \\ &= \partial_{t^\epsilon} + u \partial_{x^\epsilon} + v \partial_{y^\epsilon} + w \partial_{z^\epsilon} \\ &= \partial_t + u \partial_x + v \partial_y + (w - z_t^\epsilon - u z_x^\epsilon - v z_y^\epsilon) \partial_{z^\epsilon} \\ &= \partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + (w - z_t^\epsilon - \mathbf{V} \cdot \nabla z^\epsilon) (1/z_z^\epsilon) \partial_z \\ &= \underbrace{\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \varpi \partial_z}_{\equiv \mathcal{D}_t}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

839 ここで  $\nabla \equiv (\partial_x, \partial_y)$  であり、さらに便宜上  $\varpi \equiv (w - z_t^\epsilon - \mathbf{V} \cdot \nabla z^\epsilon) / z_z^\epsilon$  という新しい鉛直流速を定  
 840 義した。この定義を書き直すと、

$$841 \quad (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \varpi \partial_z) z^\epsilon = w, \quad (5.5a)$$

842 となるので Euler 座標系における物質微分による鉛直流速の定義 ( $\mathcal{D}_{t^\epsilon} z^\epsilon = w$ ) と整合する。次に  
 843  $\partial_x z = \partial_y z = \partial_t z = 0$  である事に注意すると、

$$844 \quad (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \varpi \partial_z) z = \varpi, \quad (5.5b)$$

845 という  $\varpi$  の意味を解釈するのに便利な式が得られる。左辺は  $z$  の物質微分で書かれているので、  
 846 これは図 5.1 の各黒線をたどって見た時に青線を何本またぐかというの情報である。つまり  $\varpi$  は密

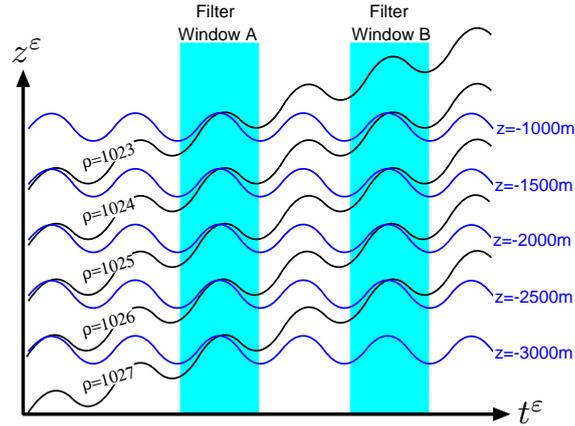


図 5.1: 鉛直 semi-Lagrange 座標系の鉛直断面の模式図 (青線) . 黒線が等密度面、青線は時間平均した深さの値が  $z$  になる流体粒子を集めて作った面を表す. 水色で塗られた領域は時間とともにスライドするフィルター窓を表す.

847 度面の深さの振動そのものによる速度ではなく、ゆっくりとした時間スケールの鉛直流によって、  
848 青線 ( $z$  が一定の線) を横切る流れ成分の速度を表す。最後に、式 (5.4) を式 (1.1a) に代入すると、

$$849 \quad (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \varpi \partial_z) \rho = 0, \quad (5.5c)$$

850 となる。最後に  $\partial_x z = \partial_y z = \partial_t z = 0$  であることに注意して (5.1a)-(5.1b) 式の偏微分をとると、

$$851 \quad (\overline{z_x^\epsilon}, \overline{z_y^\epsilon}, \overline{z_z^\epsilon}, \overline{z_t^\epsilon}) = (0, 0, 1, 0), \quad (5.6a)$$

$$852 \quad (z_x^\epsilon, z_y^\epsilon, z_z^\epsilon, z_t^\epsilon) = (z_x''', z_y''', 1 + z_z''', z_t'''), \quad (5.6b)$$

853 が得られる。層厚が時間平均すると 1 になるように規格化されているのが、鉛直 semi-Lagrange 座  
854 標系の一つの特徴である。さらに鉛直 semi-Lagrange 座標系における層厚は  $z_z^\epsilon (> 0)$  で符号が正な  
855 ので密度座標系のような煩わしさが無い。

856 以上をまとめると、各流体粒子をその深さの時間平均値  $z$  でラベル付けして、同じラベルを持つ  
857 流体粒子を集めて整理したのが鉛直 semi-Lagrange 座標系である。この場合、それぞれの流体粒子  
858 のラベル (つまり  $z$  の値) は時間とともに徐々に変わっていく。これは式 (5.5b) によって示され  
859 ている。これに対して、各流体粒子を密度の値  $\rho$  でラベル付けして、同じラベルをもつ流体粒子を  
860 集めて整理したのが密度座標系である。この場合、それぞれの流体粒子のラベル (つまり  $\rho$  の値)  
861 は時間変化しない。これは式 (3.5b) や式 (5.5c) によって示されている。

## 862 5.2 仕様と制約

863 任意の物理量  $A$  について、 $z$  面に沿う重み付け時間平均を  $\hat{A} \equiv \overline{z_z^\epsilon A}$ 、それからのずれを  $A'' \equiv A - \hat{A}$   
864 と表すことにする ( $z$  を固定して比較)。図 5.1 に示されているとおり、「 $z$  が一定の面 (青線) は密  
865 度面 (黒線) の振動成分のすべてを捉えている」というのが鉛直 semi-Lagrange 座標系の仕様であ  
866 るとも言えるので、

$$867 \quad \rho'' \equiv 0, \quad (5.7)$$

とする。図 5.1 のそれぞれの青線をたどると密度の値が徐々に変わっていく (ゆっくりと黒線をま  
たいでいく) ことは、 $\partial_t \rho = \partial_t \hat{\rho}$  であることと整合する。同様に式 (5.7) の条件を使うと式 (5.5c) を  
次のように分解する事ができる。

$$(\partial_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla + \hat{\omega} \partial_z) \hat{\rho} = 0, \quad (5.8a)$$

$$\mathbf{V}'' \cdot \nabla \hat{\rho} + \varpi'' \partial_z \hat{\rho} = 0, \quad (5.8b)$$

式 (5.8a) によると、重み付け平均された密度  $\hat{\rho}$  は、3次元ベクトル  $(\hat{\mathbf{V}}, \hat{\omega})$  による移流によつての  
み時間変化し、拡散しない (成層がなまっていけない)。つまり  $(\hat{\mathbf{V}}, \hat{\omega})$  が鉛直 semi-Lagrange 座標  
系における全輸送流速の表現となる。これは密度座標系における全輸送流速の表現  $(\hat{\mathbf{V}}, \hat{z}_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{z})$   
に比べると、いくらか洗練されている。

一方、式 (5.8b) によると、流速擾乱のベクトルは時間平均された密度面に沿わなければならない  
。式 (5.8b) を書き換えると  $\varpi'' = -(\mathbf{V}'' \cdot \nabla \hat{\rho}) / \hat{\rho}_z = \mathbf{V}'' \cdot \nabla \hat{z}$  となるので、密度面の深さの時間  
平均に傾きがある限り  $\varpi'' \neq 0$  である。これが式 (5.7) を採用したことによる制約である。現実の  
海洋の平均場の密度面の傾き  $|\nabla \hat{z}|$  は 1/1000 程度なので、 $|\varpi''|$  は  $|w''|$  より 1 桁程度小さいはずで  
ある。式 (5.5b) の説明で「 $\varpi$  は密度面の振動そのものによる速度ではなく、 $z$  が一定の面を横切る  
遅い流れ成分を表す」と書いたが、これを真に受けると完全に  $\varpi'' = 0$  となってしまうので、これ  
はあくまでも期待にすぎず、大まかには正しいが厳密には正しくないという結論が得られる。

### 5.3 パッシブトレーサーの保存式

3次元 Euler 座標系で表された非圧縮の式 (1.1b) とパッシブトレーサー  $S$  の保存式を、連鎖律  
の式 (5.3) を使って書き換えると、

$$\partial_t (z_z^\epsilon) + \nabla \cdot (z_z^\epsilon \mathbf{V}) + \partial_z (z_z^\epsilon \varpi) = 0, \quad (5.9a)$$

$$\mathcal{D}_t^\epsilon S = \mathcal{D}_t S = (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \varpi \partial_z) S = 0, \quad (5.9b)$$

となる。式 (5.9a)-(5.10) を組み合わせれば、パッシブトレーサーの保存式をフラックス発散型で  
書くことができる。

$$\partial_t (z_z^\epsilon S) + \nabla \cdot (z_z^\epsilon \mathbf{V} S) + \partial_z (z_z^\epsilon \varpi S) = 0, \quad (5.10)$$

層厚の式 (5.9a) とトレーサーの式 (5.10) の時間平均をとると、

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{V}} + \hat{\omega}_z = 0, \quad (5.11a)$$

$$\partial_t \hat{S} + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{V}} \hat{S}) + \partial_z (\hat{\omega} \hat{S}) + \nabla \cdot (\overline{z_z^\epsilon \mathbf{V}'' S''}) + \partial_z (\overline{z_z^\epsilon \varpi'' S''}) = 0, \quad (5.11b)$$

鉛直 semi-Lagrange 座標系における全輸送速度  $(\hat{\mathbf{V}}, \hat{\omega})$  は、非圧縮の式 (5.11a) を満たす。密度座標  
系の対応する式 (4.1) に比べるとかなり明快である。式 (5.9a) と式 (5.11a) の原型は Iwasaki (2001)  
の式 (2.15) と式 (2.16) に示されている。非圧縮の式 (5.11a) をトレーサーの式 (5.11b) 代入する  
と、移流型の表現が得られる。

$$(\partial_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla + \hat{\omega} \partial_z) \hat{S} + \nabla \cdot (\overline{z_z^\epsilon \mathbf{V}'' S''}) + \partial_z (\overline{z_z^\epsilon \varpi'' S''}) = 0, \quad (5.12)$$

この式の擾乱フラックスの鉛直成分は ( $w''$  ではなく)  $\varpi''$  に基づいている。速度擾乱ベクトル  $(\mathbf{V}'', \varpi'')$   
は式 (5.16) を満たすので、式 (5.12) の擾乱フラックス項は等密度面混合を表す。

## 5.4 重み付け平均された運動量の式

3次元 Euler 座標系の運動量の式 (1.1c)-(1.1d) に鉛直 semi-Lagrange 座標系の連鎖律 (5.3) を代入すると

$$(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \varpi \partial_z) \mathbf{V} + f \mathbf{z} \times \mathbf{V} = -\nabla p + p_{z^\epsilon} \nabla z^\epsilon, \quad (5.13a)$$

$$0 = -\partial_z p - (g/\rho_0) z_z^\epsilon \hat{\rho}, \quad (5.13b)$$

が得られる<sup>\*3.2</sup>。  $\hat{\rho}$  になっているのは式 (5.7) による。鉛直 semi-Lagrange 座標系では Montgomery ポテンシャルを使うメリットがないので使われていない。非圧縮の式 (5.9a) と運動量の式 (5.13a) を組み合わせると

$$(z_z^\epsilon \mathbf{V})_t + \nabla \cdot (z_z^\epsilon \mathbf{V} \mathbf{V}) + (z_z^\epsilon \varpi \mathbf{V})_z + f \mathbf{z} \times z_z^\epsilon \mathbf{V} = -z_z^\epsilon \nabla p + p_z \nabla z^\epsilon, \quad (5.14)$$

となる。フラックス発散型の運動量の式 (5.14) と静力学の式 (5.13b) の時間平均をとると、

$$\hat{\mathbf{V}}_t + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}) + (\hat{\varpi} \hat{\mathbf{V}})_z + f \mathbf{z} \times \hat{\mathbf{V}} = -\nabla \bar{p} + \mathcal{FS}^{\mathbf{V}} - \mathcal{RS}^{\mathbf{V}}, \quad (5.15a)$$

$$0 = -\bar{p}_z - (g/\rho_0) \hat{\rho}, \quad (5.15b)$$

が得られる。Reynolds 応力項は、

$$\mathcal{RS}^{\mathbf{V}} \equiv \nabla \cdot (\overline{z_z^\epsilon \mathbf{V} \mathbf{V} \mathbf{V}}) + (\overline{z_z^\epsilon \varpi \mathbf{V} \mathbf{V}})_z, \quad (5.16)$$

となる。形状応力項は、

$$\begin{aligned} \mathcal{FS}^{\mathbf{V}} &\equiv -\overline{z_z^{\prime\prime\prime} \nabla p^{\prime\prime\prime}} + \overline{p_z^{\prime\prime\prime} \nabla z^{\prime\prime\prime}} \\ &= -(\overline{z_z^{\prime\prime\prime} \nabla p^{\prime\prime\prime}})_z + \nabla (\overline{z_z^{\prime\prime\prime} p_z^{\prime\prime\prime}}) \\ &= -(\overline{z_z^{\prime\prime\prime} \nabla p^{\prime\prime\prime}})_z - \nabla [(g/\rho_0) \hat{\rho} \overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}] \\ &= -[\overline{z_z^{\prime\prime\prime} \nabla p^{\prime\prime\prime}} + \nabla ((g/\rho_0) \hat{\rho} \overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}/2)]_z + \nabla [((g/\rho_0) \hat{\rho} \overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}/2)_z - (g/\rho_0) \hat{\rho} \overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}] \\ &= -[\overline{z_z^{\prime\prime\prime} \nabla p^{\prime\prime\prime}} + \nabla (g \hat{\rho} \overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}/2)]_z + \nabla [(g/\rho_0) \hat{\rho} \overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}/2] \\ &= -[\overline{z_z^{\prime\prime\prime} (\nabla p^{\prime\prime\prime} + (g/\rho_0) \hat{\rho} \nabla z^{\prime\prime\prime})} + (\overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}/2) (g/\rho_0) \nabla \hat{\rho}]_z + \nabla [(g/\rho_0) \hat{\rho} \overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}/2] \\ &= -[\overline{z_z^{\prime\prime\prime} (\nabla p + (g/\rho_0) \hat{\rho} \nabla z^\epsilon)^{\prime\prime\prime}} - (\overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}/2) \nabla \bar{p}_z]_z + \nabla [(g/\rho_0) \hat{\rho} \overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}/2] \\ &= -[\overline{z_z^{\prime\prime\prime} (\nabla^\epsilon p)^{\prime\prime\prime}} - (\overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}/2) (\nabla \bar{p})_z]_z - \nabla [(-g/\rho_0) \hat{\rho} \overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}/2], \\ &= -[\overline{z_z^{\prime\prime\prime} (\nabla^\epsilon p)^{\prime\prime\prime}} - (\overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}/2) (\nabla^\epsilon \bar{p})_z]_z - \nabla [(-g/\rho_0) \hat{\rho} \overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}/2], \end{aligned} \quad (5.17)$$

となる。3行目の導出には式 (5.13b) の擾乱成分  $p_z^{\prime\prime\prime} = -(g/\rho_0) z_z^{\prime\prime\prime} \hat{\rho}$  を使った。最後の行の導出には

$$\overline{\nabla^\epsilon p} = \overline{\nabla p - p_{z^\epsilon} \nabla z^\epsilon} = \overline{\nabla p} + (g/\rho_0) \hat{\rho} \overline{\nabla z^{\prime\prime\prime}} = \overline{\nabla p} = \nabla \bar{p}, \quad (5.18)$$

を使った。密度座標系における形状応力項と比較してみよう。式 (3.21b) に式 (3.20b) を代入すると、

$$\mathcal{FS}^{\mathbf{V}} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \overline{z_z^{\prime\prime\prime} \nabla \varphi^{\prime\prime\prime e}} - (\overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}/2) \frac{\partial \nabla \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{z}} \right) - \nabla^\epsilon \left( \frac{g}{2\rho_0} \frac{\overline{z_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}}}{(-\tilde{z}_\rho)} \right), \quad (5.19)$$

となる。式 (5.19) に  $\nabla \varphi = \nabla^\epsilon p$  を代入すると式 (5.17) に対応する事が分かる。

## 932 5.5 積み重ね則

933 第3章で説明した積み重ね則 (3.15) とは、任意の物理量  $A$  に対して、その Euler 平均量の水深  
 934 積分と重み付け平均量の水深積分との間の恒等式であった。この恒等式は鉛直 semi-Lagrange 座標  
 935 系でも成り立つ。

$$936 \quad \int_{-H_b}^0 \overline{A}^\epsilon dz^\epsilon = \overline{\int_{-H_b}^0 A dz^\epsilon} = \overline{\int_{-H_b}^0 Az_z^\epsilon dz} = \int_{-H_b}^0 \overline{Az_z^\epsilon} dz = \int_{-H_b}^0 \hat{A} dz. \quad (5.20)$$

937 位置エネルギー  $A = (g/\rho_0)\rho z^\epsilon$  を式 (5.20) に代入すると、

$$\begin{aligned} 938 \quad \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \overline{\rho^\epsilon z^\epsilon} dz^\epsilon &= \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \overline{z_z^\epsilon \rho z^\epsilon} dz \\ 939 &= \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \overline{\hat{\rho}(1 + z_z''')(z + z''')} dz \\ 940 &= \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \hat{\rho}(z + \overline{z_z'''} z''') dz \\ 941 &= \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \hat{\rho}[z + (\overline{z''''^2}/2)_z] dz \\ 942 &= \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \hat{\rho} z dz - \frac{g}{\rho_0} \hat{\rho}_z (\overline{z''''^2}/2) dz \\ 943 &= \frac{g}{\rho_0} \int_{-H_b}^0 \hat{\rho} z dz + \int_{-H_b}^0 \left( -\frac{g \hat{\rho}_z}{\rho_0} \right) \frac{\overline{z''''^2}}{2} dz, \end{aligned} \quad (5.21)$$

944 となる。最後の行の第2項は常に正であり、式 (1.8a) の  $\mathbf{p}^{\text{eddy}}$  に対応する。式 (5.21) は式 (3.16)  
 945 に対応する。

946 本講義における準 Stokes 流速 ( $\mathbf{V}^{qs}, w^{qs}$ ) の定義は全輸送流速 ( $\hat{\mathbf{V}}, \hat{\omega}$ ) と 3次元 Euler 平均流速  
 947 ( $\overline{\mathbf{V}}^\epsilon, \overline{w}^\epsilon$ ) との差に基づいている

$$948 \quad \mathbf{V}^{qs} \equiv \hat{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{V}}^\epsilon \\ 949 \quad = \overline{\mathbf{V}} + \overline{z_z'''} \overline{\mathbf{V}'''} - \overline{\mathbf{V}}^\epsilon, \quad (5.22a)$$

$$950 \quad w^{qs} \equiv \hat{\omega} - \overline{w}^\epsilon \\ 951 \quad = \overline{w} - \overline{\mathbf{V}'''} \cdot \overline{\nabla z'''} - \overline{w}^\epsilon, \quad (5.22b)$$

952 また積み重ね則 (5.20) に水平速度  $A = \mathbf{V}$  を代入すると、

$$953 \quad \int_{-H_b}^0 \mathbf{V}^{qs} dz = \int_{-H_b}^0 (\hat{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{V}}^\epsilon) dz = 0, \quad (5.23)$$

954 のように、準 Stokes 速度が傾圧性の条件を満たす事が確認できる。式 (5.22a)-(5.23) は式 (4.3a)-  
 955 (4.3d) に対応する。

## 5.6 Euler 平均量の Taylor 近似

Taylor 展開を用いれば、任意の物理量  $A$  の Euler 平均を、鉛直 semi-Lagrange 座標系における平均量の和に書き換える事ができる (Aiki and Greatbatch, 2013a)。

$$\begin{aligned}
\bar{A}^\epsilon &= \bar{A} + \overline{(-z''') (A_z^\epsilon)} + \overline{(-z''')^2 (A_{zz}^\epsilon)} / 2 + \dots \\
&= \bar{A} - \overline{z'''' (A_z / z_z^\epsilon)} + \overline{z''''^2 [(A_z / z_z^\epsilon)_z / z_z^\epsilon]} / 2 + \dots \\
&\simeq \bar{A} - \overline{z'''' [(A_z + A_z'') (1 - z''')]} + \overline{(z''''^2 / 2) \bar{A}_{zz}} + \dots \\
&= \bar{A} - \overline{z'''' A_z'''} + \overline{(z''''^2 / 2)_z \bar{A}_z} + \overline{(z''''^2 / 2) \bar{A}_{zz}} + \dots \\
&= \bar{A} - \overline{z'''' A_z'''} + \overline{[(z''''^2 / 2) \bar{A}_z]}_z + \dots \\
&= \hat{A} - \overline{z'''' A_z'''} - \overline{z'''' A_z'''} + \overline{[(z''''^2 / 2) \bar{A}_z]}_z + \dots \\
&= \hat{A} + [-\overline{z'''' A_z'''} + \overline{(z''''^2 / 2) \bar{A}_z}]_z + \dots,
\end{aligned} \tag{5.24}$$

上記の変形は擾乱の 2 次の積についての精度を保つ<sup>\*5.1</sup>。式 (5.24) の水深積分をとり、海面 ( $z = 0$ ) と海底 ( $z = -H_b$ ) で  $z'''' = 0$  になることに注意すると、

$$\begin{aligned}
\int_{-H_b}^0 (\bar{A}^\epsilon - \hat{A}) dz &= [-\overline{z'''' A_z'''} + \overline{(z''''^2 / 2) \bar{A}_z}]_{z=-H_b}^{z=0} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.25}$$

が得られる。この式は積み重ね則 (5.20) そのものであり、

- 式 (5.24) の Taylor 展開が正しく計算されていること
- 海面 ( $z = 0$ ) と海底 ( $z = -H_b$ ) で  $z'''' = 0$  になること

の裏付けとなる<sup>\*5.2</sup>。

Euler 平均量の Taylor 近似式 (5.24) には様々な事例に応用することができる。例えば、式 (5.24) に位置エネルギー  $A = (g/\rho_0)\rho z^\epsilon$  を代入すると、

$$\begin{aligned}
(g/\rho_0)\bar{\rho}^\epsilon z^\epsilon &= (g/\rho_0)\overline{\rho z^\epsilon} \\
&= (g/\rho_0)\overline{z_z^\epsilon \rho z^\epsilon} + (g/\rho_0)[-\overline{z'''' (\rho z^\epsilon)'''} + \overline{(z''''^2 / 2) (\rho z^\epsilon)_z}]_z \\
&= (g/\rho_0)\overline{\hat{\rho} z_z^\epsilon z^\epsilon} + (g/\rho_0)[-\overline{\hat{\rho} z''''} + \overline{(z''''^2 / 2) (\hat{\rho} z^\epsilon)_z}]_z \\
&= (g/\rho_0)\hat{\rho}(z + \overline{z_z'''' z''''}) + (g/\rho_0)[-\overline{\hat{\rho} z''''} + \overline{(z''''^2 / 2) (\hat{\rho}_z z + \hat{\rho})}]_z \\
&= (g/\rho_0)\hat{\rho} z + (g/\rho_0)\hat{\rho} z \overline{(z''''^2 / 2)}_z + (g/\rho_0)[-\overline{\hat{\rho} (z''''^2 / 2)} + \overline{(z''''^2 / 2) \hat{\rho}_z z}]_z \\
&= (g/\rho_0)\hat{\rho} z + (-g\hat{\rho}_z / \rho_0) \overline{(z''''^2 / 2)} + [(g/\rho_0) \overline{(z''''^2 / 2) \hat{\rho}_z z}]_z,
\end{aligned} \tag{5.26}$$

となる。第 1 章で平均 PE を式 (1.8a) のように定義したが、式 (5.26) を使って、 $\mathcal{P}^{\text{mean}}$  を  $(g/\rho_0)\bar{\rho}^\epsilon z^\epsilon - (-g\hat{\rho}_z / \rho) \overline{(z''''^2 / 2)} = (g/\rho_0)\hat{\rho} z + [(g/\rho_0) \overline{(z''''^2 / 2) \hat{\rho}_z}]_z$  と解釈する事ができる。次に、静水圧を式 (5.24)

<sup>\*5.1</sup>例えば式 (5.24) の最後の行の最後の項は既に  $\overline{(z''''^2 / 2)}$  が掛かっているのと同じ項内の  $\bar{A}_z$  を  $\hat{A}_z$  に取り替えても項全体として擾乱の 2 次の積についての精度が保たれる。

<sup>\*5.2</sup>(i) 積み重ね則が成り立つ事と (ii) 境界条件が  $z = 0$  と  $z = -H_b$  で  $z'''' = 0$  になる事は同じ前提条件の上に成り立っている。それは  $z^\epsilon$  と  $z$  のとり得る範囲 ( $-H_b$  から 0 まで) がぴったりと一致することである。この前提条件は時間平均を用いる限り必ず満たされる。ところが、気象学でよく用いられる東西帯状平均や海洋学でときおり使われる局所水平箱形平均 (boxed-car filter) などを用いる場合には、平均された物理量が存在する空間の海底地形は実空間の海底地形と同じにならないので注意が必要である。総括すると、平均量が存在する空間の海底地形と実空間の海底地形をぴったりと一致させる為には、時間平均かアンサンブル平均を使うのが妥当である。

984 に代入すると、

$$\begin{aligned}
985 \quad \bar{p}^\epsilon &= \hat{p} + [-z'''\overline{p'''} + (\overline{z''''/2})\bar{p}_z]_z \\
986 &= \hat{p} - z'''\overline{p'''} - \overline{z''''p'''} - [(\overline{z''''/2})(g/\rho_0)\hat{\rho}]_z \\
987 &= \bar{p} + (g/\rho_0)\hat{\rho}z'''\overline{z''''} - [(\overline{z''''/2})(g/\rho_0)\hat{\rho}]_z \\
988 &= \bar{p} + (-g\hat{\rho}_z/\rho_0)(\overline{z''''/2}), \tag{5.27}
\end{aligned}$$

989 のように、Euler 平均静水圧と重みなし平均静水圧の差が擾乱 PE になる事が分かる (Greatbatch  
990 and McDougall, 2003)。この結果は式 (3.23a)-(3.23b) と図 3.2 に関する説明と整合する。

991 形状応力項 (5.17) の水平勾配項に式 (5.27) と式 (5.18) を代入してから、 $\mathbf{G} \equiv -\nabla^\epsilon p$  とおくと、

$$\begin{aligned}
992 \quad \mathcal{FS}^{\mathbf{V}} &= [\overline{z''''(-\nabla^\epsilon p)'''} - (\overline{z''''/2})(-\nabla^\epsilon p)_z]_z - \nabla(\bar{p}^\epsilon - \bar{p}) \\
993 &= [\overline{z''''\mathbf{G}'''} - (\overline{z''''/2})\overline{\mathbf{G}}_z]_z + (-\nabla^\epsilon \bar{p}^\epsilon) - (-\nabla^\epsilon \bar{p}) \\
994 &= (\hat{\mathbf{G}} - \overline{\mathbf{G}}^\epsilon) + (\overline{\mathbf{G}}^\epsilon - \overline{\mathbf{G}}), \tag{5.28}
\end{aligned}$$

995 となる。最後の行の導出には Taylor 近似式 (5.24) を使った。

996  $A = \mathbf{V}$  を Taylor 近似式 (5.24) に代入すると、準 Stokes 速度の微分型での表現が得られる\*5.3。

$$997 \quad \mathbf{V}^{qs} \equiv \hat{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{V}}^\epsilon = [\overline{z''''\mathbf{V}'''} - (\overline{z''''/2})\overline{\mathbf{V}}_z]_z, \tag{5.29}$$

998 数値モデルで再現された傾圧渦の解析や理論の構築などにおいて、擾乱速度の統計的な地衡流平  
999 衡がどの程度成り立っているか考察するとしよう (Aiki and Richards, 2008)。重み付け平均され  
1000 た運動量の式 (5.15a) の Coriolis 項に含まれる  $f\mathbf{z} \times \mathbf{V}^{qs}$  と釣り合っているかどうか調べる相手の  
1001 項は、式 (5.28) の  $\hat{\mathbf{G}} - \overline{\mathbf{G}}^\epsilon = [\overline{z''''(-\nabla^\epsilon p)'''} - (\overline{z''''/2})(-\nabla^\epsilon p)_z]_z$  の部分 (鉛直フラックスの項) で  
1002 ある。式 (5.28) の  $\overline{\mathbf{G}}^\epsilon - \overline{\mathbf{G}}$  は擾乱 PE の水平勾配なので、式 (5.17) の最後の行の最後の項や、式  
1003 (3.21b) の最後の行の最後の項や、式 (2.10a)-(2.10b) の右辺第 2 項に対応する。

## 1004 5.7 まとめ

- 1005 • Taylor 展開をする時には必ず Euler 座標系における偏微分を使う。
- 1006 • (Euler 平均量の Taylor 近似を除いて) 第 3、4 章で密度座標系を用いて示した事を鉛直  
1007 semi-Lagrange 座標系で再確認しているに過ぎない。
- 1008 • 第 3 章で説明した作業を 2 段階処理 (一度密度座標系にもって行って平均をとってから  $\tilde{z}$  座  
1009 標系に戻す) と呼ぶとすれば、本章で説明した作業は 1 段階処理である。
- 1010 • 鉛直 semi-Lagrange 座標系を使えば式展開の手数が少なくなり、理論的な考察の見通しがつ  
1011 けやすくなる。
- 1012 • 実際に数値実験結果を診断するには第 3 章のような 2 段階処理を行う必要がある。
- 1013 • 「偏微分の連鎖律」、「積み重ね則」、「Euler 平均量の Taylor 近似」の 3 つが本講義の礎とな  
1014 る数式である。

\*5.3 式 (5.29) の鉛直積分量に近似式  $z'''' \sim -\rho'/\bar{p}_z^\epsilon$  と  $\mathbf{V}'''' \sim \mathbf{V}' + z''''\overline{\mathbf{V}}_z$  を代入すると準 Stokes 流線関数の近似式 (1.10) が得られる。近似式  $z'''' \sim -\rho'/\bar{p}_z^\epsilon$  は海面と海底から十分離れた深さでしか成り立たないことに注意しよう。

1015 **5.8 追記**

1016 3次元 Lagrange 平均流速を  $\overline{\mathbf{U}}^{\mathcal{L}} = (\overline{u}^{\mathcal{L}}, \overline{v}^{\mathcal{L}}, \overline{w}^{\mathcal{L}})$  と表す。Stokes ドリフト速度の厳密な定義は

1017 
$$\mathbf{U}^{Stokes} = \overline{\mathbf{U}}^{\mathcal{L}} - \overline{\mathbf{U}}^{\epsilon} \tag{5.30}$$

1018 である (Stokes, 1847)。非圧縮流体に話を限定したとしても、 $\overline{\mathbf{U}}^{\mathcal{L}}$  は圧縮性や壁面における境界条件  
 1019 について不確かな部分があるので注意が必要である。 $\mathbf{U}^{Stokes}$  にもついても同じ事が言える。Stokes  
 1020 ドリフト速度はまた 3次元の Taylor 展開を用いて定義することができる (Longuet-Higgins, 1953)。

1021 
$$\mathbf{U}^{Stokes} \simeq \overline{\int^{t^{\epsilon}} u' dt^{\epsilon} \mathbf{U}'_{x^{\epsilon}} + \int^{t^{\epsilon}} v' dt^{\epsilon} \mathbf{U}'_{x^{\epsilon}} + \int^{t^{\epsilon}} w' dt^{\epsilon} \mathbf{U}'_{z^{\epsilon}}}$$
  
 1022 
$$= \left( \overline{\int^{t^{\epsilon}} u' dt^{\epsilon} \mathbf{U}'} \right)_{x^{\epsilon}} + \left( \overline{\int^{t^{\epsilon}} v' dt^{\epsilon} \mathbf{U}'} \right)_{y^{\epsilon}} + \left( \overline{\int^{t^{\epsilon}} w' dt^{\epsilon} \mathbf{U}'} \right)_{z^{\epsilon}}, \tag{5.31}$$

1023 この式は 1 次のオーダーで Taylor 展開されているので、平均流のシアが強い場合には修正が必要  
 1024 である。一方、式 (5.24) や (5.29) は 2 次のオーダーで Taylor 展開されているので、平均流の鉛直  
 1025 シアが強い場合にも適用可能である。

## 第6章 3次元 semi-Lagrange 座標系

Andrews and McIntyre (1978a, 以下 AM78a) の一般化 Lagrange 平均 (GLM) 理論は3つ要素から成り立っている。

(a) 3次元 semi-Lagrange 座標系を使用 (本章で説明)

(b) 変形型の運動量方程式を使用 (次章で説明)

(c) 一般化疑運動量を考案 (次章で説明)

(a) についてはしばしば GLM 座標系と呼ばれたりするが、本講義の方針としては、一般化という決め台詞は (c) の疑運動量の素晴らしさを形容する時のためにとっておく。本章に限ってはすべて AM78a の数式記号を使って説明する。

AM78a は3次元 Euler 座標系を  $(\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, t)$ 、3次元 semi-Lagrange 座標系を  $(x_1, x_2, x_3, t)$  と表している。座標系の違いによらず同じ記号  $t$  を使って時間軸を表すのは数学的には誤りであるので、本講義では Euler 座標系の時間軸についてはできる限り  $t^\xi$  と記す事にする。任意の物理量  $A$  に対して

$$A(\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, t^\xi) = A^\xi(x_1, x_2, x_3, t), \quad (6.1)$$

と考えるのが AM78a の記法である。式 (6.1) の言わんとする所は、

- 肩字  $\xi$  が無い時は  $A$  の引数が3次元 Euler 座標系になっていて、肩字  $\xi$  がある時は  $A$  の引数が3次元 semi-Lagrange 座標系になっていると解釈する。
- 時刻  $t^\xi$  において瞬間的な位置が  $(\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3)$  である流体粒子が持つ  $A$  の値を、その流体粒子の時間的ローパスフィルターした位置  $(x_1, x_2, x_3)$  をラベルとして参照できるようにしたのが、3次元 semi-Lagrange 座標系である。

である。AM78a の式 (2.5) に

$$\Xi_i = x_i + \xi_i, \quad (6.2)$$

と書かれているので、 $x_i \equiv \overline{\Xi}_i^L$  と  $\xi_i \equiv 0$  という意味である。ここで  $L$  は3次元 semi-Lagrange 平均である。式 (6.2) は式 (5.1b) に対応する。図 6.1a のように3次元 semi-Lagrange 座標系の制御体積要素は縦にも横にも伸び縮みしながら回旋運動をする。

式 (6.1) の肩字  $\xi$  と、式 (6.2) の  $\xi_i$  は全く別物なので注意しよう。筆者の経験としては、被微分量  $A$  の記号を装飾して座標系を区別する (AM78a の記法) よりも、詳細なフォントや記号を使って偏微分演算子を陽に書き表して座標系を区別する (本講義の記法) 方が確実なので、式 (6.1) の肩字  $\xi$  はなくても構わない。その事は実際に第3-5章全般にわたって示したとおりである。

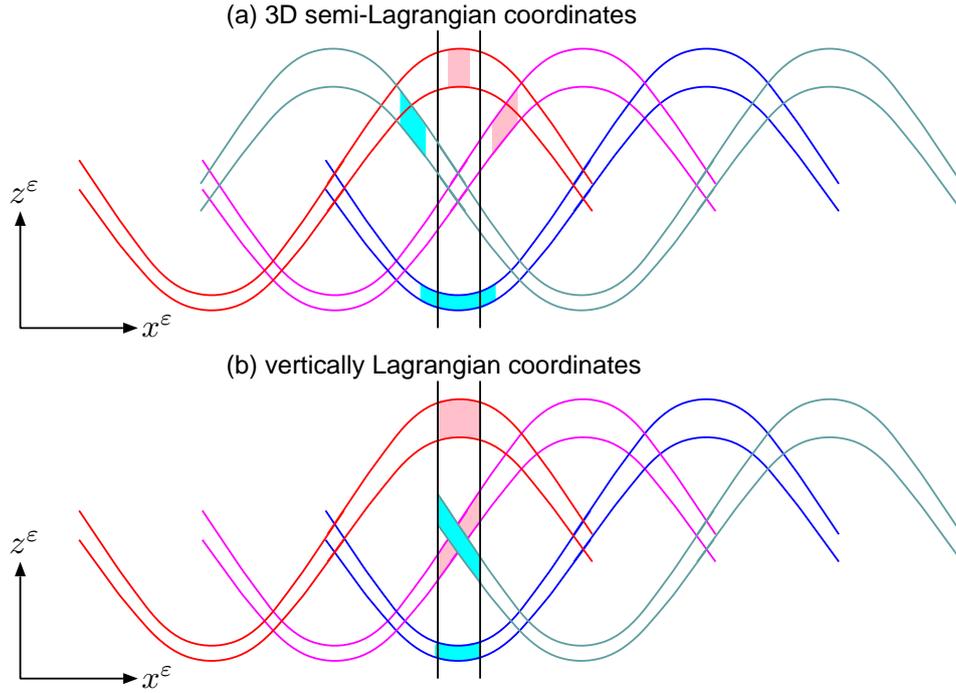


図 6.1:  $x^\epsilon$  軸の正の方向に伝搬する波の鉛直断面. (a) 3次元 semi-Lagrange 座標系と (b) 鉛直 semi-Lagrange 座標系それぞれにおける制御体積要素の動きの模式図. Aiki and Greatbatch (2013a,b).

## 6.1 物質微分演算子の天下りの導入 (AM78a)

鉛直 semi-Lagrange 座標系における物質微分演算子 (5.4) の導出には、偏微分の連鎖律を使った。これに対して AM78a は、3次元 semi-Lagrange 座標系における物質微分演算子を、連鎖律を使わずに天下りの導入している。3次元 semi-Lagrange 座標系においては Lagrange 平均速度による移流だけを考慮すればよいであろう、という AM78a の仕様が AM78a の式 (2.6b), (2.8), (2.9) によって表されていて、これらをまとめて書くと

$$\underbrace{(\partial_t^\epsilon + u_k \partial_{x_k}^\epsilon)}_{(D\varphi/Dt)^\epsilon} \varphi = \underbrace{(\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k})}_{\bar{D}^L(\varphi^\epsilon)} \varphi, \quad (6.3)$$

となる。 $\varphi$  は任意の物理量である。上段が本講義の (偏微分演算子を陽に書く事によって座標系を区別する) 記法で、下段が AM78a の (肩字  $\xi$  の位置によって座標系を区別する) 記法である<sup>\*6.1</sup>。

式 (6.3) を導入した事による第一の結果は、 $x_1, x_2, x_3, t$  が独立変数であることに注意すると、

$$\underbrace{(\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k})}_{\bar{D}^L_{x_i}} x_i = \bar{u}_i^L, \quad (6.4)$$

となる。この式は、鉛直 semi-Lagrange 座標系の  $z$  面 (図 5.1 の青線) をゆっくりと浸透する流れ

<sup>\*6.1</sup>原論文では  $D/Dt \equiv \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  と  $\bar{D}^L \equiv \partial_t + \bar{\mathbf{u}}^L \cdot \nabla$  と定義している (前者は AM78a の 615 頁、後者は AM78a の式 2.9 による)。AM78a の記法の特徴として、偏微分演算子 ( $\partial_t$  や  $\nabla$ ) の表記からは座標系の違いを知ることができない。そこで肩字  $\xi$  の位置から式 (6.3) の下段の意味を解釈すると、左辺は物質微分演算子が  $\varphi$  に掛かっているので 3次元 Euler 座標系における微分である。同様に右辺は物質微分演算子が  $\varphi^\epsilon$  に掛かっているので 3次元 semi-Lagrange 座標系における微分である。

1067 成分  $\varpi$  の式 (5.5b) に対応する。次に、AM78a の式 (2.10a,b) を冗長に書くと、

$$1068 \quad \underbrace{(\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k}) \Xi_i}_{\bar{D}^L \Xi_i} = u_i^\xi = u_i^\xi(x_1, x_2, x_3, t) = u_i(\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, t^\epsilon) = u_i = \underbrace{(\partial_{t^\epsilon} + u_k \partial_{\Xi_k}) \Xi_i}_{D \Xi_i / Dt}, \quad (6.5a)$$

$$1069 \quad \underbrace{(\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k}) \xi_i}_{\bar{D}^L \xi_i} = \underbrace{(\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k}) (\Xi_i - x_i)}_{\bar{D}^L (\Xi_i - x_i)} = u_i^\xi - \bar{u}_i^L \equiv u_i^l = u_i^l(x_1, x_2, x_3, t), \quad (6.5b)$$

1070 となる。式 (6.5a) は第 5 章における  $z^\epsilon$  面をまたぐ流れ成分  $w$  (i.e. 鉛直速度そのもの) の式 (5.5a)  
1071 に対応する。式 (6.5b) の引き算は  $(x_1, x_2, x_3)$  を固定して行う。

1072 式 (6.5b) の物理量  $u_i^l$  は 3 次元 semi-Lagrange 座標系における擾乱速度である。非圧縮流体を  
1073 考えたとしても、Lagrange 平均速度とその擾乱速度には若干の圧縮性があることが知られている  
1074 (McIntyre, 1988)。

$$1075 \quad \partial_{\Xi_1} u_1 + \partial_{\Xi_2} u_2 + \partial_{\Xi_3} u_3 = 0, \quad (6.6a)$$

$$1076 \quad \partial_{x_1} \bar{u}_1^L + \partial_{x_2} \bar{u}_2^L + \partial_{x_3} \bar{u}_3^L \neq 0, \quad (6.6b)$$

$$1077 \quad \partial_{x_1} u_1^l + \partial_{x_2} u_2^l + \partial_{x_3} u_3^l \neq 0, \quad (6.6c)$$

1078 これは、Lagrange 平均速度と Lagrange 擾乱速度のそれぞれが非圧縮であることの一般的な証明  
1079 が存在しないという論法に基づいている。

## 1080 6.2 圧力勾配項

1081 AM78a では偏微分の連鎖律は基本的には圧力勾配項の展開 [と第 7 章で説明する一般化疑運動  
1082 量の定義] に使われる。3次元 Euler 座標系と 3次元 semi-Lagrange 座標系間の偏微分の連鎖律  
1083 は、AM78a の式 (2.4a,b) に書かれている。

$$1084 \quad \begin{pmatrix} (\varphi^\epsilon)_{,1} \\ (\varphi^\epsilon)_{,2} \\ (\varphi^\epsilon)_{,3} \\ (\varphi^\epsilon)_{,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Xi_{1,1} & \Xi_{2,1} & \Xi_{3,1} & 0 \\ \Xi_{1,2} & \Xi_{2,2} & \Xi_{3,2} & 0 \\ \Xi_{1,3} & \Xi_{2,3} & \Xi_{3,3} & 0 \\ \Xi_{1,t} & \Xi_{2,t} & \Xi_{3,t} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\varphi_{,1})^\epsilon \\ (\varphi_{,2})^\epsilon \\ (\varphi_{,3})^\epsilon \\ (\varphi_{,t})^\epsilon \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

1085 ここで  $\varphi$  は任意の物理量で、左辺が 3 次元 semi-Lagrange 座標系における微分、右辺の列ベクトル  
1086 が 3 次元 Euler 座標系における微分である。 $\varphi$  に肩字  $\xi$  が直付している場合は、 $\varphi$  が 3 次元 semi-  
1087 Lagrange 座標系で表されていることを意味する。そうでない場合は、 $\varphi$  が 3 次元 Euler 座標系で  
1088 表されていることを意味する。なぜこのような回りくどい事をするかということ、AM78a では微分  
1089 演算子をカンマで表記しているので、実際の微分が  $\partial/\partial x_i$  なのか  $\partial/\partial \Xi_i$  なのか区別ができないか  
1090 らである。

1091 連鎖律の式 (6.7) は式 (5.3) に対応する。両方とも右辺の列ベクトルが 3 次元 Euler 座標系の偏  
1092 微分であることは同じである。式 (6.7) を式 (5.3) のように平たく書き直す事もできるが、

$$1093 \quad \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x_1 \\ \partial\varphi/\partial x_2 \\ \partial\varphi/\partial x_3 \\ \partial\varphi/\partial t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\Xi_1/\partial x_1 & \partial\Xi_2/\partial x_1 & \partial\Xi_3/\partial x_1 & 0 \\ \partial\Xi_1/\partial x_2 & \partial\Xi_2/\partial x_2 & \partial\Xi_3/\partial x_2 & 0 \\ \partial\Xi_1/\partial x_3 & \partial\Xi_2/\partial x_3 & \partial\Xi_3/\partial x_3 & 0 \\ \partial\Xi_1/\partial t & \partial\Xi_2/\partial t & \partial\Xi_3/\partial t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial \Xi_1 \\ \partial\varphi/\partial \Xi_2 \\ \partial\varphi/\partial \Xi_3 \\ \partial\varphi/\partial t^\epsilon \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

1094 のように左辺と右辺で時間微分の記号を区別した方がよい。

1095 脚注 \*1.1 に記した通り本講義では基本的に、本来の圧力を海水の基準密度  $\rho_0$  で割った物を圧力  
 1096 と呼んでいる。本章のように AM78a の説明をするときに限っては原論文の式に合うように、新し  
 1097 いフォント  $p$  を使って「本来の」圧力を表すことにする (表 1)。AM78a の式 (8.1) を詳しく書き  
 1098 直すと、

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \partial p / \partial \Xi_1 \\ \partial p / \partial \Xi_2 \\ \partial p / \partial \Xi_3 \end{pmatrix}}_{(\rho^{-1} p, i)^\xi} &= \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \partial \Xi_1 / \partial x_1 & \partial \Xi_2 / \partial x_1 & \partial \Xi_3 / \partial x_1 \\ \partial \Xi_1 / \partial x_2 & \partial \Xi_2 / \partial x_2 & \partial \Xi_3 / \partial x_2 \\ \partial \Xi_1 / \partial x_3 & \partial \Xi_2 / \partial x_3 & \partial \Xi_3 / \partial x_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial p / \partial x_1 \\ \partial p / \partial x_2 \\ \partial p / \partial x_3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\rho J} \underbrace{\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}}_{\tilde{\rho}^{-1} K_{ij}} \underbrace{\begin{pmatrix} \partial p / \partial x_1 \\ \partial p / \partial x_2 \\ \partial p / \partial x_3 \end{pmatrix}}_{(p^\xi)_j}, \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

1101 となる。1 行目は連鎖律の式 (6.8) に基づいている。2 行目の  $J$  は  $\partial \Xi_j / \partial x_i$  の行列式である。 $K_{ij}$   
 1102 は逆行列の一般的な公式に書かれているような「 $\partial \Xi_j / \partial x_i$  の余因子行列」の行列式である。  
 1103 行列式によって重み付けられた密度  $\tilde{\rho} \equiv \rho J = \rho^\xi J$  を 3次元 semi-Lagrange 座標系から見ると、  
 1104 低周波成分しか存在しないことの証明が AM78a によってなされている。これは鉛直 semi-Lagrange  
 1105 座標系において  $\rho z^\xi = \tilde{\rho}$  と見なしている事に対応する (第 5 章)。

### 1106 6.3 運動量の式

1107 AM78a は (i) Boussinesq 近似、(ii) 流体の非圧縮性の仮定、(iii) 静力学近似のいずれもも使って  
 1108 いない。Euler 座標系における運動量の式は AM78a の式 (3.2) に書かれているが、これを詳しく  
 1109 表すと、

$$\underbrace{(\partial_t^\epsilon + u_k \partial_{x_k}) u_j}_{Du_j/Dt} + \underbrace{\rho^{-1} \partial_{x_i} p}_{\rho^{-1} p, j} = Q_j, \quad (6.10)$$

1111 となる。記号  $Q_j$  は Coriolis 項や粘性項のような外力項をまとめたものである。式 (6.10) の上段が  
 1112 本講義の (偏微分演算子を陽に書く事によって座標系を区別する) 記法で、下段が AM78a の (肩  
 1113 字  $\xi$  の有無によって座標系を区別する) 記法である\*6.2。式 (6.10) に式 (6.3) と式 (6.9) を代入す  
 1114 ると、

$$\underbrace{(\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k}) u_j^L}_{\bar{D}^L(u_j^\xi)} + \underbrace{\tilde{\rho}^{-1} K_{ji} \partial_{x_i} p}_{\tilde{\rho}^{-1} K_{ji} (p^\xi)_i} = Q_j^\xi, \quad (6.11)$$

1116 のようにすべて 3次元 semi-Lagrange 座標系の偏微分で書き表す事ができる。式 (6.11) の 3次元  
 1117 semi-Lagrange 平均をとると

$$\underbrace{(\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k}) \bar{u}_j^L}_{\bar{D}^L \bar{u}_j^L} + \underbrace{\tilde{\rho}^{-1} \bar{K}_{ji} \partial_{x_i} \bar{p}^L}_{\tilde{\rho}^{-1} \bar{K}_{ji} (p^\xi)_i^L} = \bar{Q}_j^L, \quad (6.12)$$

\*6.2 式 (6.10) の下段には肩字  $\xi$  が無いので 3次元 Euler 座標系に載っていることを意味する。この式を 3次元 semi-Lagrange 座標系に載せ換えるには  $(Du_j/Dt)^\xi + (\rho^{-1} p, j)^\xi = Q_j^\xi$  のようにすべての項の外側に肩字  $\xi$  を付けばよい。ただしこれでは時間発展項と圧力勾配項の偏微分を 3次元 Euler 座標系で計算した後に、各項の引数を  $(\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, t^\epsilon)$  から  $(x_1, x_2, x_3, t)$  に取り替えているにすぎない [式 (6.1) 参照]。

1119 となる。これは Lagrange 平均速度に対する時間発展方程式である。式 (6.11) の第 2 項の  $\bar{\rho}^{-1}$  が平  
 1120 均演算子の外側に出ているのは、3次元 semi-Lagrange 座標系から見た  $\bar{\rho} \equiv \rho^\xi J$  は低周波成分し  
 1121 か含まないからである。

1122 コリオリ項は  $Q_j$  の中に含ませて説明を行ってきたが、 $\beta$  面 (i.e.  $f = f_0 + \beta \Xi_2 = f_0 + \beta x_2 + \beta \xi_2$ )  
 1123 を仮定して陽に書くと次のようになる。

$$1124 \quad \overline{f u_i^\xi}^L = \underbrace{(f + \beta x_2)}_{\bar{f}^L} \bar{u}_i^L + \beta \overline{\xi_2 u_i^L}, \quad (6.13)$$

## 1125 6.4 行列式

1126 任意の行列

$$1127 \quad \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

1128 の行列式は、3本のベクトル  $(A_1, A_2, A_3)$ ,  $(B_1, B_2, B_3)$ ,  $(C_1, C_2, C_3)$  によって張られる平行六面  
 1129 体の体積を表す (図 6.2)。3次元 semi-Lagrange 座標系の制御体積要素 (図 6.1a の色が塗られた  
 1130 部分) の体積は、座標変換行列  $\partial \Xi_i / \partial x_i$  の行列式  $J$  によって表される。同様に鉛直 semi-Lagrange  
 1131 座標系の制御体積要素 (図 6.1b の色が塗られた部分) の体積は、 $z_z^\epsilon$  によって表される。

1132 鉛直 semi-Lagrange 座標系における積み重ね則 (5.20) に対応する関係式を 3次元 semi-Lagrange  
 1133 座標系に対して書くと、任意の物理量に対して

$$1134 \quad \int \int \int \bar{A}^\epsilon d\Xi_1 d\Xi_2 d\Xi_3 = \int \int \int \bar{A} J^L dx_1 dx_2 dx_3 \quad (6.15)$$

1135 となる。ただし (例えば海底のうねりに沿って振動する流体粒子の運動等がある場合には) Euler  
 1136 座標系で張られる体積空間の形と、3次元 semi-Lagrange 座標系で張られる体積空間の形が異なっ  
 1137 てくるので注意が必要である。鉛直 semi-Lagrange 座標系の場合には式 (5.20) に示されていると  
 1138 おり、 $dz^\epsilon$  と  $dz$  の積分範囲がともに  $-H_b$  から 0 までなので (海底と海面で  $z''' = z^\epsilon - z = 0$  とみ  
 1139 なすことができたりして) 都合がよい<sup>\*5.2</sup>。また図 6.1 を水面波の鉛直断面図と考えた場合、3次  
 1140 元 semi-Lagrange 座標系における制御体積要素の平均高度は、実際の平均水位より上にずれてしま  
 1141 うという懸念がある。

## 1142 6.5 一般化疑エネルギー (AM78b)

1143 古典的な線形波動論 (e.g. Bretherton and Garret, 1968; Whitham, 1974; Phillips, 1977) にで  
 1144 てくる疑運動量とは波のエネルギーを位相速度で割ったものである。AM78 が考案した一般化疑運  
 1145 動量と一般化疑エネルギーにも同じような関係があてはまる。まず本節で一般化疑エネルギーにつ  
 1146 いて、そして次章で一般化疑運動量について説明する。

1147 平均流が全くない (あるいは十分に弱い) と仮定すると、Lagrange 的な擾乱速度が非圧縮で  
 1148 あるとみなすことができる。また線形の波を考えているので式 (6.7) にある座標変換行列  $\Xi_{i,j} =$

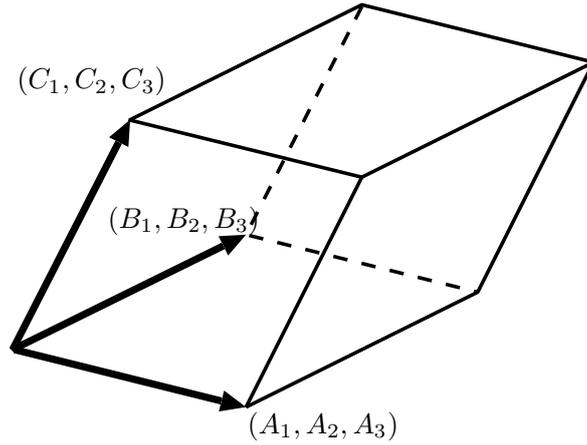


図 6.2: 行列式と平行六面体の体積との関係の模式図。

1149  $\partial_{x_j}(x_i + \xi_i) = \delta_{ij} + \xi_{i,j}$  の主成分 (つまり単位行列) だけ考えればよいので、圧力勾配項も次のよ  
 1150 うに簡単化できるとする。

$$1151 \quad \partial_{x_1} u_1^l + \partial_{x_2} u_2^l + \partial_{x_3} u_3^l \simeq 0, \quad (6.16a)$$

$$1152 \quad \partial_{x_1} \xi_1 + \partial_{x_2} \xi_2 + \partial_{x_3} \xi_3 \simeq 0, \quad (6.16b)$$

$$1153 \quad (\rho^{-1} \partial_{\Xi_j} p)^l = (\tilde{\rho}^{-1} K_{ij} \partial_{x_i} p)^l \simeq \partial_{x_j} (\rho^{-1} p)^l, \quad (6.16c)$$

1154 成層流体中の線形中立波の運動量方程式は次のように書く事ができる。

$$1155 \quad \partial_t u_1^l - f u_2^l + \partial_{x_1} p^l = 0, \quad (6.17a)$$

$$1156 \quad \partial_t u_2^l + f u_1^l + \partial_{x_2} p^l = 0, \quad (6.17b)$$

$$1157 \quad \partial_{x_3} p^l = -(g/\rho_0) \rho^l = -\xi_3 N^2, \quad (6.17c)$$

1158 圧力は  $\rho^{-1} p = p$  のように静水圧の記号に書き換えてある。記号  $N^2$  は浮力振動数である。まず式  
 1159 (6.17a)-(6.17c) に  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  をそれぞれ掛けて和をとると、

$$1160 \quad (\xi_1 \partial_t u_1^l + \xi_2 \partial_t u_2^l) + \partial_{x_1} (\xi_1 p^l) + \partial_{x_2} (\xi_2 p^l) + \partial_{x_3} (\xi_3 p^l) + \xi_3 \xi_3 N^2 = f (\xi_1 u_2^l - \xi_2 u_1^l), \quad (6.18)$$

1161 となる。本講義では AM78b ("On wave-action and its relatives" の方) の式 (5.14) で定義される物  
 1162 理量を一般化疑エネルギーと呼ぶ\*6.3。式 (6.18) を使って一般化疑エネルギーを展開すると、

$$1163 \quad \text{pseudoenergy} \equiv \xi_{1,t} (u_1^l - f \xi_2 / 2) + \xi_{2,t} (u_2^l + f \xi_1 / 2)$$

$$1164 \quad = (u_1^l u_1^l + u_2^l u_2^l) + f (\xi_1 u_2^l - \xi_2 u_1^l) / 2$$

$$1165 \quad = (u_1^l u_1^l + u_2^l u_2^l) / 2 + \underbrace{\partial_t (\xi_1 u_1^l + \xi_2 u_2^l) / 2}_0 +$$

$$1166 \quad \underbrace{[\partial_{x_1} (\xi_1 p^l) + \partial_{x_2} (\xi_2 p^l) + \partial_{x_3} (\xi_3 p^l)] / 2}_0 + \xi_3 \xi_3 N^2 / 2, \quad (6.19)$$

\*6.3—一般化疑エネルギーの詳しい定義は AM78b の原論文の式 (5.13a) に載っている。式 (5.14) はその一部である。Bühler (2009) の 234 頁の脚注 7 に対応する注意書きがある。本章の式 (6.18) と式 (6.21) は AM78b の式 (4.10) に対応する。コリオリパラメータの表記は本講義の  $f$  が AM78b の  $2\Omega$  に対応する。

1167 となる。(慣性重力波のように) 波が3次元方向に一樣で定常と仮定できるならば、一般化擬エネ  
 1168 ルギーは古典的な波のエネルギーに等しくなることが分かる<sup>\*6.4</sup>。式(6.19)とそれに関連する説明  
 1169 はAM78bの原論文の式(4.10)と式(B.2)の周辺の記述を参考にした。

1170 次に水面波の一般化擬エネルギーを考察する。成層がない流体中の線形中立波の運動量方程式は  
 1171 次のように書く事ができる。

$$1172 \quad \partial_t u_1^l - f u_2^l + \partial_{x_1} p^l = 0, \quad (6.20a)$$

$$1173 \quad \partial_t u_2^l + f u_1^l + \partial_{x_2} p^l = 0, \quad (6.20b)$$

$$1174 \quad \partial_t u_3^l + \partial_{x_3} p^l = 0, \quad (6.20c)$$

1175 圧力は $\rho^{-1}p = p = p + g\eta$ のように非静水圧 $p$ と水面変位による静水圧 $g\eta$ [次章の式(7.1a)-(7.1b)  
 1176 を参照]の和に書き換えてある。密度一樣を仮定しているので鉛直方向の運動量の式(6.20c)には浮  
 1177 力による重力加速度は現れない。まず式(6.20a)-(6.20c)に $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ をそれぞれ掛けて和をとると、

$$1178 \quad (\xi_1 \partial_t u_1^l + \xi_2 \partial_t u_2^l + \xi_3 \partial_t u_3^l) + \partial_{x_1}(\xi_1 p^l) + \partial_{x_2}(\xi_2 p^l) + \partial_{x_3}(\xi_3 p^l) = f(\xi_1 u_2^l - \xi_2 u_1^l), \quad (6.21)$$

1179 となる。式(6.21)を使って、AM78bの一般化擬エネルギーの定義式を展開すると

$$\begin{aligned} 1180 \quad \text{pseudoenergy} &\equiv \xi_{1,t}(u_1^l - f\xi_2/2) + \xi_{2,t}(u_2^l + f\xi_1/2) + \xi_{3,t}u_3^l, \\ 1181 &= (u_1^l u_1^l + u_2^l u_2^l + u_3^l u_3^l) + f(\xi_1 u_2^l - \xi_2 u_1^l)/2 \\ 1182 &= (u_1^l u_1^l + u_2^l u_2^l + u_3^l u_3^l)/2 + \underbrace{\partial_t(\xi_1 u_1^l + \xi_2 u_2^l + \xi_3 u_3^l)/2}_{0} + \\ 1183 &\quad \underbrace{[\partial_{x_1}(\xi_1 p^l) + \partial_{x_2}(\xi_2 p^l) + \partial_{x_3}(\xi_3 p^l)]/2}_{0} \end{aligned} \quad (6.22)$$

1184 となる。水面波が定常で水平方向に一樣ならば、一般化擬エネルギーの鉛直積分は古典的な鉛直積  
 1185 分された水面波のエネルギーに等しくなることが分かる。

$$1186 \quad \int_{-\infty}^{\bar{\eta}^L} \text{pseudoenergy} \, dx_3 = \int_{-\infty}^{\bar{\eta}^L} (u_1^l u_1^l + u_2^l u_2^l + u_3^l u_3^l)/2 \, dx_3 + g\eta^l/2 \quad (6.23)$$

1187 (3次元 Euler 座標系における水面は $\Xi_3 = \eta$ と表されるが) 3次元 semi-Lagrange 座標系では水面  
 1188 が $x_3 = \bar{\eta}^L$ とラベル付けされていて、ここでは $\xi_3 = \eta^l$ かつ $p^l = p^l + g\eta^l = g\eta^l$ であることを使っ  
 1189 た(詳細は次章を参照)。

## 1190 6.6 まとめ

- 1191 • 3次元 Euler 座標系と3次元 semi-Lagrange 座標系を区別するためにAM78aは、微分演算  
 1192 子ではなく被微分量の記法を変えている。
- 1193 • AM78aでは、3次元 semi-Lagrange 座標系における物質微分演算子を、偏微分の連鎖律から  
 1194 導出しているのではなく、天下载的に導入している。第5章と第6章では仕様と制約が逆  
 1195 になっている。つまり第5章では $z_\xi \rho = \hat{\rho}$ が仕様で、 $(\partial_{t^\epsilon} + \mathbf{U} \cdot \nabla^\epsilon) = (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \varpi \partial_z)$

<sup>\*6.4</sup>中緯度 Rossby 波の場合には大雑把に書くと $\partial_{x_2}(\overline{\xi_2 p^l}) = \partial_{x_2}[(u_1^l - \beta x_2 \xi_2) p^l / f_0] = -\beta \overline{\xi_2 p^l} / f_0 = \overline{q p^l} / f_0 =$   
 $-(u_1^l u_1^l + u_2^l u_2^l + \xi_3 \xi_3 N^2 \overline{p^l})$ のように圧力項が残るので本講義では立ち入らない。記号 $q$ は準地衡渦位である: $q + \beta \xi_2 = 0$ 。  
 Plumb (1986)、Takaya and Nakamura (2001)、Kinoshita and Sato (2013) に関する式が示されている。

1196 において  $\varpi = \hat{\varpi}$  とはなりきらず  $\varpi = \hat{\varpi} - (\mathbf{V}'' \cdot \nabla \rho) / \rho_z$  のように擾乱速度がわずかに残る  
1197 のが制約である。第 6 章では  $(\partial_{t\epsilon} + u_k \partial_{x_k}) = (\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k})$  [式 (5.8b) 参照] のように 3 次元  
1198 semi-Lagrange 座標系における移流項に擾乱速度が現れないのが仕様で、 $\rho^\epsilon J = \bar{\rho}$  となるの  
1199 が制約である。

- 1200 ● AM78 の体系は有限振幅波や非線形波に適用可能とよく言われるが、その心は摂動展開に頼  
1201 らずに主な式変形ができる事にある。3次元 Euler 座標系と 3次元 semi-Lagrange 座標系と  
1202 の間の変換がスムーズに行われなければならないので、厳密には AM78 の体系は「碎波しな  
1203 い程度の波」に適用可能という但し書きが必要である。また Lagrange 平均速度や対応する  
1204 擾乱速度が非圧縮の条件を満たさなければ都合が悪くなることしばしばあるので、その際  
1205 には摂動展開の考え方に沿って近似的に非圧縮の条件を使ったりする。
- 1206 ● 境界条件まわりは 3次元 semi-Lagrange 座標系の苦手分野なので、あまり立ち入ったことは  
1207 行われたい。

1208

## 第II部

1209

## 風波

## 第7章 直接型と変形型の運動量方程式

風波の分野（本講義第2部）では密度が一定の非圧縮性流体に対する運動方程式を使う。傾圧渦の分野（本講義第1部）との違いは

- 密度成層がない
- 海面が自由表面である
- 非静力学である
- 乱流粘性項を取り入れる

である（表2）。Euler 座標系で書かれた運動方程式は

$$\partial_t^\epsilon \mathbf{V} + \nabla^\epsilon \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V}) + \partial_{z^\epsilon}(w\mathbf{V}) = -\nabla^\epsilon [p + g(\eta - z^\epsilon)] = -\nabla^\epsilon (p + g\eta), \quad (7.1a)$$

$$\partial_t^\epsilon w + \nabla^\epsilon \cdot (\mathbf{V}w) + \partial_{z^\epsilon}(ww) = -\partial_{z^\epsilon} [p + g(\eta - z^\epsilon)] - g = -\partial_{z^\epsilon} p, \quad (7.1b)$$

$$\nabla^\epsilon \cdot \mathbf{V} + \partial_{z^\epsilon} w = 0, \quad (7.1c)$$

となる。水面は  $z^\epsilon = \eta$  に位置する。圧力は非静力学成分  $p$  と静力学成分  $g(\eta - z^\epsilon)$  に分離し、さらに  $-gz^\epsilon$  に関する部分は圧力の3次元勾配に寄与しないので取り除いている。風などの外力がない場合は  $p|_{z^\epsilon=\eta} = 0$  である。乱流粘性の効果は、式 (7.1a)-(7.1c) では省略されているが、第10章から導入する。

### 7.1 渦度力

GLM 理論を使うと渦度力を驚くほど簡単に導出することができる。これは GLM 理論の実用面における成功例の一つとして知られている<sup>\*7.1</sup>。渦度力とは Langmuir 循環を説明する際に必須となる物理量である。

航空機や高台から海をみると水面に縞模様が現れている様子をしばしば観察することができる。この縞模様は、海洋混合層に Langmuir 循環とよばれるロール状のセルが並び、その鉛直流によって海中の気泡や塵が海面近くまで運ばれて海面の収束域に集まったものである。Langmuir 循環は水面波による Stokes ドリフトと海洋混合層内の風成 Ekman 流の相互作用によって形成されることが 1970-80 年代の研究によって明らかになった。LES 数値実験で Langmuir 循環を再現するには運動量方程式の（Reynolds 応力項や形状応力項をパラメータ化するのではなく）渦度力と呼ばれる項を使って平均流と波の相互作用を効果を表す。

$$(\partial_t^\epsilon + \overline{\mathbf{V}^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon + \overline{w^\epsilon} \partial_{z^\epsilon}) \overline{\mathbf{V}^\epsilon} = -\nabla^\epsilon (\overline{p^\epsilon} + g\overline{\eta} + \Pi) + \mathbf{V}^{Stokes} \times (\nabla^\epsilon \times \overline{\mathbf{V}^\epsilon}), \quad (7.2a)$$

$$(\partial_t^\epsilon + \overline{\mathbf{V}^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon + \overline{w^\epsilon} \partial_{z^\epsilon}) \overline{w^\epsilon} = -\partial_{z^\epsilon} (\overline{p^\epsilon} + g\overline{\eta} + \Pi) + \mathbf{V}^{Stokes} \cdot (\partial_{z^\epsilon} \overline{\mathbf{V}^\epsilon} - \nabla^\epsilon \overline{w^\epsilon}), \quad (7.2b)$$

<sup>\*7.1</sup> 渦度力や Langmuir 循環に関する説明が Bühler (2009) の教科書に一切載っていないのはどうした事かと、McIntyre (2011) に記されている。



図 7.1: 五大湖の上空から撮影された Langmuir 循環. Sullivan and McWilliams (2010).

式 (7.2a)-(7.2b) の最後の項が渦度力である。式 (7.2a)-(7.2b) は Euler 平均速度の時間発展を表す事に注意しよう。渦度力の導出に関連する手法には

- 3次元 semi-Lagrange 平均系の運動量方程式を使う (第 7 章, 1980 年代)
- 3次元 Euler 平均系の渦度方程式を使う (第 8 章, 1970 年代)
- 鉛直積分系の運動量の式と古典的な線形波動論の式を使う (第 9 章, 1960 年代)

の 3 種類がある。第 7 – 9 章では、渦度力をキーワードにして、それぞれの時代に登場した波と平均流の相互作用理論を振り返る事にしよう。本章では、変形型の運動量方程式という概念と、それに付随する一般化疑運動量という量について説明する。

## 7.2 3次元 Lagrange 座標系 (Lagrange, 1788)

AM78a の運動量方程式には直接型と変形型の 2 種類の表現があるが、その起源は Lagrange (1788) までさかのぼる事ができる。

Euler 座標系における各流体粒子の位置  $(x^\epsilon, y^\epsilon, z^\epsilon)$  は時々刻々と変わっていく。だからこそ、各流体粒子の速度を物質微分演算子を使って  $(u, v, w) \equiv \mathcal{D}_{t^\epsilon}(x^\epsilon, y^\epsilon, z^\epsilon)$  のように表す事ができるのである。一方 Lagrange (1788) は、各流体粒子をその初期時刻における位置によってラベル付けすることによって、運動量方程式を書き表すことを考案した (図 7.2a)。各流体粒子の位置  $(x^\epsilon, y^\epsilon, z^\epsilon)$  が時々刻々と変わったとしても、各流体粒子のラベルの値  $(a, b, c)$  は変わらない。初期位置  $(a, b, c)$  を固定しつつ時刻  $t$  を変えてやれば、

$$x^\epsilon = x^\epsilon(a, b, c, t), \quad y^\epsilon = y^\epsilon(a, b, c, t), \quad z^\epsilon = z^\epsilon(a, b, c, t) \quad (7.3a)$$

が各流体粒子の軌跡を表すことになる。ここで  $t$  は新しいフォントで記されている事に注意しよう。これらが 3次元 Lagrange 座標系  $(a, b, c, t)$  の定義である。各流体粒子の速度は Lagrange 座標系に

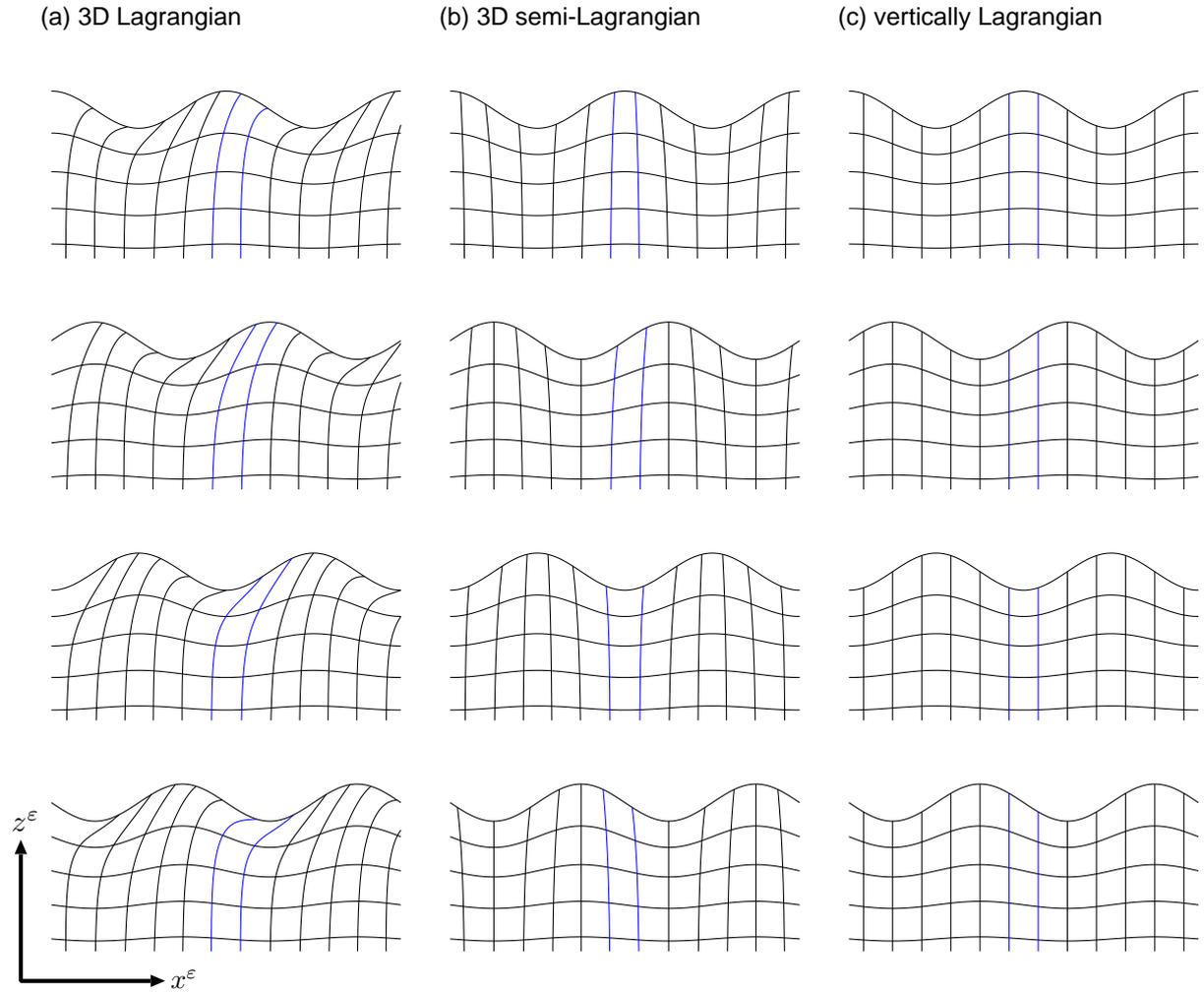


図 7.2:  $x^\epsilon$  軸の正の方向に伝搬する水面波の位相変化の模式図. (a) 3次元 Lagrange 座標系, (b) 3次元 semi-Lagrange 座標系, (c) 鉛直 semi-Lagrange 座標系の鉛直断面. 動画: <http://www.jamstec.go.jp/frcgc/research/d1/aiki/>

1258 おける時刻  $t$  による偏微分を用いて  $(u, v, w) = (x_t^\epsilon, y_t^\epsilon, z_t^\epsilon)$  と書く事ができる。偏微分の連鎖律は、

$$1259 \begin{pmatrix} \partial_a \\ \partial_b \\ \partial_c \\ \partial_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a^\epsilon & y_a^\epsilon & z_a^\epsilon & 0 \\ x_b^\epsilon & y_b^\epsilon & z_b^\epsilon & 0 \\ x_c^\epsilon & y_c^\epsilon & z_c^\epsilon & 0 \\ u & v & w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x^\epsilon} \\ \partial_{y^\epsilon} \\ \partial_{z^\epsilon} \\ \partial_{t^\epsilon} \end{pmatrix} \quad (7.3b)$$

1260 となる。式 (7.3b) の時間微分に関する項は物質微分の定義そのものになる。

$$1261 \partial_t = (\partial_{t^\epsilon} + u\partial_{x^\epsilon} + v\partial_{y^\epsilon} + w\partial_{z^\epsilon}) = \mathcal{D}_{t^\epsilon}, \quad (7.3c)$$

1262 Lagrange 座標系における運動量方程式には2種類の表現型があることが古くから知られている。

1263 第1の表現は(以下、直接型と呼ぶ)は、Euler 座標系における運動量方程式と同じように流体粒子

表 7.1: Lagrange 座標系で書かれた運動量方程式の分類.

直接型	変形型
Lagrange (1788, Eq. C on page 445)	Lagrange (1788, Eq. D on page 447)
Pierson (1962, Eqs. 5, 9)	Lamb (1932, 2nd Eq. on page 13)
Andrews & McIntyre (1978, Eq. 8.7a)	Pierson (1962, Eqs. 4, 10)
Mellor (2003), Aiki & Greatbatch (2012)	Andrews & McIntyre (1978, Eq. 3.8)
	Aiki & Greatbatch (2013a,b)

1264 の加速度に関する式を書いたものである。

$$1265 \quad \begin{pmatrix} x_{tt}^\epsilon - Q^u \\ y_{tt}^\epsilon - Q^v \\ z_{tt}^\epsilon - Q^w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_a^\epsilon & y_a^\epsilon & z_a^\epsilon \\ x_b^\epsilon & y_b^\epsilon & z_b^\epsilon \\ x_c^\epsilon & y_c^\epsilon & z_c^\epsilon \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_a \\ p_b \\ p_c \end{pmatrix}, \quad (7.4a)$$

1266  $(x_{tt}^\epsilon, y_{tt}^\epsilon, z_{tt}^\epsilon) = \partial_t(u, v, w) = \mathcal{D}_t^\epsilon(u, v, w)$  は各流体粒子の加速度で、 $Q^A$  は  $A$  に対する粘性項、  
1267 Coriolis 力、浮力などの一般的な外力を総合的に表す項である。記号  $p$  は全圧 (=非静水圧+静水  
1268 圧) である。風波の分野のように密度が一定の場合は  $p \equiv p + g\eta$  である [式 (7.1a)-(7.1b) を参照]。

1269 圧力勾配項については、本来 Euler 座標系で表すと  $(p_{x^\epsilon}, p_{y^\epsilon}, p_{z^\epsilon})$  となるのだが、連鎖律の式  
1270 (7.3b) を使って Lagrange 座標系における圧力勾配  $(p_a, p_b, p_c)$  が基本となるように書き換えてあ  
1271 る。式 (7.4a) の Lagrange 平均をとると Lagrange 平均速度に対する時間発展方程式が得られる。  
1272 式 (7.4a) の圧力勾配項は複雑であるが、左辺の外力項は簡素なままである。このため直接型の式  
1273 (7.4a) は粘性の効果を含む水面波の研究でよく使われている。

1274 Lagrange 座標系における運動量方程式の第 2 の表現 (以下、変形型と呼ぶ) は式 (7.4a) の両辺を  
1275 連鎖律の行列で掛けたものである。

$$1276 \quad \begin{pmatrix} x_a^\epsilon & y_a^\epsilon & z_a^\epsilon \\ x_b^\epsilon & y_b^\epsilon & z_b^\epsilon \\ x_c^\epsilon & y_c^\epsilon & z_c^\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{tt}^\epsilon - Q^u \\ y_{tt}^\epsilon - Q^v \\ z_{tt}^\epsilon - Q^w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p_a \\ p_b \\ p_c \end{pmatrix}. \quad (7.4b)$$

1277 この式の左辺は一見複雑であるが、AM78a は変形型の式 (7.4b) の Lagrange 平均が、「Lagrange  
1278 平均流速」マイナス「一般化疑運動量」の時間発展方程式に書き換えられることを示した。水面  
1279 波のような渦なしの流体運動に対しては一般化疑運動量は Stokes ドリフト速度と同値になるので、  
1280 変形型の運動量の式 (7.4b) から Euler 平均流速の時間発展方程式が得られるということになる。

1281 従来の大気や海洋の論文では、上記の 2 つの表現型について言及する時に、Lamb (1932) か  
1282 AM78a を引用するのが通例となっている。これは Lagrange (1788) の原論文は長らく入手困難で  
1283 あったためと思われる。スイスのローザンヌ大学に所蔵されている Lagrange (1788) の原論文が、  
1284 ごく最近になって Google 社によってスキャンされインターネット上に公開されるようになった。  
1285 筆者が確認したところ、確かに式 (7.4a) と式 (7.4b) の原型が Lagrange (1788) の 444-446 頁あたり  
1286 に載っている。例えば 445 頁の式 (C) が直接型の運動量方程式で、本稿の式 (7.4a) に対応する。式  
1287 (C) では式 (7.4a) の逆行列の各要素を  $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma''$  と表していて、その定義は 444  
1288 頁に載っている。確かに式 (7.3b) の変換行列の余因子行列の行列式を書き下した格好になっている。  
1289 Lagrange (1788) の 446 頁の式 (D) が変形型の運動量方程式で、本稿の式 (7.4b) に対応する。  
1290 ちなみに Lagrange (1788) のフランス語の綴りをよく見ると、fubftitute のように f の文字がしばし  
1291 ば使われている。これはラテン語の s に対応する文字である。積分記号の  $\int$  (ラテン語の summa)  
1292 もこの文字から派生したと言われている。インターネットでは Long\_S で検索できる。

1293 本節の直接型の運動量方程式 (7.4a) は第 6 章 (AM78a) の運動量の式 (6.11) に対応する。そこで本  
1294 節 (Lagrange, 1788) の記法と第 6 章 (AM78a) の記法の対応関係をもう一度確認しよう。本節の物質

1295 微分  $\partial_t$  は第6章の semi-Lagrange 座標系の偏微分で書かれた物質微分  $\bar{D}^L = \partial_t + \bar{u}_i^L \partial_{x_i}$  と同等であ  
 1296 る。両者とも Euler 座標系における物質微分  $\mathcal{D}_{t^\epsilon} = \partial_{t^\epsilon} + u \partial_{x^\epsilon} + v \partial_{y^\epsilon} + w \partial_{z^\epsilon}$  を書き換えた物である。つ  
 1297 まり完全な Lagrange 座標系では移流は見えてこないのに対し、semi-Lagrange 座標系では Lagrange  
 1298 平均速度  $(\bar{u}_1^L, \bar{u}_2^L, \bar{u}_3^L)$  による移流だけが見える。当然の事ながら Euler 座標系では Lagrange  
 1299 による移流が見えるのである。流体の瞬間速度は本節では  $(u, v, w) = (x_t^\epsilon, y_t^\epsilon, z_t^\epsilon) = \partial_t(x^\epsilon, y^\epsilon, z^\epsilon)$ 、  
 1300 第6章では  $(u, v, w) = (u_1^\xi, u_2^\xi, u_3^\xi) = \bar{D}^L(\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3)$  と表記している。以上をまとめると物質微分  
 1301 については  $\partial_t = \bar{D}^L$ 、流体粒子の Euler 座標系における位置については  $(x^\epsilon, y^\epsilon, z^\epsilon) = (\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3)$   
 1302 となっている。座標  $(x^\epsilon, y^\epsilon, z^\epsilon) = (\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3)$  は流体粒子の瞬間的な位置と呼ぶ事もできて、これ  
 1303 と対になるのが各流体粒子の初期位置  $(a, b, c)$  であつたり、時間平均した位置  $(x_1, x_2, x_3)$  だつたり  
 1304 する。既に説明したとおり各流体粒子に沿って初期位置は変わらない  $\partial_t(a, b, c) = 0$  が<sup>3</sup>、各流体粒  
 1305 子に沿って時間平均した位置はゆっくりと変わっていく  $\bar{D}^L(x_1, x_2, x_3) = (\bar{u}_1^L, \bar{u}_2^L, \bar{u}_3^L)$ 。

### 1306 7.3 変形型の式と一般化疑運動量 (AM78a)

1307 Euler 座標系で書かれた運動量の式 (6.10) を詳しく書くと

$$1308 \underbrace{\begin{pmatrix} [\partial_{t^\epsilon} + u_k \partial_{\Xi_k}] u_1 - Q_1 \\ [\partial_{t^\epsilon} + u_k \partial_{\Xi_k}] u_2 - Q_2 \\ [\partial_{t^\epsilon} + u_k \partial_{\Xi_k}] u_3 - Q_3 \end{pmatrix}}_{Du_j/Dt - Q_j} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\begin{pmatrix} \partial p / \partial \Xi_1 \\ \partial p / \partial \Xi_2 \\ \partial p / \partial \Xi_3 \end{pmatrix}}_{\rho^{-1} p_{,j}} \quad (7.5)$$

1309 となる。前節の外力項との対応は  $(Q_1, Q_2, Q_3) = (Q^u, Q^v, Q^w)$  である。式 (7.5) の全ての偏微分  
 1310 は Euler 座標系でとられている。これを AM78a の semi-Lagrange 座標系の偏微分 (i.e. 図 7.2b の  
 1311 格子状曲線に沿う偏微分) に書き換えたのが式 (6.11) である。この式をもう一度詳しく書くと

$$1312 \underbrace{\begin{pmatrix} [\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k}] u_1 - Q_1 \\ [\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k}] u_2 - Q_2 \\ [\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k}] u_3 - Q_3 \end{pmatrix}}_{\bar{D}^L(u_j^\xi) - Q_j^\xi} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\begin{pmatrix} \partial \Xi_1 / \partial x_1 & \partial \Xi_2 / \partial x_1 & \partial \Xi_3 / \partial x_1 \\ \partial \Xi_1 / \partial x_2 & \partial \Xi_2 / \partial x_2 & \partial \Xi_3 / \partial x_2 \\ \partial \Xi_1 / \partial x_3 & \partial \Xi_2 / \partial x_3 & \partial \Xi_3 / \partial x_3 \end{pmatrix}^{-1}}_{(\rho^\epsilon J)^{-1} K_{j,i}} \underbrace{\begin{pmatrix} \partial p / \partial x_1 \\ \partial p / \partial x_2 \\ \partial p / \partial x_3 \end{pmatrix}}_{(p^\epsilon)_{,i}} \quad (7.6a)$$

1313 となつて<sup>\*7.2</sup>、Lagrange (1788) の直接型の運動量の式 (7.4a) に対応する。式 (7.6a) の両辺に  $\Xi_{j,i} =$   
 1314  $\partial \Xi_j / \partial x_i$  を掛けると、

$$1315 \underbrace{\begin{pmatrix} \partial \Xi_1 / \partial x_1 & \partial \Xi_2 / \partial x_1 & \partial \Xi_3 / \partial x_1 \\ \partial \Xi_1 / \partial x_2 & \partial \Xi_2 / \partial x_2 & \partial \Xi_3 / \partial x_2 \\ \partial \Xi_1 / \partial x_3 & \partial \Xi_2 / \partial x_3 & \partial \Xi_3 / \partial x_3 \end{pmatrix}}_{\Xi_{j,i}} \underbrace{\begin{pmatrix} [\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k}] u_1 - Q_1 \\ [\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k}] u_2 - Q_2 \\ [\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k}] u_3 - Q_3 \end{pmatrix}}_{\bar{D}^L(u_j^\xi) - Q_j^\xi} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\begin{pmatrix} \partial p / \partial x_1 \\ \partial p / \partial x_2 \\ \partial p / \partial x_3 \end{pmatrix}}_{(1/\rho^\epsilon)(p^\epsilon)_{,i}} \quad (7.6b)$$

1316 のようになって、Lagrange (1788) の変形型の運動量の式 (7.4b) に対応する。

1317 AM78a の真骨頂はこれからである。AM78a の原論文の式 (B1)-(B2) に書かれているとおり、式

<sup>\*7.2</sup> 圧力勾配項には連鎖律の式 (6.7) を適用するが、物質微分項には式 (6.3) のような天下りのな式を使って座標変換する  
 のが AM78a の仕様である (第6章)。

1318 (7.6b) の時間発展項は次のように展開する事ができる。

$$\begin{aligned}
1319 \quad \Xi_{j,i}(\overline{D}^L u_j^\xi) &= \overline{D}^L(\Xi_{j,i} u_j^\xi) - (\overline{D}^L \Xi_{j,i}) u_j^\xi \\
1320 &= \overline{D}^L(\Xi_{j,i} u_j^\xi) - (\overline{D}^L \Xi_{j,i}) u_j^\xi + (\overline{u}_{k,i}^L \Xi_{j,k}) u_j^\xi \\
1321 &= \overline{D}^L(\Xi_{j,i} u_j^\xi) - (u_j^\xi)_{,i} u_j^\xi + \overline{u}_{k,i}^L \Xi_{j,k} u_j^\xi \\
1322 &= \overline{D}^L \left[ (\delta_{ji} + \xi_{j,i}) u_j^\xi \right] - (u_j^\xi)_{,i} u_j^\xi + \overline{u}_{k,i}^L (\delta_{jk} + \xi_{j,k}) u_j^\xi, \quad (7.7)
\end{aligned}$$

1323 3行目は  $\overline{D}^L \Xi_j = u_j^\xi$  を使い、最後の行は  $\Xi_j = x_j + \xi_j$  を使って導出した [式 (6.5a)-(6.4) を参照]。  
1324 式 (7.7) を運動量の式 (7.6b) に代入して Lagrange 平均をとると

$$1325 \quad \overline{D}^L(\overline{u}_i^L - u_i^{gp}) + \overline{u}_{k,i}^L(\overline{u}_k^L - u_k^{gp}) + \left[ \overline{(1/\rho^\xi) p^{\xi L}} - (1/2) \overline{u_j^\xi u_j^\xi} \right]_{,i} = \overline{(1/\rho^\xi)}_{,i} p^{\xi L} + \overline{Q}_i^L + \xi_{j,i} \overline{Q_j^\xi}^L, \quad (7.8)$$

1326 これが AM78a の原論文の運動量の式 (3.8) で、論文の最も重要な結果である。式 (7.8) の記号  $u^{gp}$   
1327 は AM78a が考案した GL (generalized Lagrangean) 疑運動量である。

$$1328 \quad u_i^{gp} \equiv -\overline{\xi_{j,i} u_j^\xi}^L = -\overline{\xi_{j,i} u_j^l}^L, \quad (7.9)$$

1329 上記の2番目の表現の導出には  $u_j^\xi = \overline{u}_j^L + u_j^l$  を使った。GL 疑運動量とは式 (7.7) の  $\Xi_{j,i} u_j^\xi$  の一部  
1330 として含まれていた物理量なのである。

$$\begin{aligned}
1331 \quad \overline{\Xi_{j,i} u_j^\xi}^L &= \overline{(x_j + \xi_j)_{,i} (\overline{u}_j^L + u_j^l)}^L \\
1332 &= \overline{u}_i^L + \xi_{j,i} \overline{u_j^l}^L \\
1333 &= \overline{u}_i^L - u_i^{gp}, \quad (7.10)
\end{aligned}$$

1334 のように書けば GL 疑運動量と座標変換の行列が密接に関係していることが分かりやすい。式 (7.10)  
1335 を書き直すと

$$\begin{aligned}
1336 \quad &\overline{\begin{pmatrix} \partial \Xi_1 / \partial x_1 & \partial \Xi_2 / \partial x_1 & \partial \Xi_3 / \partial x_1 \\ \partial \Xi_1 / \partial x_2 & \partial \Xi_2 / \partial x_2 & \partial \Xi_3 / \partial x_2 \\ \partial \Xi_1 / \partial x_3 & \partial \Xi_2 / \partial x_3 & \partial \Xi_3 / \partial x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}^L = \\
1337 \quad &\underbrace{\begin{pmatrix} \overline{u}_1^L \\ \overline{u}_2^L \\ \overline{u}_3^L \end{pmatrix}}_{\text{LM velocity}} - \underbrace{\begin{pmatrix} -\partial \xi_1 / \partial x_1 & -\partial \xi_2 / \partial x_1 & -\partial \xi_3 / \partial x_1 \\ -\partial \xi_1 / \partial x_2 & -\partial \xi_2 / \partial x_2 & -\partial \xi_3 / \partial x_2 \\ -\partial \xi_1 / \partial x_3 & -\partial \xi_2 / \partial x_3 & -\partial \xi_3 / \partial x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^l \\ u_2^l \\ u_3^l \end{pmatrix}}_{\text{GL pseudomomentum}}, \quad (7.11)
\end{aligned}$$

1338 となる\*7.3。

1339 式 (7.9) の  $i$  を  $t$  に取り替えて全体に負の符号を掛ければ波の運動エネルギーの2倍になる (i.e.  
1340  $\xi_{j,t} u_j^l = u_j^l u_j^l$ )。つまり式 (7.9) の GL 疑運動量は [波の運動エネルギーの2倍] 割る [波の位相速度]

\*7.3本講義には以下の4種類の疑運動量が登場する。

- GL (generalized Lagrangian) 疑運動量：式 (7.11)。
- VL (vertically Lagrangian) 疑運動量：式 (10.19)。
- EB (energy-based) 疑運動量：式 (9.23)。
- VB (vorticity-based) 疑運動量：式 (11.12)。

GL 疑運動量と VL 疑運動量は兄弟関係にある。EB 疑運動量と VB 疑運動量は古典的な線形波動論でよく使われる疑運動量を区別する為に呼び変えたに過ぎない。

1341 と解釈できる。第6章で非回転流体の線形中立波の運動エネルギーと位置エネルギーの比率は1 :  
 1342 1になることを確認した。よって式(7.9)によって定義される一般化疑運動量は、波の線形古典理  
 1343 論と同じように、[波の運動エネルギーと位置エネルギーの和] 割る [波の位相速度] と解釈できるの  
 1344 である。

1345 回転流体の波のGL疑運動量について考察しよう。式(7.5)-(7.8)ではCoriolis項は $Q_i$ に含まれ  
 1346 ているので陽に扱わなかった。式(7.7)の変形をしっかりと押さえておけば、Coriolis項をどのよ  
 1347 うに処理するのか自明である。AM78aの原論文の式(3.1)に定義されているように回転流体に対  
 1348 するGL疑運動量は、

$$1349 \quad u_i^{gp} = \overline{-\xi_{1,i}(u_1^l - f\xi_2/2)^L - \xi_{2,i}(u_2^l + f\xi_1/2)^L - \xi_{3,i}u_3^l}^L$$

$$1350 \quad = \overline{-\xi_{j,i}u_j^l + f(\xi_{1,i}\xi_2 - \xi_1\xi_{2,i})/2}^L, \quad (7.12)$$

1351 となる。式(7.12)の $i$ を $t$ に取り替えて全体に負の符号を掛ければ式(6.22)の一行目にある一  
 1352 般化疑エネルギーの定義と等しくなる。第6章で線形中立波の一般化疑エネルギーは古典的な波の  
 1353 エネルギーに等しくなることを確認した。よって式(7.12)によって定義される一般化疑運動量は、  
 1354 波の線形古典理論と同じように、[波の運動エネルギーと位置エネルギーの和] 割る [波の位相速度]  
 1355 と解釈できるのである。

1356 成層流体中の静力学の中立波(慣性重力波など)を考察するには、式(7.9)や(7.12)における鉛  
 1357 直変位 $\xi_3$ に関する項を外すことに注意しよう。これを確認するには式(7.6b)の $[\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k}]u_3$   
 1358 部分をゼロと見なして、式(7.7)の変形を見直せばよい。

## 1359 7.4 渦度力の導出

1360 風波の分野では原則的に海水の密度を固定値として扱うので式(7.8)の右辺第1項は省略してよ  
 1361 い。また外力項(粘性とCoriolis力)は後で別途扱うので省略する。式(7.8)を書き直すと

$$1362 \quad (\partial_t + \bar{u}_k^L \partial_{x_k})(\bar{u}_i^L - u_i^{gp}) - \bar{u}_{k,i}^L u_k^{gp} = -\partial_{x_i} \left[ \overline{(1/\rho^\xi)p^\xi}^L + (1/2)u_k^L u_k^L - (1/2)\overline{u_j^\xi u_j^\xi}^L \right]$$

$$1363 \quad = -\partial_{x_i} \left[ \overline{(1/\rho^\xi)p^\xi}^L - (1/2)\overline{u_j^l u_j^l}^L \right], \quad (7.13)$$

1364 となる。

1365 Stokesドリフト速度のTaylor近似式(5.31)は平均流が十分に弱い場合に有効である。Langmuir  
 1366 循環を平均流と見なすとその平均速度は波の位相変化による擾乱速度に比べて十分に弱いので、こ  
 1367 の条件があてはまる。Stokesドリフト速度をAM78aの座標系で近似的に書くと $u_i^{Stokes} = \overline{u_{i,j}^l \xi_j}^L$   
 1368 となる。波が統計的に定常であると仮定すると、GL疑運動量が

$$1369 \quad u_i^{gp} = \overline{-\xi_{j,i}u_j^l}^L$$

$$1370 \quad = \overline{u_{j,i}^l \xi_j}^L$$

$$1371 \quad = \overline{u_{i,j}^l \xi_j}^L + \overline{(u_{j,i}^l - u_{i,j}^l)\xi_j}^L$$

$$1372 \quad = u_i^{Stokes} + \overline{(u_{j,i}^l - u_{i,j}^l)\xi_j}^L, \quad (7.14)$$

1373 のようにStokesドリフト速度と関係していることが分かる。水面波の位相変化による運動はおよ

1374 そ渦なし<sup>\*7.4</sup>なので  $u_i^{gp} = u_i^{Stokes}$  を式 (7.13) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 1375 \quad (\partial_t + \bar{u}_k^\epsilon \partial_{x_k}) \bar{u}_i^\epsilon &= -\partial_{x_i} \left[ \overline{(1/\rho^\epsilon) p^{\epsilon L}} - (1/2) \overline{u_j^l u_j^l L} \right] - u_k^{Stokes} \bar{u}_{i,k}^\epsilon + \bar{u}_{k,i}^L u_k^{Stokes} \\
 1376 &= -\partial_{x_i} \left[ \overline{(1/\rho^\epsilon) p^{\epsilon L}} - (1/2) \overline{u_j^l u_j^l L} \right] + u_k^{Stokes} (\bar{u}_{k,i}^\epsilon - \bar{u}_{i,k}^\epsilon), \quad (7.15)
 \end{aligned}$$

1377 のように式 (7.2a)-(7.2b) に対応する結果が得られる。式 (7.15) の 2 行目の最後の項が渦度力である  
 1378 (Leibovich, 1980; Craik, 1985)。

## 1379 7.5 まとめ

- 1380 ● 変形型の運動量の式 (7.8) の導出の骨格部分 [特に式 (7.7)] には微小振幅擾乱の仮定が使われて  
 1381 いていない。この意味で AM78 の体系は有限振幅波や非線形波に適用可能とよく言われる。と  
 1382 はいっても砕波が起きない程度に有限振幅なという但し書きが必要である (第 6 章)。また  
 1383 渦度力の導出では波が渦なしである事を仮定しているので、摂動展開の概念が暗黙に含まれ  
 1384 ている。
- 1385 ● AM78a の運動量方程式には直接型と変形型の 2 種類の表現があるが、その起源は Lagrange  
 1386 (1788) までさかのぼる事ができる。
- 1387 ● 直接型の運動量の式の予報変数は Lagrange 平均速度  $\bar{u}_i^L$  である。
- 1388 ● 変形型の運動量の式の予報変数は Lagrange 平均速度マイナス GL 疑運動量  $\bar{u}_i^L - u_i^{gp}$  である。
- 1389 ● 「直接型の運動量の式」 マイナス 「変形型の運動量の式」 をすれば、GL 疑運動量の時間発  
 1390 展式が得られる。
- 1391 ● GL 疑運動量は座標変換の行列と深く関係している。
- 1392 ● GL 疑運動量が Stokes ドリフト速度と一致するのは擾乱速度が渦なしの場合だけである。
- 1393 ● 風波の分野では地球の回転の影響は小さいので、波のエネルギーの KE 成分と PE 成分の比  
 1394 率を 1 : 1 とみなすことができる。水面波の場合、PE を得るには水深積分をとらなくては  
 1395 ならないのでいろいろな式変形に制限がかかる。回避策として KE の 2 倍をもって波のエネ  
 1396 ルギーと見なしたのが、一般化疑エネルギー (第 6 章) である。AM78a の疑運動量は疑エ  
 1397 ネルギーを位相速度で割った物と解釈することができる。
- 1398 ● AM78a の体系も含めて Lagrange 平均理論は一般的に平均流のシアが強い時に面倒な事が起  
 1399 ころ。Langmuir 循環 (i.e. 平均流) は波の位相変化による擾乱速度に比べて十分に弱いので、  
 1400 そのような懸念が生じない。

\*7.4 非粘性かつ平均流のシアがない場合に成り立つ。詳しくは次章で説明する。

#### 444 MÉCANIQUE ANALITIQUE.

des termes affectés de  $Dx$ ,  $Dy$ ,  $Dz$  donnera immédiatement les valeurs de  $\frac{D\lambda}{Dx}$ , &c.

Or par les règles ordinaires de l'élimination on a

$$da = \frac{\alpha Dx + \alpha' Dy + \alpha'' Dz}{0},$$

$$db = \frac{\beta Dx + \beta' Dy + \beta'' Dz}{0},$$

$$dc = \frac{\gamma Dx + \gamma' Dy + \gamma'' Dz}{0},$$

en supposant

$$\alpha = \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{dc} - \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{db}, \quad \alpha' = \frac{dx}{dc} \times \frac{dz}{db} - \frac{dx}{db} \times \frac{dz}{dc},$$

$$\alpha'' = \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{dc} - \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{db}, \quad \beta = \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{da} - \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{dc},$$

$$\beta' = \frac{dx}{da} \times \frac{dz}{dc} - \frac{dx}{dc} \times \frac{dz}{da}, \quad \beta'' = \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{da} - \frac{dx}{da} \times \frac{dy}{dc},$$

$$\gamma = \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{db} - \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{da}, \quad \gamma' = \frac{dx}{db} \times \frac{dz}{da} - \frac{dx}{da} \times \frac{dz}{db},$$

$$\gamma'' = \frac{dx}{da} \times \frac{dy}{db} - \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{da},$$

$$0 = \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{dc} + \frac{dx}{db} \times \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{da}$$

$$- \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{db} \times \frac{dz}{da} + \frac{dx}{dc} \times \frac{dy}{da} \times \frac{dz}{db} - \frac{dx}{da} \times \frac{dy}{dc} \times \frac{dz}{db}.$$

Faisant donc ces substitutions dans l'expression  $\frac{d\lambda}{da} da + \frac{d\lambda}{db} db + \frac{d\lambda}{dc} dc$ , & comparant ensuite avec l'expression identique  $\frac{D\lambda}{Dx} Dx + \frac{D\lambda}{Dy} Dy + \frac{D\lambda}{Dz} Dz$ , on aura

図 7.3: Lagrange (1788) の 444 頁.

$$\frac{D\lambda}{Dx} = \frac{a}{\theta} \times \frac{d\lambda}{da} + \frac{\beta}{\theta} \times \frac{d\lambda}{db} + \frac{\gamma}{\theta} \times \frac{d\lambda}{dc} ;$$

$$\frac{D\lambda}{Dy} = \frac{a'}{\theta} \times \frac{d\lambda}{da} + \frac{\beta'}{\theta} \times \frac{d\lambda}{db} + \frac{\gamma'}{\theta} \times \frac{d\lambda}{dc} ,$$

$$\frac{D\lambda}{Dz} = \frac{a''}{\theta} \times \frac{d\lambda}{da} + \frac{\beta''}{\theta} \times \frac{d\lambda}{db} + \frac{\gamma''}{\theta} \times \frac{d\lambda}{dc} .$$

Ainsi substituant ces valeurs dans les trois équations (A) de l'article 2, elles deviendront de cette forme, après avoir multiplié par  $\theta$ ,

$$\left. \begin{aligned} \theta \Delta \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + X \right) - a \frac{d\lambda}{da} - \beta \frac{d\lambda}{db} - \gamma \frac{d\lambda}{dc} &= 0 \\ \theta \Delta \left( \frac{d^2 y}{dt^2} + Y \right) - a' \frac{d\lambda}{da} - \beta' \frac{d\lambda}{db} - \gamma' \frac{d\lambda}{dc} &= 0 \\ \theta \Delta \left( \frac{d^2 z}{dt^2} + Z \right) - a'' \frac{d\lambda}{da} - \beta'' \frac{d\lambda}{db} - \gamma'' \frac{d\lambda}{dc} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (C).$$

où il n'y a, comme l'on voit, que des différences partielles relatives à  $a, b, c, t$ .

Dans ces équations la quantité  $\Delta$  qui exprime la densité, est une fonction donnée de  $a, b, c$  sans  $t$  puisqu'elle doit demeurer invariable pour chaque particule; & si le fluide est homogène,  $\Delta$  sera alors une constante indépendante de  $a, b, c, t$ . Quant aux quantités  $X, Y, Z$  qui représentent les forces accélératrices, elles seront le plus souvent données en fonctions de  $x, y, z, t$ .

6. On peut, au reste, réduire les équations précédentes à une forme plus simple, en ajoutant ensemble, après les avoir multipliées respectivement & successivement par  $\frac{dx}{da}$ ,

図 7.4: Lagrange (1788) の 445 頁.

446 MÉCANIQUE ANALITIQUE.

$\frac{dy}{da}, \frac{dz}{da}$ , par  $\frac{dx}{db}, \frac{dy}{db}, \frac{dz}{db}$ , & par  $\frac{dx}{dc}, \frac{dy}{dc}, \frac{dz}{dc}$ ; car d'après les expressions de  $\theta, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ , &c, données ci-dessus, il est aisé de voir qu'on aura  $\theta = \alpha \frac{dx}{da}$   
 $+ \alpha' \frac{dy}{da} + \alpha'' \frac{dz}{da} = \beta \frac{dx}{db} + \beta' \frac{dy}{db} + \beta'' \frac{dz}{db}$   
 $= \gamma \frac{dx}{dc} + \gamma' \frac{dy}{dc} + \gamma'' \frac{dz}{dc}$ , ensuite  $\beta \frac{dx}{da} + \beta' \frac{dy}{da}$   
 $+ \beta'' \frac{dz}{da} = 0, \gamma \frac{dx}{da} + \gamma' \frac{dy}{da} + \gamma'' \frac{dz}{da} = 0, \alpha \frac{dx}{db}$   
 $+ \alpha' \frac{dy}{db} + \alpha'' \frac{dz}{db} = 0$ , & ainsi de suite. De sorte que par ces opérations & ces réductions, on aura les transformées

$$\left. \begin{aligned} \Delta \left( \left( \frac{d^2x}{dt^2} + X \right) \frac{dx}{da} + \left( \frac{d^2y}{dt^2} + Y \right) \frac{dy}{da} + \left( \frac{d^2z}{dt^2} + Z \right) \frac{dz}{da} - \frac{d\lambda}{da} = 0 \right) \\ \Delta \left( \left( \frac{d^2x}{dt^2} + X \right) \frac{dx}{db} + \left( \frac{d^2y}{dt^2} + Y \right) \frac{dy}{db} + \left( \frac{d^2z}{dt^2} + Z \right) \frac{dz}{db} - \frac{d\lambda}{db} = 0 \right) \\ \Delta \left( \left( \frac{d^2x}{dt^2} + X \right) \frac{dx}{dc} + \left( \frac{d^2y}{dt^2} + Y \right) \frac{dy}{dc} + \left( \frac{d^2z}{dt^2} + Z \right) \frac{dz}{dc} - \frac{d\lambda}{dc} = 0 \right) \end{aligned} \right\} (D).$$

7. On transformera, d'une manière semblable, l'équation (B) de l'article 3; & pour cela, comme, d'après la remarque de l'article 4, les différentielles  $dx, dy, dz$  ne sont relatives qu'à la variable  $t$ , on les réduira d'abord aux différences partielles  $\frac{dx}{dt} dt, \frac{dy}{dt} dt, \frac{dz}{dt} dt$ ; en sorte que l'équation dont il s'agit étant divisée par  $dt$ , sera de la forme

$$\frac{D \cdot \frac{dx}{dt}}{Dx} + \frac{D \cdot \frac{dy}{dt}}{Dy} + \frac{D \cdot \frac{dz}{dt}}{Dz} = 0.$$

図 7.5: Lagrange (1788) の 446 頁.

## 1401 第8章 3次元 Euler 平均系

1402 本章では Craik and Leibovich (1970) による渦度力の導出手法を紹介する。水面における境界条  
1403 件はさておき、渦度方程式を首尾よく考察できるのが3次元 Euler 平均系の強みである。

### 1404 8.1 漸近展開

1405 3次元の速度ベクトル  $\mathbf{U} = (\mathbf{V}, w) = (u, v, w)$  と3次元の勾配演算子  $\nabla^\epsilon = (\nabla^\epsilon, \partial_z^\epsilon) =$   
1406  $(\partial_{x^\epsilon}, \partial_{y^\epsilon}, \partial_{z^\epsilon})$  を用いて、運動方程式 (7.1a)-(7.1c) を書き直すと

$$1407 \quad \partial_{t^\epsilon} \mathbf{U} + \nabla^\epsilon \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = \nabla^\epsilon (p + g\eta), \quad (8.1a)$$

$$1408 \quad \nabla^\epsilon \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (8.1b)$$

1409 となる。この式は Euler 座標系の偏微分で書かれている。無次元パラメータ  $\alpha \ll 1$  を用いて水面  
1410 の傾きを表す。任意の物理量  $A = \bar{A}^\epsilon + A'$  の平均成分と擾乱成分をそれぞれ漸近展開する。

$$1411 \quad \bar{A}^\epsilon = \alpha \bar{A}_1^\epsilon + \alpha^2 \bar{A}_2^\epsilon + \alpha^3 \bar{A}_3^\epsilon + O(\alpha^4), \quad (8.2a)$$

$$1412 \quad A' = \alpha A_1' + \alpha^2 A_2' + \alpha^3 A_3' + O(\alpha^4), \quad (8.2b)$$

1413 本章以降で使う「数の添字」は漸近展開の次数を表す。第6、7章や AM78 の原著論文における  
1414 「数字の添字」は3次元空間の軸の番号であるので混同しないように注意しよう。

1415 Langmuir 循環のスケーリングについては後で説明することとして、本章では次のような流速の  
1416 時間発展方程式を使う。平均速度については、

$$1417 \quad \partial_{T^\epsilon} \bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon + \nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon \bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon) + \nabla^\epsilon \cdot (\overline{\mathbf{U}'_1 \mathbf{U}'_3 + \mathbf{U}'_2 \mathbf{U}'_2 + \mathbf{U}'_3 \mathbf{U}'_1})^\epsilon = -\nabla^\epsilon (\bar{p}_4^\epsilon + g\bar{\eta}_4), \quad (8.3)$$

1418 とする。Reynolds 応力項には  $O(\alpha^3)$  までの擾乱速度が含まれている。擾乱速度については

$$1419 \quad \partial_{\tau^\epsilon} \mathbf{U}'_1 = -\nabla^\epsilon (p'_1 + g\eta'_1), \quad (8.4a)$$

$$1420 \quad \partial_{\tau^\epsilon} \mathbf{U}'_2 + \nabla^\epsilon \cdot (\mathbf{U}'_1 \mathbf{U}'_1) = -\nabla^\epsilon (p'_2 + g\eta'_2), \quad (8.4b)$$

$$1421 \quad \partial_{\tau^\epsilon} \mathbf{U}'_3 + \partial_{T^\epsilon} \mathbf{U}'_1 + \nabla^\epsilon \cdot [(\bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon + \mathbf{U}'_2) \mathbf{U}'_1 + \mathbf{U}'_1 (\bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon + \mathbf{U}'_2)] = -\nabla^\epsilon (p'_3 + g\eta'_3), \quad (8.4c)$$

1422 とする。平均流が波に与える効果は  $O(\alpha^3)$  の波に現れる。

### 1423 8.2 Langmuir 循環のスケーリング

1424 波の位相速度を  $c$  とすると、

- 1425 • 仮定 1: 波による擾乱速度は  $\|u'\| \sim \|w'\| \sim \alpha c$ ,

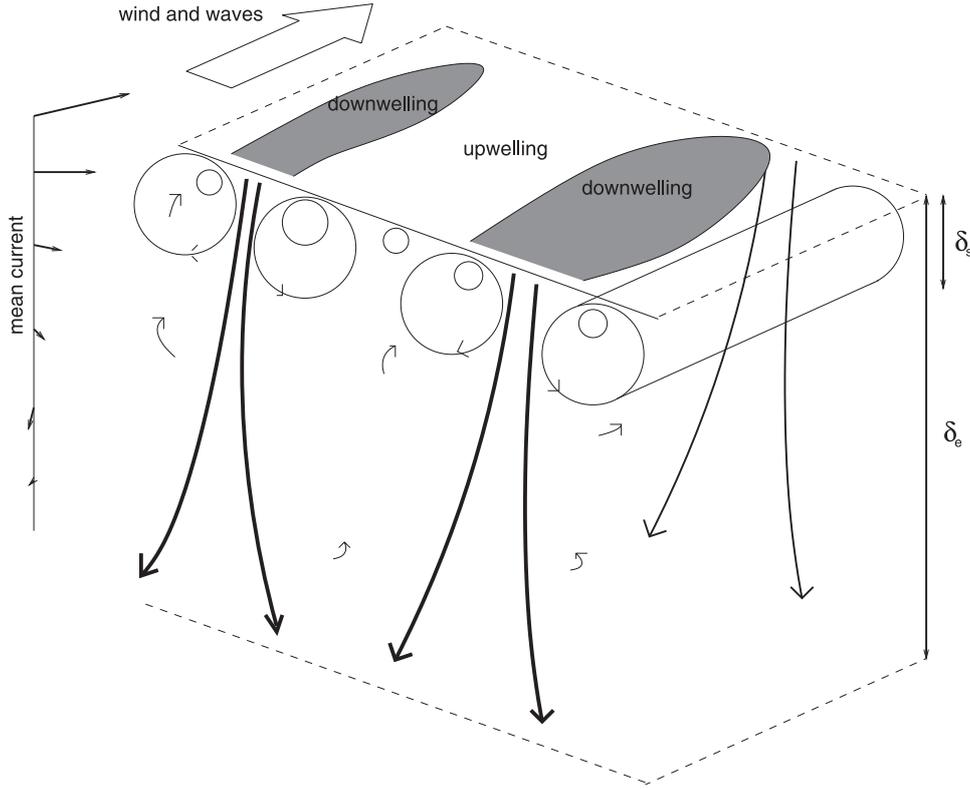


図 8.1: 海洋の混合層内の Langmuir 循環の模式図.  $\delta_s$  が風波による Stokes ドリフトが卓越する深さ、 $\delta_e$  が Ekman 流が卓越する深さを表す. Polton and Belcher (2007).

1426     • 仮定 2: 平均流 (Langmuir) の速度は  $\|\bar{u}^\epsilon\| \sim \|\bar{w}^\epsilon\| \sim \alpha^2 c$ 、  
 1427 とする。記号  $\|A\|$  は任意の物理量  $A$  のスケールを表す。仮定 2 から  $\bar{\mathbf{U}}_1^\epsilon = 0$  となる。次に、波の  
 1428 水平波数を  $k$ 、振動数を  $\omega$  とすると、個々の波の運動の水平と鉛直スケールはともに  $k^{-1}$ 、位相変  
 1429 化の時間スケールは  $\omega^{-1}$  である。そこで

1430     • 仮定 3: 平均流 (Langmuir 循環) が変化する空間スケールは水平と鉛直ともに  $k^{-1}$

1431     • 仮定 4: 平均流 (Langmuir 循環) が発展する時間スケールは  $1/(\alpha^2 \omega) = k^{-1}/(\alpha^2 c)$

1432 とする。仮定 4 平均流の時間変化が波の位相変化にくらべて  $\alpha^2$  倍ゆっくりしていることを意味す  
 1433 る。これを実現するには時間微分オペレータを  $\partial_{t^\epsilon} = \partial_{\tau^\epsilon} + \alpha^2 \partial_{T^\epsilon}$  のように分解すればよい。 $\partial_{\tau^\epsilon}$   
 1434 は擾乱量と平均量の両方に作用し、 $\partial_{T^\epsilon}$  は平均量だけに作用する。

1435 
$$\partial_{t^\epsilon} A' = \partial_{\tau^\epsilon} A' + \alpha^2 \partial_{T^\epsilon} A', \quad (8.5a)$$

1436 
$$\partial_{t^\epsilon} \bar{A}^\epsilon = \alpha^2 \partial_{T^\epsilon} \bar{A}^\epsilon, \quad (8.5b)$$

1437 平均流の時間発展式 (8.3) のすべての項が  $\alpha^4 c^2 k$  のスケールになっている事が確認できる。

1438  $O(\alpha)$  の波の運動量の式 (8.4a) の解は

$$1439 \quad \phi' = (A/\kappa) \cos \theta \exp \kappa(z^\epsilon - \bar{\eta}), \quad \theta = kx^\epsilon + ly^\epsilon - \omega\tau^\epsilon, \quad (8.6a)$$

$$1440 \quad \omega^2 = g\kappa, \quad \kappa = \sqrt{k^2 + l^2}, \quad (8.6b)$$

$$1441 \quad \mathbf{U}'_1 = \nabla^\epsilon \phi'_{\tau^\epsilon}, \quad p' + g\eta' = \omega^2 \phi' \quad (8.6c)$$

1442 と書く事ができる<sup>\*8.1</sup>。鉛直速度が $w' = \phi'_{z^\epsilon}$  なので水面の変位は $\eta' = \phi'_{z^\epsilon}|_{z^\epsilon=\bar{\eta}}$  で表される。 $A$   
1443 は水面変位の振幅である。Stokes ドリフト速度は  $O(\alpha^2)$  に現れ

$$1444 \quad u^{Stokes} = \underbrace{(\phi'_{x^\epsilon} u'_{1^\epsilon})_{x^\epsilon}}_0 + \underbrace{(\phi'_{y^\epsilon} u'_{1^\epsilon})_{y^\epsilon}}_0 + \underbrace{(\phi'_{z^\epsilon} u'_{1^\epsilon})_{z^\epsilon}}_{2k\omega A^2 e^{2\kappa(z^\epsilon - \bar{\eta})}}, \quad (8.7a)$$

$$1445 \quad v^{Stokes} = \underbrace{(\phi'_{x^\epsilon} v'_{1^\epsilon})_{x^\epsilon}}_0 + \underbrace{(\phi'_{y^\epsilon} v'_{1^\epsilon})_{y^\epsilon}}_0 + \underbrace{(\phi'_{z^\epsilon} v'_{1^\epsilon})_{z^\epsilon}}_{2l\omega A^2 e^{2\kappa(z^\epsilon - \bar{\eta})}}, \quad (8.7b)$$

1446 となる [式 (5.31) を参照]。仮定 2 で平均流 (Langmuir 循環) の速度を  $O(\alpha^2)$  としたのは、Stokes ドリ  
1447 フト速度と同じオーダーにしたのである。Stokes ドリフト速度の深さスケールは  $\delta_s \equiv (2\kappa)^{-1} \sim 5$  m  
1448 程度である (Tamura et al., 2012)。これは、波の振動数を  $\omega \sim 1 \text{ sec}^{-1}$  と仮定して、分散関係式  
1449 (8.6b) から  $\kappa^{-1} \sim 10$  m 程度として見積もった。海洋混合層内の Ekman スパイラルの深さスケ  
1450 ールは  $\delta_e \equiv \sqrt{\nu/f} \sim 10$  m 程度である。これは乱流粘性係数  $\nu = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ sec}^{-1}$  と Coriolis パラメ  
1451 タ  $f = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$  から見積もった (図 8.1)。また Langmuir 循環の時間スケールは 10 分程度、ロー  
1452 ル状構造の直径は波の波長と同程度のスケールである。

### 1453 8.3 渦度を持つ波

1454 平均流の式 (8.3) の Reynolds 応力項は  $O(\alpha^3)$  の波の寄与を含んでいるが、 $O(\alpha^3)$  の波は平均流  
1455 による Doppler シフトや平均流のシアの効果を影響を受けている為に、解析解を導くのは難しい  
1456 [式 (8.4c) を参照]。Craig and Leibovich (1976) は渦度方程式を使って  $O(\alpha^3)$  の波の解を導くこと  
1457 を提案した。まず、運動量の式 (8.1a) の移流項をベクトル不変型に書き直す。

$$1458 \quad \partial_{t^\epsilon} \mathbf{U} + (\nabla^\epsilon \times \mathbf{U}) \times \mathbf{U} = -\nabla^\epsilon (p + g\eta + |\mathbf{U}|^2/2), \quad (8.8)$$

1459 この式の回転をとると渦度方程式が得られる。

$$1460 \quad \partial_{t^\epsilon} (\nabla^\epsilon \times \mathbf{U}) = -\mathbf{U} \cdot \nabla^\epsilon (\nabla^\epsilon \times \mathbf{U}) + (\nabla^\epsilon \times \mathbf{U}) \cdot \nabla^\epsilon \mathbf{U}, \quad (8.9)$$

1461 渦度方程式 (8.8) に漸近展開の式 (8.2a)-(8.2b) を代入して、擾乱渦度の発展の式を導く。

$$1462 \quad \partial_{\tau^\epsilon} (\nabla^\epsilon \times \mathbf{U}'_1) = 0, \quad (8.10a)$$

$$1463 \quad \partial_{\tau^\epsilon} (\nabla^\epsilon \times \mathbf{U}'_2) = 0, \quad (8.10b)$$

$$1464 \quad \partial_{\tau^\epsilon} (\nabla^\epsilon \times \mathbf{U}'_3) = -\mathbf{U}'_1 \cdot \nabla^\epsilon (\nabla^\epsilon \times \bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon) + (\nabla^\epsilon \times \bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon) \cdot \nabla^\epsilon \mathbf{U}'_1, \quad (8.10c)$$

1465 2次と3次の式 (8.4b)-(8.4c) を導くにあたり1次の波が渦なしであることを使った。式 (8.10c) の  
1466 時間積分をとると  $O(\alpha^3)$  の波の渦度が得られる [式 (8.5b) を参照]。

$$1467 \quad \nabla^\epsilon \times \mathbf{U}'_3 = -(\nabla^\epsilon \phi' \cdot \nabla^\epsilon) \boldsymbol{\Omega} + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla^\epsilon) \nabla^\epsilon \phi', \quad (8.11)$$

<sup>\*8.1</sup> 深水波の解と分散関係式は式 (8.5a) である。浅水波の解と分散関係式は  $\phi' = (A/\kappa) \cos \theta \frac{\cosh \kappa(z^\epsilon + H_b)}{\sinh \kappa(\bar{\eta} + H_b)}$  と  $\omega^2 = g\kappa \tanh \kappa(\bar{\eta} + H_b)$  である。いずれの場合も  $\phi'_{x^\epsilon x^\epsilon} + \phi'_{y^\epsilon y^\epsilon} + \phi'_{z^\epsilon z^\epsilon} = 0$  が成り立つ。

1468 記号  $\Omega$  は平均流の渦度ベクトルを表す。

$$1469 \quad \Omega = \begin{pmatrix} \Omega^x \\ \Omega^y \\ \Omega^z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \partial_{y^\epsilon} \bar{w}_2^\epsilon - \partial_{z^\epsilon} \bar{v}_2^\epsilon \\ \partial_{z^\epsilon} \bar{u}_2^\epsilon - \partial_{x^\epsilon} \bar{w}_2^\epsilon \\ \partial_{x^\epsilon} \bar{v}_2^\epsilon - \partial_{y^\epsilon} \bar{u}_2^\epsilon \end{pmatrix} = \nabla^\epsilon \times \bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon, \quad (8.12)$$

1470 ベクトル不変型の運動量の式 (8.8) に漸近展開の式 (8.2b) と式 (8.10a)-(8.10b) を代入して平均流  
1471 の発展式を導く。

$$1472 \quad \partial_{T^\epsilon} \bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon + \nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon \bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon) = -\nabla^\epsilon \left[ \bar{p}_4^\epsilon + g\bar{\eta}_4 + \overline{(2\mathbf{U}_1^\epsilon \cdot \mathbf{U}_3^\epsilon + \mathbf{U}_2^\epsilon \cdot \mathbf{U}_2^\epsilon)}/2 \right] - \overline{(\nabla^\epsilon \times \mathbf{U}_3^\epsilon) \times \mathbf{U}_1^\epsilon},$$

1473 (8.13)

1474 平均流による移流に関する項はフラックス発散型に戻してある。最後の項は  $O(\alpha^3)$  の波の渦度と  
1475  $O(\alpha)$  の波の速度の外積になっている。式 (8.11) は式 (8.3) の Reynolds 応力項をベクトル不変型に  
1476 書き換えても導くことができる。

## 1477 8.4 渦度力を用いた平均流方程式

1478 いよいよ平均流の運動量の式 (8.11) に  $O(\alpha^3)$  の波の渦度 (8.11) を代入する。これより先の展開  
1479 にあたって次の3つの条件を使う。第1の条件は速度ポテンシャル (8.5a) のさまざまな偏微分の  
1480 位相関係である。

$$1481 \quad \phi' \propto \cos \theta, \quad \phi'_{x^\epsilon} \propto \sin \theta, \quad \phi'_{y^\epsilon} \propto \sin \theta, \quad \phi'_{z^\epsilon} \propto \cos \theta, \quad \phi'_{\tau^\epsilon} \propto \sin \theta, \quad (8.14)$$

1482 第2の条件は1次の波の統計量が水平一様かつ定常であるという仮定である。つまり  $A'$  と  $B'$  を  
1483  $\phi'$  から派生する量である (例えば  $A' = \phi'_{\tau^\epsilon}$ ,  $B' = \phi'_{z^\epsilon}$  など) とすると、

$$1484 \quad \overline{A'_{x^\epsilon} B'}^\epsilon = -\overline{A' B'_{x^\epsilon}}^\epsilon, \quad \overline{A'_{y^\epsilon} B'}^\epsilon = -\overline{A' B'_{y^\epsilon}}^\epsilon, \quad \overline{A'_{\tau^\epsilon} B'}^\epsilon = -\overline{A' B'_{\tau^\epsilon}}^\epsilon, \quad (8.15)$$

1485 となる。第3の条件は平均流の渦度についてのベクトル演算公式である。

$$1486 \quad 0 = \nabla^\epsilon \cdot (\nabla^\epsilon \times \bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon) = \nabla^\epsilon \cdot \Omega = \Omega_{x^\epsilon}^x + \Omega_{y^\epsilon}^y + \Omega_{z^\epsilon}^z, \quad (8.16)$$

1487 式 (8.11) を式 (8.13) の最後の項に代入してから、条件式 (8.14)-(8.16) を使って展開すると、 $x$   
1488 成分については

$$\begin{aligned} 1489 & (\nabla^\epsilon \phi' \cdot \nabla^\epsilon \Omega^y - \Omega \cdot \nabla^\epsilon \phi'_{y^\epsilon}) \phi'_{z^\epsilon \tau^\epsilon} - (\nabla^\epsilon \phi' \cdot \nabla^\epsilon \Omega^z - \Omega \cdot \nabla^\epsilon \phi'_{z^\epsilon}) \phi'_{y^\epsilon \tau^\epsilon} \\ 1490 & = (\phi'_{x^\epsilon} \Omega_{x^\epsilon}^y + \phi'_{y^\epsilon} \Omega_{y^\epsilon}^y - \Omega^z \phi'_{y^\epsilon z^\epsilon}) \phi'_{z^\epsilon \tau^\epsilon} - (\phi'_{z^\epsilon} \Omega_{z^\epsilon}^z - \Omega^z \phi'_{z^\epsilon z^\epsilon}) \phi'_{y^\epsilon \tau^\epsilon} \\ 1491 & = \Omega^z (\phi'_{z^\epsilon} \phi'_{y^\epsilon \tau^\epsilon})_{z^\epsilon} - (\phi'_{x^\epsilon \tau^\epsilon} \phi'_{z^\epsilon}) \Omega_{x^\epsilon}^y + (\phi'_{y^\epsilon \tau^\epsilon} \phi'_{z^\epsilon}) \Omega_{x^\epsilon}^x \\ 1492 & = \Omega^z v^{Stokes} + [-(\phi'_{x^\epsilon \tau^\epsilon} \phi'_{z^\epsilon}) \Omega^y + (\phi'_{y^\epsilon \tau^\epsilon} \phi'_{z^\epsilon}) \Omega^x]_{x^\epsilon}, \end{aligned} \quad (8.17a)$$

1493 となる。 $y$  成分については

$$\begin{aligned} 1494 & (\nabla^\epsilon \phi' \cdot \nabla^\epsilon \Omega^z - \Omega \cdot \nabla^\epsilon \phi'_{z^\epsilon}) \phi'_{x^\epsilon \tau^\epsilon} - (\nabla^\epsilon \phi' \cdot \nabla^\epsilon \Omega^x - \Omega \cdot \nabla^\epsilon \phi'_{x^\epsilon}) \phi'_{z^\epsilon \tau^\epsilon} \\ 1495 & = (\phi'_{z^\epsilon} \Omega_{z^\epsilon}^z - \Omega^z \phi'_{z^\epsilon z^\epsilon}) \phi'_{x^\epsilon \tau^\epsilon} - (\phi'_{x^\epsilon} \Omega_{x^\epsilon}^x + \phi'_{y^\epsilon} \Omega_{y^\epsilon}^x - \Omega^z \phi'_{x^\epsilon z^\epsilon}) \phi'_{z^\epsilon \tau^\epsilon} \\ 1496 & = -\Omega^z (\phi'_{z^\epsilon} \phi'_{x^\epsilon \tau^\epsilon})_{z^\epsilon} + (\phi'_{y^\epsilon \tau^\epsilon} \phi'_{z^\epsilon}) \Omega_{y^\epsilon}^x - (\phi'_{x^\epsilon \tau^\epsilon} \phi'_{z^\epsilon}) \Omega_{y^\epsilon}^y \\ 1497 & = -\Omega^z u^{Stokes} + [-(\phi'_{x^\epsilon \tau^\epsilon} \phi'_{z^\epsilon}) \Omega^y + (\phi'_{y^\epsilon \tau^\epsilon} \phi'_{z^\epsilon}) \Omega^x]_{y^\epsilon}, \end{aligned} \quad (8.17b)$$

1498 となる。z 成分については

$$\begin{aligned}
1499 & (\nabla^\epsilon \phi' \cdot \nabla^\epsilon \Omega^x - \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla^\epsilon \phi'_{x^\epsilon}) \phi'_{y^\epsilon \tau^\epsilon} - (\nabla^\epsilon \phi' \cdot \nabla^\epsilon \Omega^y - \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla^\epsilon \phi'_{y^\epsilon}) \phi'_{x^\epsilon \tau^\epsilon} \\
1500 & = (\phi'_{z^\epsilon} \Omega_{z^\epsilon}^x - \Omega^x \phi'_{x^\epsilon x^\epsilon} - \Omega^y \phi'_{x^\epsilon y^\epsilon}) \phi'_{y^\epsilon \tau^\epsilon} - (\phi'_{z^\epsilon} \Omega_{z^\epsilon}^y - \Omega^x \phi'_{x^\epsilon y^\epsilon} - \Omega^y \phi'_{y^\epsilon y^\epsilon}) \phi'_{x^\epsilon \tau^\epsilon} \\
1501 & = -\Omega_{z^\epsilon}^y (\phi'_{z^\epsilon} \phi'_{x^\epsilon \tau^\epsilon}) + \Omega_{z^\epsilon}^x (\phi'_{z^\epsilon} \phi'_{y^\epsilon \tau^\epsilon}) \\
1502 & = -\Omega_{z^\epsilon}^y u^{Stokes} + \Omega_{z^\epsilon}^x v^{Stokes} + [-(\phi'_{x^\epsilon \tau^\epsilon} \phi'_{z^\epsilon}) \Omega^y + (\phi'_{y^\epsilon \tau^\epsilon} \phi'_{z^\epsilon}) \Omega^x]_{z^\epsilon}, \quad (8.17c)
\end{aligned}$$

1503 となる。式 (8.17a)-(8.17c) を平均流の運動量の式 (8.11) に代入すると

$$1504 \quad \partial_{T^\epsilon} \bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon + \nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon \bar{\mathbf{U}}_2^\epsilon) = -\nabla^\epsilon (\bar{p}_4^\epsilon + g\bar{\eta}_4 + \Pi) + \mathbf{U}^{Stokes} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (8.18a)$$

$$1505 \quad \mathbf{U}^{Stokes} = (u^{Stokes}, v^{Stokes}, 0), \quad (8.18b)$$

$$1506 \quad \Pi = (\overline{2\mathbf{U}'_1 \cdot \mathbf{U}'_3 + \mathbf{U}'_2 \cdot \mathbf{U}'_2})/2 - (\overline{z'_1 u'_1}) \Omega^y + (\overline{z'_1 v'_1}) \Omega^x, \quad (8.18c)$$

1507 のように渦度力が得られる。記号  $z'_1 \equiv \phi'_{z^\epsilon}$  は鉛直変位である。記号  $\Pi$  は Bernoulli ヘッドと呼ば  
1508 れ、 $O(\alpha^3)$  の波の解を含むが、全章で説明したとおり  $\Pi$  は非静水圧  $\bar{p}_4^\epsilon$  の一部として取り扱えば  
1509 よいので、 $O(\alpha^3)$  の波の解を導く必要がなくなる。

## 1510 8.5 Coriolis-Stokes 力

1511 風波の分野で渦度力と並んで有名なのが Coriolis-Stokes 力である (図 8.2)。地球の回転の影響  
1512 を受けた水面波が平均流に及ぼす効果を表す。風波の振動数のスケールが  $1 \text{ sec}^{-1}$ 、地球の回転に  
1513 による慣性振動数のスケールが  $10^{-4} \text{ sec}^{-1}$  なので、4 桁もの開きがあり、風波の慣性重力波成分は  
1514 ごくわずかなものである。しかしながら、線形波の解析解を使って Reynolds 応力項を計算すると、  
1515 地球の回転がない場合とある場合では明瞭な違いが現れる。地球の回転を考えない場合は

$$1516 \quad (\overline{w' \mathbf{V}'})_{z^\epsilon} = 0, \quad (8.19)$$

1517 となる。これは非回転系の線形波の解析解 (8.5a)-(8.5b) とその位相関係の式 (8.14) を使って確認  
1518 することができる。

1519 次に、地球の回転がある場合には線形波の支配方程式が

$$1520 \quad \mathbf{V}'_{t^\epsilon} + f\mathbf{z} \times \mathbf{V}' = -\nabla^\epsilon (p' + g\eta'), \quad (8.20a)$$

$$1521 \quad w'_{t^\epsilon} = -p'_{z^\epsilon}, \quad (8.20b)$$

1522 となる。この解析解 (省略) を使って Reynolds 応力項を計算すると

$$1523 \quad (\overline{w' \mathbf{V}'})_{z^\epsilon} = f\mathbf{z} \times \mathbf{V}^{Stokes}, \quad (8.21)$$

1524 のように Stokes ドリフト速度による Coriolis 項が現れるのである (Hasselmann, 1970; Huang,  
1525 1979)。

1526 数値モデルで Euler 平均速度の時間発展を解く場合、渦度力に関連するスケールの現象と Coriolis-  
1527 Stokes 力に関連するスケールの現象の両方を捉える必要があるので、式 (7.2a) に Coriolis-Stokes  
1528 項を組み込むと、

$$1529 \quad (\partial_{t^\epsilon} + \bar{\mathbf{V}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon + \bar{w}^\epsilon \partial_{z^\epsilon}) \bar{\mathbf{V}}^\epsilon + f\mathbf{z} \times (\bar{\mathbf{V}}^\epsilon + \mathbf{V}^{Stokes}) = -\nabla^\epsilon (\bar{p}^\epsilon + g\bar{\eta} + \Pi) + \mathbf{V}^{Stokes} \times (\nabla^\epsilon \times \bar{\mathbf{V}}^\epsilon) \quad (8.22)$$

1530 となる。これが風波と表層流の相互作用に関する最近の研究で標準的に使われている式である。

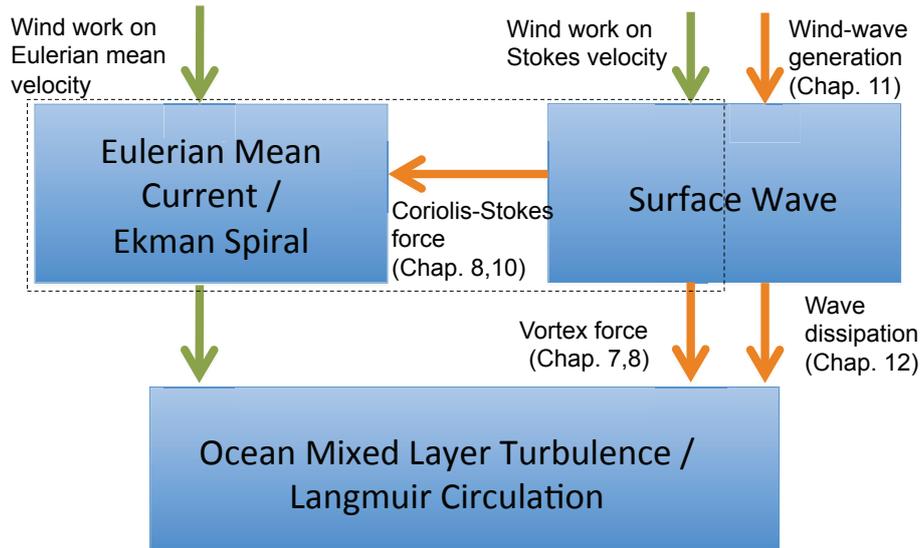


図 8.2: 海洋の表層流、水面波、混合層乱流のエネルギー収支の模式図。

## 8.6 まとめ

1531

- 1532 ● 水面における境界条件はさておき、渦度方程式を首尾よく考察できるのが3次元 Euler 平均  
1533 系の強みである\*8.2。
- 1534 ● 平均流による Doppler シフトや平均流の渦度の影響は  $O(\alpha^3)$  の波に現れる。
- 1535 ● 平均流の渦度の主成分は Ekman スパイラル速度の鉛直シアと言われているが、 Craik and  
1536 Leibovich (1976) の渦度力の導出では Coriolis 項や粘性項は省略されている。
- 1537 ● 式 (8.18a) のような渦度力の導出では Langmuir 循環を平均流の一部として扱うが、一般に  
1538 海洋の表層の平均流と言った場合には平均流は Ekman スパイラル速度と地衡流速度に限定  
1539 し、Langmuir 循環は混合層乱流の一部と見なす (図 8.2)。
- 1540 ● Coriolis-Stokes 力は Lagrange 平均系からも Euler 平均系からも導くことができる。前者の  
1541 場合は明らかであるが、後者の場合は式 (8.21) のように鉛直方向の Reynolds 応力項から導  
1542 くので、その事を強調する際には Hasselmann 応力項と呼んだりする。
- 1543 ● 式 (8.22) に乱流粘性項を付け加える必要がある。厳密には式 (7.8) の最後の 2 項 ( $\overline{Q_i^L} +$   
1544  $\overline{\xi_{j,i} \xi_j^L}$ ) を考察する必要がある。詳細は第 12 章で説明する。

## 8.7 追記

1545

1546 Coriolis-Stokes 項の話は、Euler 平均系と Lagrange 平均系の違いを理解するのに良い題材であ  
1547 る。本節に限っては水面波の問題を超えて一般的な線形波動の問題として Reynolds 応力項と形状  
1548 応力項の関係を説明する。

\*8.2 Lagrange 平均系で渦度方程式を扱うには相当の注意力を要する。詳細は第 11 章。

1549 Euler 平均した運動量方程式 (1.2) の Reynolds 応力項を書き直すと

$$1550 \quad \partial_{t^\epsilon} \bar{\mathbf{V}}^\epsilon + \nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{U}}^\epsilon \bar{\mathbf{V}}^\epsilon) + (\overline{u' \mathbf{V}'^\epsilon})_{x^\epsilon} + (\overline{v' \mathbf{V}'^\epsilon})_{y^\epsilon} + (\overline{w' \mathbf{V}'^\epsilon})_{z^\epsilon} + f \mathbf{z} \times \bar{\mathbf{V}}^\epsilon = -\nabla^\epsilon \bar{\mathbf{p}}^\epsilon, \quad (8.23)$$

1551 となる。圧力は全圧  $\mathbf{p}$  であっても静水圧  $\mathbf{p}$  であっても構わない。水平方向の擾乱速度  $\mathbf{V}'$  の支配方  
1552 程式は線形の中立波を考えて

$$1553 \quad \mathbf{V}'_{t^\epsilon} + f \mathbf{z} \times \mathbf{V}' = -\nabla^\epsilon \mathbf{p}', \quad (8.24)$$

1554 とする。鉛直方向の擾乱速度  $w'$  の方程式は静力学でも非静力学でも構わないので敢えて記述し  
1555 ない。

1556 次に Euler 平均系の擾乱速度を使って流体粒子の変位  $(x', y', z')$  を便宜的に定義する。

$$1557 \quad (x'_{t^\epsilon}, y'_{t^\epsilon}, z'_{t^\epsilon}) \equiv (u', v', z'), \quad (8.25)$$

1558 式 (8.24) と式 (8.25) を使って Reynolds 応力の各成分を展開すると、

$$1559 \quad \begin{aligned} u' \mathbf{V}' &= (x' \mathbf{V}')_{t^\epsilon} - x' \mathbf{V}'_{t^\epsilon} \\ &= (x' \mathbf{V}')_{t^\epsilon} + x' \nabla^\epsilon \mathbf{p}' + f \mathbf{z} \times (x' \mathbf{V}'), \end{aligned} \quad (8.26a)$$

$$1560 \quad \begin{aligned} v' \mathbf{V}' &= (y' \mathbf{V}')_{t^\epsilon} - y' \mathbf{V}'_{t^\epsilon} \\ &= (y' \mathbf{V}')_{t^\epsilon} + y' \nabla^\epsilon \mathbf{p}' + f \mathbf{z} \times (y' \mathbf{V}') \end{aligned} \quad (8.26b)$$

$$1561 \quad \begin{aligned} w' \mathbf{V}' &= (z' \mathbf{V}')_{t^\epsilon} - z' \mathbf{V}'_{t^\epsilon} \\ &= (z' \mathbf{V}')_{t^\epsilon} + z' \nabla^\epsilon \mathbf{p}' + f \mathbf{z} \times (z' \mathbf{V}'), \end{aligned} \quad (8.26c)$$

1565 となる。

1566 式 (8.26a)-(8.26c) を式 (8.23) の Reynolds 応力項に代入すると、

$$1567 \quad \begin{aligned} \partial_{t^\epsilon} (\bar{\mathbf{V}}^\epsilon + \mathbf{V}^{Stokes}) + \nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{U}}^\epsilon \bar{\mathbf{V}}^\epsilon) + f \mathbf{z} \times (\bar{\mathbf{V}}^\epsilon + \mathbf{V}^{Stokes}) \\ 1568 \quad = -\nabla^\epsilon \bar{\mathbf{p}}^\epsilon - (\overline{x' \nabla^\epsilon \mathbf{p}'^\epsilon})_{x^\epsilon} - (\overline{y' \nabla^\epsilon \mathbf{p}'^\epsilon})_{y^\epsilon} - (\overline{z' \nabla^\epsilon \mathbf{p}'^\epsilon})_{z^\epsilon}, \end{aligned} \quad (8.27)$$

1569 が得られる。この場合の記号  $\mathbf{V}^{Stokes}$  は

$$1570 \quad \mathbf{V}^{Stokes} \equiv (\overline{x' \mathbf{V}'^\epsilon})_{x^\epsilon} + (\overline{y' \mathbf{V}'^\epsilon})_{y^\epsilon} + (\overline{z' \mathbf{V}'^\epsilon})_{z^\epsilon}, \quad (8.28)$$

1571 という Stokes ドリフト速度の Euler 近似表現である。式 (8.27) は Lagrange 平均速度の時間発展  
1572 方程式と言える。式 (8.27) の最後の 3 項は 3次元の形状応力と言う事ができる。これらの性質か  
1573 ら式 (8.27) は Lagrange (1788) や AM78 の直接型の運動量方程式 (6.12) に対応すると解釈できる。  
1574 また、 $x^\epsilon$  方向の波数  $k$  と振動数  $\omega$  を用いて  $(\overline{x' p'_{x^\epsilon}{}^\epsilon}, \overline{y' p'_{x^\epsilon}{}^\epsilon}, \overline{z' p'_{x^\epsilon}{}^\epsilon}) = (\overline{u' p'{}^\epsilon}, \overline{v' p'{}^\epsilon}, \overline{w' p'{}^\epsilon}) k / \omega$  と書  
1575 き換えれば、これは  $x^\epsilon$  方向の EB 疑運動量の 3次元フラックスになる。同様に、 $y^\epsilon$  方向の波数  $l$   
1576 と振動数  $\omega$  を用いて  $(\overline{x' p'_{y^\epsilon}{}^\epsilon}, \overline{y' p'_{y^\epsilon}{}^\epsilon}, \overline{z' p'_{y^\epsilon}{}^\epsilon}) = (\overline{u' p'{}^\epsilon}, \overline{v' p'{}^\epsilon}, \overline{w' p'{}^\epsilon}) l / \omega$  と書き換えれば、これは  $y^\epsilon$   
1577 方向の EB 疑運動量の 3次元フラックスになる。これらの性質から式 (8.27) は Miyahara (2006) や  
1578 Noda (2010) による (慣性重力波と平均流の相互作用に特化した) TEM 運動量方程式に対応する  
1579 と解釈することができる。注意すべき点として式 (8.27) の予報変数は Lagrange 平均速度なので第  
1580 7章の直接型の運動量の式に対応する。

1581 一方、式 (8.26c) だけを式 (8.23) の鉛直方向の Reynolds 応力項に代入すると、

$$1582 \quad \begin{aligned} \partial_{t^\epsilon} (\bar{\mathbf{V}}^\epsilon + \mathbf{V}^{qs}) + \nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{U}}^\epsilon \bar{\mathbf{V}}^\epsilon) + f \mathbf{z} \times (\bar{\mathbf{V}}^\epsilon + \mathbf{V}^{qs}) \\ 1583 \quad = -\nabla^\epsilon \bar{\mathbf{p}}^\epsilon - (\overline{z' \nabla^\epsilon \mathbf{p}'^\epsilon})_{z^\epsilon} - (\overline{u' \mathbf{V}'^\epsilon})_{x^\epsilon} - (\overline{v' \mathbf{V}'^\epsilon})_{y^\epsilon}, \end{aligned} \quad (8.29)$$

1584 が得られる。この場合の記号  $\mathbf{V}^{qs}$  は

$$1585 \quad \mathbf{V}^{qs} \equiv (\overline{z' \mathbf{V}'^{\epsilon}})_{z^{\epsilon}} \quad (8.30)$$

1586 のような準Stokes速度のEuler近似表現である。式(8.29)の  $\overline{\mathbf{V}}^{\epsilon} + \mathbf{V}^{qs}$  は重み付け平均速度  $\hat{\mathbf{V}} \equiv \overline{z^{\epsilon} \mathbf{V}}$   
1587 に似ている[式(5.29)を参照]。式(8.27)は水平方向のReynolds応力項と鉛直方向の形状応力項か  
1588 ら構成されている。これらの性質から式(8.27)は第5章で説明した鉛直 semi-Lagrange 平均系の  
1589 運動量方程式(5.15a)に対応すると解釈できる。

1590 以上をまとめると、Euler平均された運動量の式(8.23)のReynolds応力項を形状応力に書き換え  
1591 た副作用として(i)Coriolis-Stokes項が現れ、(ii)予報変数がLagange平均速度(あるいは重み付け  
1592 平均速度)に変わる。別の言い方をすれば、Euler平均された運動量の式(8.23)にCoriolis-Stokes  
1593 項を付け加えた副作用として(i)Reynolds応力項が形状応力項に変わり、(ii)予報変数がLagrange  
1594 平均速度(あるいは重み付け平均速度)に変わる。

## 第9章 鉛直積分系

本章では 1960-70 年代の線形波動論における手法を紹介する。当時は、「波の峰の式」を使って直接型の運動量方程式を変形型に変換するのが一般的であった。直接型の運動量方程式には、Longuet-Higgins and Stewart (1960, 1961, 1964) の「放射応力」が現れ、変形型の運動量方程式には、「寄せ波圧力」や渦度力の原型が現れる。

1960 年代の水面波の研究では、次のように定義される物理量を Stokes ドリフト速度の水深積分の近似式と見なすのが流儀であった。

$$\begin{aligned} \overline{\int_{\bar{\eta}}^{\eta} \mathbf{V} dz^{\epsilon}} &\simeq \overline{\int_{\bar{\eta}}^{\eta} [(\mathbf{V}|_{z^{\epsilon}=\bar{\eta}}) + z^{\epsilon}(\mathbf{V}_{z^{\epsilon}}|_{z^{\epsilon}=\bar{\eta}})] dz^{\epsilon}} \\ &= [\eta' \bar{\mathbf{V}}' + (\eta'^2/2) \bar{\mathbf{V}}_{z^{\epsilon}}^{\epsilon}]|_{z^{\epsilon}=\bar{\eta}}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

1 行目は鉛直方向の Taylor 展開を使い、2 行目は  $\eta' = \eta - \bar{\eta}$  と  $\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}}^{\epsilon} + \mathbf{V}'$  を代入してから擾乱の 2 次の積についての精度を保つようにした。実は、式 (9.1) の左辺は、準 Stokes 速度 [式 (5.22a), (5.29) を参照] の水深積分に等しい。

$$\begin{aligned} \overline{\int_{\bar{\eta}}^{\eta} \mathbf{V} dz^{\epsilon}} &= \overline{\int_{-H_b}^{\eta} \mathbf{V} dz^{\epsilon}} - \overline{\int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \mathbf{V} dz^{\epsilon}} \\ &= \overline{\int_{-H_b}^{\bar{\eta}} z_z^{\epsilon} \mathbf{V} dz^{\epsilon}} - \overline{\int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \bar{\mathbf{V}}^{\epsilon} dz^{\epsilon}} \\ &= \overline{\int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \hat{\mathbf{V}} dz^{\epsilon}} - \overline{\int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \bar{\mathbf{V}}^{\epsilon} dz^{\epsilon}} \\ &= \overline{\int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \mathbf{V}^{qs} dz^{\epsilon}} \\ &\simeq [\eta''' \bar{\mathbf{V}}''' - (\eta'''^2/2) \bar{\mathbf{V}}_z^{\epsilon}]|_{z^{\epsilon}=\bar{\eta}}, \end{aligned} \quad (9.2)$$

式 (9.1) の  $\eta'$  と式 (9.2) と  $\eta'''$  は実質的に同じ物理量である。任意の物理量について Euler 座標系における擾乱  $A' \equiv A - \bar{A}^{\epsilon}$  ( $z^{\epsilon}$  を固定して比較) と鉛直 semi-Lagrange 座標系における擾乱  $A''' \equiv A - \bar{A}$  ( $z$  を固定して比較) は、Taylor 展開を用いると  $A' = A''' - z''' \bar{A}_{z^{\epsilon}}^{\epsilon} \simeq A''' - z''' \bar{A}_z$  のように関係づけることができる。式 (9.1) の最後の行と式 (9.2) の最後の行の 2 番目の項の符号が違うのはこのためである。水面波の分野で 1960 年代からよく使われていた式 (9.1) を 2000 年代になって傾圧渦の分野で McDougall & McIntosh (2001) が自由表面の高さを密度面の高さに置き換えて使ったことが伺える<sup>\*4.1</sup>。

式 (9.1) を任意の物理量  $A$  に対して一般化すると

$$\overline{\int_{-H_b}^{\eta} A dz^{\epsilon}} = \overline{\int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \bar{A} dz^{\epsilon}} + [\eta' \bar{A}' + (\eta'^2/2) \bar{A}_{z^{\epsilon}}^{\epsilon}]|_{z^{\epsilon}=\bar{\eta}}, \quad (9.3)$$

となる。これが水面変位がある場合の積み重ね則である。

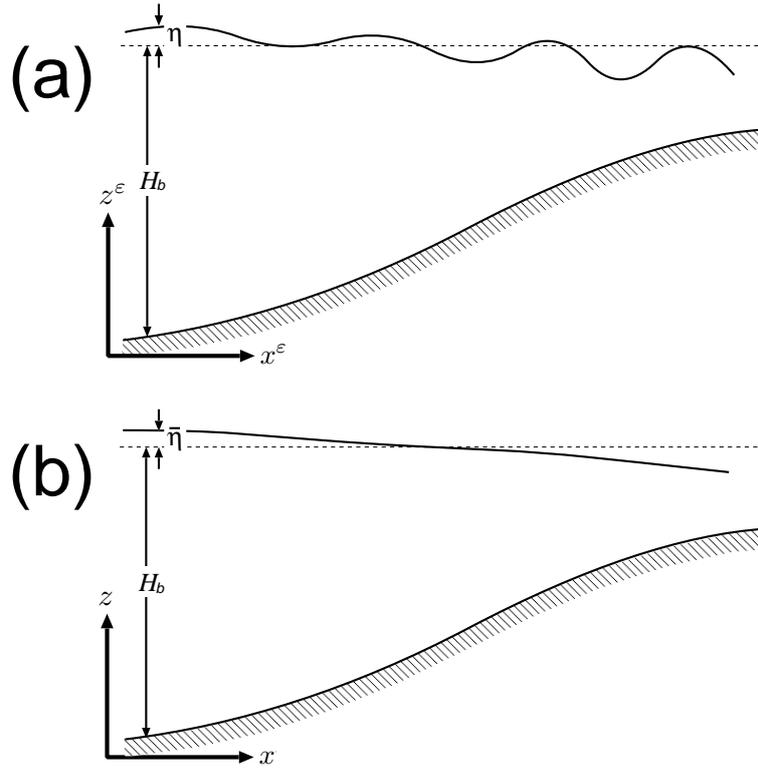


図 9.1: (a) 3次元 Euler 座標系と (b) 鉛直 semi-Lagrange 座標系における浅水波の取り扱いの模式図. Aiki and Greatbatch (2013a).

## 9.1 水深積分された運動量方程式 (直接型)

水平方向の運動量の式 (7.1a) を水深積分し、Leibniz 則と境界条件  $[(w - \eta_{t^\epsilon} - \mathbf{V} \cdot \nabla^\epsilon \eta)|_{z^\epsilon = \eta} = 0$  と  $(w + \mathbf{V} \cdot \nabla^\epsilon H_b)|_{z^\epsilon = -H_b} = 0$  を課し、さらに時間平均をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t^\epsilon} \left( \int_{-H}^{\eta} \mathbf{V} dz^\epsilon \right) + \nabla^\epsilon \cdot \left( \int_{-H}^{\eta} \mathbf{V} \mathbf{V} dz^\epsilon \right) + \int_{-H}^{\eta} \nabla^\epsilon (\mathbf{p} + g\eta) dz^\epsilon = 0, \quad (9.4)$$

となる。式 (9.4) の時間発展項は、式 (9.1)-(9.3) を使って次のように書き直すことができる<sup>\*9.1</sup>。

$$\frac{\partial}{\partial t^\epsilon} \left( \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \mathbf{V} dz^\epsilon \right) = \frac{\partial}{\partial t^\epsilon} \left( \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \bar{\mathbf{V}}^\epsilon dz^\epsilon \right) + \frac{\partial}{\partial t^\epsilon} (\eta' \mathbf{V}' |_{z^\epsilon = \bar{\eta}}) \quad (9.5)$$

これは Lagrange 平均速度の水深積分の時間微分に相当する。つまり式 (9.4) は第 7 章で紹介した直接型の運動量方程式に対応する。次に式 (9.4) の移流項は、式 (9.3) を使って次のように書き直

<sup>\*9.1</sup>本章では平均流の水平成分は鉛直一様であると仮定する (i.e.  $\partial_{z^\epsilon} \bar{\mathbf{V}}^\epsilon = 0$ )。

1630 す事ができる。

$$\begin{aligned}
1631 \quad \overline{\int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \mathbf{V}\mathbf{V} dz^\epsilon} &= \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \overline{\mathbf{V}\mathbf{V}^\epsilon} dz^\epsilon + \overline{\eta'(\mathbf{V}\mathbf{V}|_{z^\epsilon=\bar{\eta}})} \\
1632 &= \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} (\overline{\mathbf{V}^\epsilon \mathbf{V}^\epsilon} + \overline{\mathbf{V}' \mathbf{V}'^\epsilon}) dz^\epsilon + \overline{\eta'(\mathbf{V}\mathbf{V}|_{z^\epsilon=\bar{\eta}})} \\
1633 &= \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \overline{\mathbf{V}^\epsilon \mathbf{V}^\epsilon} dz^\epsilon + \underbrace{\int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \overline{\mathbf{V}' \mathbf{V}'^\epsilon} dz^\epsilon}_{S_{xx}^{(1)}} + \overline{(\eta' \mathbf{V}'|_{z^\epsilon=\bar{\eta}}) \mathbf{V}^\epsilon|_{z^\epsilon=\bar{\eta}}} + \overline{\mathbf{V}^\epsilon|_{z^\epsilon=\bar{\eta}} (\eta' \mathbf{V}'|_{z^\epsilon=\bar{\eta}})},
\end{aligned}$$

1634 (9.6)

1635 最後に式 (9.4) の圧力勾配項を展開するには、式 (9.3) と  $p'|_{z^\epsilon=\bar{\eta}} = 0$  を使って、

$$\begin{aligned}
1636 \quad \overline{\int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \nabla^\epsilon (p + g\eta) dz^\epsilon} &= \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \nabla^\epsilon \overline{(p + g\eta)^\epsilon} dz^\epsilon + \overline{\eta' g \nabla^\epsilon \eta'} \\
1637 &= \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \nabla^\epsilon \overline{p^\epsilon} dz^\epsilon + (\bar{\eta} + H_b) g \nabla^\epsilon \bar{\eta} + \nabla^\epsilon (g \bar{\eta}^2 / 2) \\
1638 &= \nabla^\epsilon \underbrace{\int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \overline{p^\epsilon} dz^\epsilon}_{S_{xx}^{(2)}} + \overline{p^\epsilon|_{z^\epsilon=\bar{\eta}}} \nabla^\epsilon \bar{\eta} + \overline{p^\epsilon|_{z^\epsilon=-H_b}} \nabla^\epsilon H_b \\
1639 &\quad + (\bar{\eta} + H_b) g \nabla^\epsilon \bar{\eta} + \nabla^\epsilon \underbrace{(g \bar{\eta}^2 / 2)}_{S_{xx}^{(3)}}
\end{aligned}$$

1639 (9.7)

1640 とする。

1641 式 (9.6)-(9.7) の  $S_{xx}^{(1)}$ ,  $S_{xx}^{(2)}$ ,  $S_{xx}^{(3)}$  は Longuet-Higgins and Stewart (1964, 以下 LHS64) の原論文  
1642 で放射応力を表すのに使われている記号である。放射応力の第 1 成分  $S_{xx}^{(1)}$  は Reynolds 応力の水平  
1643 成分である。放射応力の第 2、3 成分にはいろいろな書き方があるので後で紹介する。

## 1644 9.2 波のエネルギー—の収支式

1645 平均流による Doppler シフトや水平シアの影響を加味した波の運動の支配方程式は、

$$1646 \quad (\partial_t^\epsilon + \overline{\mathbf{U}^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon) \mathbf{U}' + \mathbf{U}' \cdot \nabla^\epsilon \overline{\mathbf{U}^\epsilon} = -\nabla^\epsilon (p' + g\eta'), \quad (9.8a)$$

$$1647 \quad (\partial_t^\epsilon + \overline{\mathbf{V}^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon) \eta' + \mathbf{V}' \cdot \nabla^\epsilon \bar{\eta} = \underbrace{w' + \eta' \partial_{z^\epsilon} \bar{w}^\epsilon}_{w'''} \quad \text{at } z^\epsilon = \bar{\eta} \quad (9.8b)$$

$$1648 \quad -\mathbf{V}' \cdot \nabla^\epsilon H_b = w' \quad \text{at } z^\epsilon = -H_b \quad (9.8c)$$

$$1649 \quad \nabla^\epsilon \cdot \mathbf{U}' = 0, \quad (9.8d)$$

1650 となる。運動量の式 (9.8a) の移流項は 3 次元の速度に基づいている (i.e.  $\overline{\mathbf{U}^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon = \overline{\mathbf{V}^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon + \overline{w^\epsilon} \partial_{z^\epsilon}$ ,  
1651  $\mathbf{U}' \cdot \nabla^\epsilon = \mathbf{V}' \cdot \nabla^\epsilon + w' \partial_{z^\epsilon}$ )。水面の境界条件の式 (9.8b) は Taylor 展開を使って精度を高めてあ  
1652 る。これは鉛直 Euler 平均系特有の手法である (図 9.2)。平均流の鉛直成分の鉛直 1 階微分はゼロ  
1653 ではないが、2 階微分はゼロになることに注意しよう (i.e.  $\partial_{z^\epsilon z^\epsilon} \bar{w}^\epsilon = -\nabla^\epsilon \cdot \partial_{z^\epsilon} \overline{\mathbf{V}^\epsilon} = 0$ )。

1654 波のエネルギー (運動エネルギーと位置エネルギーの和) の水深積分を記号  $E$  で表すと、

$$1655 \quad E \equiv \frac{1}{2} \int_{-H_b}^{z^\epsilon=\bar{\eta}} \overline{|\mathbf{U}'|^2} dz^\epsilon + \frac{g}{2} \bar{\eta}^2, \quad (9.9)$$

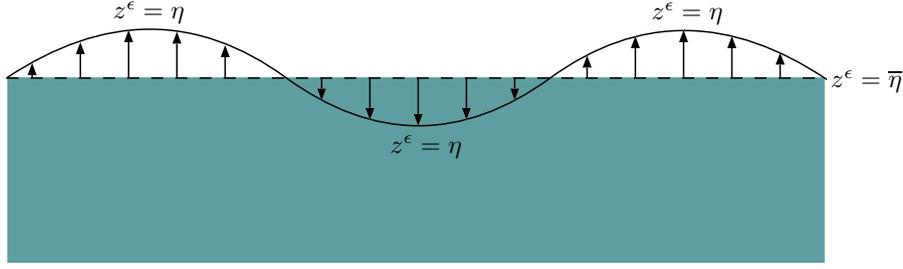


図 9.2: 3次元 Euler 座標系 (第 8、9 章) による水面の取り扱いの模式図.  $z^\epsilon = \bar{\eta}$  は時間平均した水面の高さである. 任意の物理量  $A$  に対して  $A|_{z^\epsilon=\eta}$  が水面における本当の値なのだが, Euler 座標系を用いた定式化では粗っぽく  $A|_{z^\epsilon=\bar{\eta}}$  を水面における  $A$  の値とみなす. どうしてもそれでは精度が足りない時には Taylor 展開を用いて  $A|_{z^\epsilon=\eta} = A|_{z^\epsilon=\bar{\eta}} + \eta' \partial_{z^\epsilon} \bar{A}|_{z^\epsilon=\bar{\eta}}$  とする. 平均水位より下側 ( $z^\epsilon < \bar{\eta}$  の範囲) では水の有無に関わらず関数  $A = A(z^\epsilon)$  が機能する.

1656 となる. 運動量の式 (9.8a) から運動のエネルギーと圧力フラックスの式を導くと、

$$1657 \quad (\partial_{t^\epsilon} + \bar{\mathbf{U}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon)(|\mathbf{U}'|^2/2) = -\mathbf{U}' \cdot \nabla^\epsilon(p' + g\eta') - (u'\mathbf{U}' \cdot \nabla^\epsilon \bar{u}^\epsilon + v'\mathbf{U}' \cdot \nabla^\epsilon \bar{v}^\epsilon + w'\mathbf{U}' \cdot \nabla^\epsilon \bar{w}^\epsilon),$$

1658 (9.10a)

$$1659 \quad \nabla^\epsilon \cdot [\mathbf{U}'(p' + g\eta')] = \mathbf{U}' \cdot \nabla^\epsilon(p' + g\eta'),$$

1659 (9.10b)

1660 となる. 式 (9.10a)-(9.10b) の和をとって、Reynolds 応力項を整理すると、

$$1661 \quad \partial_{t^\epsilon}(|\mathbf{U}'|^2/2) + \nabla^\epsilon \cdot [\bar{\mathbf{V}}^\epsilon(|\mathbf{U}'|^2/2) + \mathbf{V}'(p' + g\eta')] + \partial_{z^\epsilon}[\bar{w}^\epsilon(|\mathbf{U}'|^2/2) + w'(p' + g\eta')] \\ 1662 \quad = -(u'\mathbf{V}' \cdot \nabla^\epsilon \bar{u}^\epsilon + v'\mathbf{V}' \cdot \nabla^\epsilon \bar{v}^\epsilon + w'\mathbf{V}' \cdot \nabla^\epsilon \bar{w}^\epsilon) - w'^2 \partial_{z^\epsilon} \bar{w}^\epsilon,$$

1662 (9.11)

1663 となる. 右辺が波と平均流の間のエネルギー変換を表す. 式 (9.11) の左辺の水深積分をとって Leibniz  
1664 則と境界条件 (9.8b)-(9.8c) を適用すると、

$$1665 \quad \frac{\partial}{\partial t^\epsilon} \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} (|\mathbf{U}'|^2/2) dz^\epsilon + \nabla^\epsilon \cdot \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} [\bar{\mathbf{V}}^\epsilon(|\mathbf{U}'|^2/2) + \mathbf{V}'(p' + g\eta')] dz^\epsilon \\ 1666 \quad - \left[ (|\mathbf{U}'|^2/2)|_{z^\epsilon=\bar{\eta}} \right] (\bar{\eta}_{t^\epsilon} + \bar{\mathbf{V}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon \bar{\eta}) - \left[ (|\mathbf{U}'|^2/2)|_{z^\epsilon=-H_b} \right] (\bar{\mathbf{V}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon H_b) \\ 1667 \quad + \left[ \bar{w}^\epsilon(|\mathbf{U}'|^2/2)|_{z^\epsilon=\bar{\eta}} \right] - \left[ \bar{w}^\epsilon(|\mathbf{U}'|^2/2)|_{z^\epsilon=-H_b} \right] \\ 1668 \quad - [\mathbf{V}'(p' + g\eta')|_{z^\epsilon=\bar{\eta}}] \cdot \nabla^\epsilon \bar{\eta} - [\mathbf{V}'(p' + g\eta')|_{z^\epsilon=-H_b}] \cdot \nabla^\epsilon H_b \\ 1669 \quad + [w'(p' + g\eta')|_{z^\epsilon=\bar{\eta}}] - [w'(p' + g\eta')|_{z^\epsilon=-H_b}] = \\ 1670 \quad \frac{\partial}{\partial t^\epsilon} \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} (|\mathbf{U}'|^2/2) dz^\epsilon + \nabla^\epsilon \cdot \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} [\bar{\mathbf{V}}^\epsilon(|\mathbf{U}'|^2/2) + \mathbf{V}'(p' + g\eta')] dz^\epsilon \\ 1671 \quad + (\partial_{t^\epsilon} + \bar{\mathbf{V}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon)(g\eta'^2/2) - g\eta'^2 \partial_{z^\epsilon} \bar{w}^\epsilon$$

1671 (9.12)

1672 となる. 波の位置エネルギーの式は圧力フラックスの鉛直成分  $w'(p' + g\eta')$  の境界条件に含まれて

1673 いたことが分かる。式 (9.9) と (9.11)-(9.12) をまとめると波のエネルギーの収支式は

$$\begin{aligned}
1674 \quad \partial_{t^\epsilon} E + \nabla^\epsilon \cdot [\overline{\mathbf{V}^\epsilon} E + \overline{\mathbf{V}'^\epsilon}(\overline{p'} + g\eta')^\epsilon] &= - \int_{-H_b}^{\overline{\eta}} (\overline{u' \mathbf{V}'^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon \overline{u^\epsilon} + \overline{v' \mathbf{V}'^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon \overline{v^\epsilon} + \overline{w' \mathbf{V}'^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon \overline{w^\epsilon}) dz^\epsilon \\
1675 &\quad - \int_{-H_b}^{\overline{\eta}} \overline{w'^2} dz^\epsilon \partial_{z^\epsilon} \overline{w^\epsilon} + (g\overline{\eta'^2}) \partial_{z^\epsilon} \overline{w^\epsilon} + (\nabla^\epsilon \cdot \overline{\mathbf{V}^\epsilon})(g\overline{\eta'^2}/2) \\
1676 &= - \underbrace{\int_{-H_b}^{\overline{\eta}} \overline{\mathbf{V}'^\epsilon \mathbf{V}'^\epsilon} dz^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon \overline{\mathbf{V}^\epsilon}}_{S_{xx}^{(1)}} + \int_{-H_b}^{\overline{\eta}} \overline{w' \mathbf{V}'^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon \overline{w^\epsilon} dz^\epsilon \\
1677 &\quad - (\nabla^\epsilon \cdot \overline{\mathbf{V}^\epsilon}) \underbrace{\int_{-H_b}^{\overline{\eta}} (-\overline{w'^2}) dz^\epsilon}_{S_{xx}^{(2)}} - (\nabla^\epsilon \cdot \overline{\mathbf{V}^\epsilon}) \underbrace{(g\overline{\eta'^2}/2)}_{S_{xx}^{(3)}}, \quad (9.13)
\end{aligned}$$

1678 となる。波と平均流の間のエネルギー変換が放射応力によってなされることが分かる (Longuet-  
1679 Higgins and Stewart, 1960, 1961; Whitham, 1962; Phillips, 1977)。

### 1680 9.3 波の作用の保存式

1681 波の支配方程式 (9.8a)-(9.8d) の斉次の部分だけに注目する。

$$1682 \quad (\partial_{t^\epsilon} + \overline{\mathbf{V}^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon) \mathbf{U}'_1 = -\nabla^\epsilon (\overline{p'_1} + g\eta'_1), \quad (9.14a)$$

$$1683 \quad (\partial_{t^\epsilon} + \overline{\mathbf{V}^\epsilon} \cdot \nabla^\epsilon) \eta'_1 = w'_1 \text{ at } z^\epsilon = \overline{\eta} \quad (9.14b)$$

$$1684 \quad -\mathbf{V}'_1 \cdot \nabla^\epsilon H_b = w'_1 \text{ at } z^\epsilon = -H_b \quad (9.14c)$$

$$1685 \quad \nabla^\epsilon \cdot \mathbf{U}'_1 = 0, \quad (9.14d)$$

1686 運動量の式 (9.14a) の移流項は平均流の水平成分だけを考慮している。式 (9.14a)-(9.14c) の解は、

$$1687 \quad \phi' = (A/\kappa) \cos \theta \frac{\cosh \kappa(z^\epsilon + H_b)}{\sinh \kappa(\overline{\eta} + H_b)}, \quad \theta = kx^\epsilon + ly^\epsilon - \omega t^\epsilon, \quad (9.15a)$$

$$1688 \quad \sigma^2 = g\kappa \tanh \kappa(\overline{\eta} + H_b), \quad \sigma = \omega - k\overline{u^\epsilon} - l\overline{v^\epsilon}, \quad \kappa = \sqrt{k^2 + l^2}, \quad (9.15b)$$

$$1689 \quad \mathbf{U}'_1 = \nabla^\epsilon \phi'_{t^\epsilon}, \quad \overline{p'_1} + g\eta'_1 = \sigma^2 \phi', \quad (9.15c)$$

1690 となる。鉛直速度が  $w' = \phi'_{t^\epsilon z^\epsilon}$  なので水面の高さは  $\eta' = \phi'_{z^\epsilon}|_{z^\epsilon=\overline{\eta}}$  で表される (図 9.2)。A は水面  
1691 変位の振幅である。記号  $\sigma$  は Doppler シフトされた振動数である。位相速度と群速度の定義は

$$1692 \quad \mathbf{C}^p = (\sigma/k, \sigma/l), \quad (9.16a)$$

$$1693 \quad \mathbf{C}^g = (\partial\sigma/\partial k, \partial\sigma/\partial l), \quad (9.16b)$$

1694 である。「波の峰の式」は次のようになる<sup>\*9.2</sup>。

$$1695 \quad \partial_{t^\epsilon} k + \underbrace{\sigma_{x^\epsilon} + k_{x^\epsilon} \overline{u^\epsilon} + l_{x^\epsilon} \overline{v^\epsilon} + k \overline{u_{x^\epsilon}^\epsilon} + l \overline{v_{x^\epsilon}^\epsilon}}_{(\mathbf{C}^g + \overline{\mathbf{V}^\epsilon}) \cdot \nabla^\epsilon k + \sigma_H H_{x^\epsilon}} = 0 \quad (9.17a)$$

$$1696 \quad \partial_{t^\epsilon} l + \underbrace{\sigma_{y^\epsilon} + k_{y^\epsilon} \overline{u^\epsilon} + l_{y^\epsilon} \overline{v^\epsilon} + k \overline{u_{y^\epsilon}^\epsilon} + l \overline{v_{y^\epsilon}^\epsilon}}_{(\mathbf{C}^g + \overline{\mathbf{V}^\epsilon}) \cdot \nabla^\epsilon l + \sigma_H H_{y^\epsilon}} = 0 \quad (9.17b)$$

<sup>\*9.2</sup>  $\partial_{t^\epsilon} k + \partial_{x^\epsilon} \omega = 0$ ,  $\partial_{t^\epsilon} l + \partial_{y^\epsilon} \omega = 0$ ,  $\partial_{y^\epsilon} k = \partial_{x^\epsilon} l$  (Bretherton and Garrett, 1968; Whitham, 1974; Phillips, 1977)。

1697 記号  $H \equiv \bar{\eta} + H_b$  である。Doppler シフトされた振動数の時間発展式を導くには、式 (9.17a)-(9.17b)  
 1698 を使って、

$$\begin{aligned}
 1699 \quad \partial_{t^\epsilon} \sigma + (\mathbf{C}^g + \bar{\mathbf{V}}^\epsilon) \cdot \nabla^\epsilon \sigma &= (\partial \sigma / \partial k) \left[ \partial_{t^\epsilon} k + (\mathbf{C}^g + \bar{\mathbf{V}}^\epsilon) \cdot \nabla^\epsilon k \right] + \\
 1700 & \quad (\partial \sigma / \partial l) \left[ \partial_{t^\epsilon} l + (\mathbf{C}^g + \bar{\mathbf{V}}^\epsilon) \cdot \nabla^\epsilon l \right] + \\
 1701 & \quad (\partial \sigma / \partial H) \left[ \partial_{t^\epsilon} H + (\mathbf{C}^g + \bar{\mathbf{V}}^\epsilon) \cdot \nabla^\epsilon H \right] + \\
 1702 & = -k \mathbf{C}^g \cdot \nabla^\epsilon \bar{u}^\epsilon - l \mathbf{C}^g \cdot \nabla^\epsilon \bar{v}^\epsilon + (\partial \sigma / \partial H) (\partial_{t^\epsilon} H + \bar{\mathbf{V}}^\epsilon \cdot \nabla^\epsilon H) \\
 1703 & = -k \mathbf{C}^g \cdot \nabla^\epsilon \bar{u}^\epsilon - l \mathbf{C}^g \cdot \nabla^\epsilon \bar{v}^\epsilon - (\partial \sigma / \partial H) H (\nabla^\epsilon \cdot \bar{\mathbf{V}}^\epsilon), \quad (9.18)
 \end{aligned}$$

1704 とする。厳密には  $H_{t^\epsilon} + \nabla^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{V}}^\epsilon H + \bar{\mathbf{V}}^\epsilon \eta')|_{z=\bar{\eta}} = 0$  なのだが、最終的に式 (9.22) の精度を擾乱  
 1705 の 2 次の積について保てればよいので、式 (9.18) の導出に関しては準 Stokes 速度の収束発散を無  
 1706 視する事ができる。

1707 式 (9.15c) を使って擾乱速度の水平成分を書き直すと

$$1708 \quad \mathbf{V}'_1 = -\sigma \phi'_{\theta\theta} (\nabla^\epsilon \theta) = (p'_1 + g\eta'_1) / \mathbf{C}^p, \quad (9.19a)$$

1709 となる。記号  $\nabla^\epsilon \theta = (k, l)$  は水平波数ベクトルである。式 (9.19a) を使って放射応力の第 1 成分を  
 1710 書き直すと

$$1711 \quad \underbrace{\int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \overline{\mathbf{V}'_1 \mathbf{V}'_1} dz^\epsilon}_{S_{xx}^{(1)}} = \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \overline{\mathbf{V}'_1 (p'_1 + g\eta'_1) / \mathbf{C}^p} dz^\epsilon = \mathbf{C}^g E_2 / \mathbf{C}^p \quad (9.19b)$$

1712 となる。次に解析解 (9.15a)-(9.15b) を使うと波の KE と PE の比率が 1 : 1 であることが確認で  
 1713 きる。

$$1714 \quad \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \overline{|\mathbf{U}'_1|^2} dz^\epsilon = \overline{g\eta_1'^2} \equiv E_2 = gA^2/2, \quad (9.20a)$$

1715 これは非回転系流体中の線形中立波に共通する性質である (第 6 章)。式 (9.20a) を使って放射応  
 1716 力の第 2 成分と第 3 成分の和を書き直すと、

$$\begin{aligned}
 1717 \quad \underbrace{\int_{-H_b}^{\bar{\eta}} (-\overline{w'^2}) dz^\epsilon + \frac{g}{2} \overline{\eta'^2}}_{S_{xx}^{(2)} + S_{xx}^{(3)}} &= \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} (-\overline{w_1'^2}) dz^\epsilon + \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \frac{1}{2} (\overline{|\mathbf{V}'_1|^2 + w_1'^2}) dz^\epsilon \\
 1718 &= \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \frac{1}{2} (\overline{|\mathbf{V}'_1|^2 - w_1'^2}) dz^\epsilon \\
 1719 &= \frac{\sigma^2}{2} \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \overline{(\kappa \phi'_\theta)^2 - (\phi'_{\theta z^\epsilon})^2} dz^\epsilon \\
 1720 &= H \frac{\sigma^2 A^2}{4(\sinh \kappa H)^2} \\
 1721 &= H \frac{\sigma^2 E_2}{2g(\sinh \kappa H)^2} \\
 1722 &= H \frac{g\kappa^2 E_2}{2\sigma^2 (\cosh \kappa H)^2} \\
 1723 &= H \frac{\partial \sigma}{\partial H} \frac{E_2}{\sigma}, \quad (9.20b)
 \end{aligned}$$

1724 となる<sup>\*9.3</sup>。4行目の導出には  $\sinh^2 - \cosh^2 = 1$  を使った<sup>\*9.4</sup>。最後の2行の導出には分散関係式  
1725 (9.15b) を使った。エネルギーの収支式 (9.13) に式 (9.19b) と (9.20b) を代入すると、

$$1726 \quad \partial_{t^\epsilon} E_2 + \nabla^\epsilon \cdot \left[ (\bar{\mathbf{V}}^\epsilon + \mathbf{C}^g) E_2 \right] = -(k/\sigma) E_2 \mathbf{C}^g \cdot \nabla^\epsilon \bar{u}^\epsilon - (l/\sigma) E_2 \mathbf{C}^g \cdot \nabla^\epsilon \bar{v}^\epsilon \\ 1727 \quad - (\partial\sigma/\partial H) (H E_2/\sigma) (\nabla^\epsilon \cdot \bar{\mathbf{V}}^\epsilon), \quad (9.21)$$

1728 となる。Doppler シフトされた振動数の式 (9.18) と波のエネルギーの式 (9.21) を組み合わせると

$$1729 \quad \partial_{t^\epsilon} (E_2/\sigma) + \nabla^\epsilon \cdot \left[ (\bar{\mathbf{V}}^\epsilon + \mathbf{C}^g) (E_2/\sigma) \right] = 0, \quad (9.22)$$

1730 となる。物理量  $E_2/\sigma$  は古典的な線形波動論における「波の作用」である (Whitham, 1965; Brether-  
1731 ton and Garrett, 1968)。

## 1732 9.4 水深積分された運動量方程式 (変形型)

1733 式 (9.1)-(9.2) と式 (9.19a)、式 (9.20a) をまとめると

$$1734 \quad \int_{-H}^{\bar{\eta}} \mathbf{V}^{qs} dz = \overline{\int_{\bar{\eta}}^{\eta} \mathbf{V} dz^\epsilon} \\ 1735 \quad = \overline{(\eta'_1 \mathbf{V}'_1|_{z^\epsilon=\bar{\eta}})} \\ 1736 \quad = \overline{g \eta_1'^2 / \mathbf{C}^p} \\ 1737 \quad = E_2 / \mathbf{C}^p, \quad (9.23)$$

1738 となる。本講義では  $E/\mathbf{C}^p = (Ek/\sigma, El/\sigma)$  を EB (energy-based) 疑運動量と呼ぶ<sup>\*7.3</sup>。式 (9.23)  
1739 は GL 疑運動量と Stokes ドリフト速度の関係式 (7.14) に対応する。

1740 波の峰の式 (9.15a)-(9.15b) と波の作用の式 (9.18) を組み合わせると、EB 疑運動量の時間発展  
1741 式を導く事ができる。

$$1742 \quad \partial_{t^\epsilon} (E_2 k/\sigma) + \nabla^\epsilon \cdot \left[ (\bar{\mathbf{V}}^\epsilon + \mathbf{C}^g) (E_2 k/\sigma) \right] + (E_2/\sigma) (\partial\sigma/\partial H) H_{x^\epsilon} \\ 1743 \quad = -(E_2 k/\sigma) \bar{u}_{x^\epsilon}^\epsilon - (E_2 l/\sigma) \bar{v}_{x^\epsilon}^\epsilon \\ 1744 \quad = -(E_2/\mathbf{C}^p) \cdot \nabla^\epsilon \bar{u}^\epsilon - (E_2 l/\sigma) (\bar{v}_{x^\epsilon}^\epsilon - \bar{u}_{y^\epsilon}^\epsilon) \quad (9.24a)$$

$$1745 \quad \partial_{t^\epsilon} (E_2 l/\sigma) + \nabla^\epsilon \cdot \left[ (\bar{\mathbf{V}}^\epsilon + \mathbf{C}^g) (E_2 l/\sigma) \right] + (E_2/\sigma) (\partial\sigma/\partial H) H_{y^\epsilon} \\ 1746 \quad = -(E_2 k/\sigma) \bar{u}_{y^\epsilon}^\epsilon - (E_2 l/\sigma) \bar{v}_{y^\epsilon}^\epsilon \\ 1747 \quad = -(E_2/\mathbf{C}^p) \cdot \nabla^\epsilon \bar{v}^\epsilon + (E_2 k/\sigma) (\bar{v}_{x^\epsilon}^\epsilon - \bar{u}_{y^\epsilon}^\epsilon) \quad (9.24b)$$

1748 式 (9.24a)-(9.24b) に式 (9.19b) と (9.23) を代入すると

$$1749 \quad \partial_{t^\epsilon} \overline{(\eta'_1 \mathbf{V}'_1|_{z^\epsilon=\bar{\eta}})} + \nabla^\epsilon \cdot \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \overline{\mathbf{V}'_1 \mathbf{V}'_1} dz^\epsilon + \nabla^\epsilon \cdot \left[ \overline{\mathbf{V}^\epsilon (\eta'_1 \mathbf{V}'_1|_{z^\epsilon=\bar{\eta}})} + \overline{(\eta'_1 \mathbf{V}'_1|_{z^\epsilon=\bar{\eta}}) \mathbf{V}^\epsilon} \right] \\ 1750 \quad + (E_2/\sigma) (\partial\sigma/\partial H) \nabla^\epsilon H = \left[ \nabla^\epsilon \cdot \overline{(\eta'_1 \mathbf{V}'_1|_{z^\epsilon=\bar{\eta}})} \right] \overline{\mathbf{V}^\epsilon} + (\nabla^\epsilon \times \overline{\mathbf{V}^\epsilon}) \times \overline{(\eta'_1 \mathbf{V}'_1|_{z^\epsilon=\bar{\eta}})} \quad (9.25)$$

<sup>\*9.3</sup>水深が波長より十分に大きい場合 ( $1 \ll kH_b$ ) は、 $(|\mathbf{V}'_1|^2 - w_1'^2)/2 = 0$  になる。なぜならば、擾乱速度のポテンシャルの鉛直構造が式 (9.15a) のような双曲線関数 (これを浅水波と呼ぶ) ではなく、式 (8.6a) のように指数関数 (これを深水波と呼ぶ) を使って定義されるからである。指数関数の場合は  $\phi'_z = \kappa \phi'$  となるので、 $(\kappa \phi'_\theta)^2 - (\phi'_{\theta z^\epsilon})^2 = \kappa^2 (\phi_0'^2 - \phi_0'^2) = 0$  となる。深水波の場合に  $\partial\sigma/\partial H = 0$  になる事は、分散関係式 (8.6b) から明らかである。

<sup>\*9.4</sup> $(|\mathbf{V}'_1|^2 - w_1'^2)/2$  が鉛直一様である事を確認するための別の方法としては、 $\partial_{z^\epsilon} (\mathbf{V}'_1 \cdot \mathbf{V}'_1 - w_1'^2)/2^\epsilon = \overline{\mathbf{V}'_1 \cdot \mathbf{V}'_{1z^\epsilon} - w_1' w_{1z^\epsilon}'} = \overline{\mathbf{V}'_1 \cdot \nabla^\epsilon w_1' + w_1' \nabla^\epsilon \cdot \mathbf{V}'_1} = \nabla^\epsilon \cdot (\mathbf{V}'_1 w_1') = 0$ 。つまり鉛直断面における運動が渦なしである条件と波が水平一様である条件を使えば良い。

1751 となる。式 (9.5)-(9.7) と式 (9.22) を水深積分した運動量の式 (9.4) に代入すると、Euler 平均速度  
 1752 の水深積分に対する時間発展式が得られる。

$$\begin{aligned}
 1753 \quad & \frac{\partial}{\partial t^\epsilon} \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \bar{\mathbf{V}}^\epsilon dz^\epsilon + \nabla^\epsilon \cdot \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \bar{\mathbf{V}}^\epsilon \bar{\mathbf{V}}^\epsilon dz^\epsilon + (\bar{\eta} + H_b)g \nabla^\epsilon \bar{\eta} + \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \nabla^\epsilon \bar{p}^\epsilon dz^\epsilon + \frac{g}{2} \nabla^\epsilon \bar{\eta}_1'^2 \\
 1754 \quad & - \frac{1}{2} (\overline{|\mathbf{V}_1'|^2 - w_1'^2}^\epsilon) \nabla^\epsilon H_b = - \left[ \nabla^\epsilon \cdot (\overline{\eta_1' \mathbf{V}_1'}|_{z^\epsilon=\bar{\eta}}) \right] \bar{\mathbf{V}}^\epsilon + (\overline{\eta_1' \mathbf{V}_1'}|_{z^\epsilon=\bar{\eta}}) \times (\nabla^\epsilon \times \bar{\mathbf{V}}^\epsilon), \quad (9.26)
 \end{aligned}$$

1755 右辺の最後の項が渦度力の原型である (Garrett, 1976)。

## 1756 9.5 まとめ

- 1757 ● 放射応力は直接型の運動量方程式 (Lagrange 平均速度の予報式) に現れる。
- 1758 ● 渦度力は変形型の運動量方程式 (Euler 平均速度の予報式) に現れる。
- 1759 ● 直接型の運動量方程式 (9.4) から EB 疑運動量の収支式 (9.25) を引くと変形型の運動量の式  
 1760 (9.26) が得られる。
- 1761 ● 「波の峰の式」や「波の作用の保存式」は一般に平均場の時空間変化が波の位相変化にくら  
 1762 べてゆっくりとしている事を仮定している。この仮定は水面波の鉛直構造に対しては成り立  
 1763 たないので、鉛直積分した方程式系を使う必要がある。同様の理由で、平均流の水平成分に  
 1764 は鉛直シアがないと仮定する必要がある。
- 1765 ● 浅水波の寄せや引きによる圧力的な効果 ( $\overline{|\mathbf{V}'|^2 - w'^2}^\epsilon$ )/2 は、Smith (2006) では  $J$ , Arduin  
 1766 et al. (2008) では  $S^J$ , Uchiyama et al. (2010) では  $\zeta$  という記号で表されている。
- 1767 ● 鉛直積分された運動量の式 (9.4) の時間発展項を処理する際に積み重ね則 (9.3) を使って Stokes  
 1768 ドリフト速度を取り出す事は多くの文献で説明されているが、圧力勾配項に対しても積み重  
 1769 ね則を適用して式 (9.7) のように変形できることはあまり知られていない。
- 1770 ● 過去の多くの研究では式 (7.1a)-(7.1b) の  $-gz^\epsilon$  を残したままにして式展開しているので、圧  
 1771 力勾配項の取り扱いで間違いを起こしやすい (Mellor, 2008)。

## 1772 9.6 厳密な漸近展開による確認

1773 上記のような擾乱の2次の積についての精度を保つという手法には一長一短がある。長所は波の  
 1774 峰の式をフル活用できる事である。短所は、ある場面では平均流が波に与える影響を考慮し、別の  
 1775 場面では平均流が波に与える影響を無視したりしている点で一貫性に欠ける事である。式 (9.19a)-  
 1776 (9.20b) や式 (9.23) あたりの展開では、実際には、平均流の影響を受けない最も低次の摂動の波の  
 1777 性質を駆使している。なぜそのようにして良いのか確認するには、Chu and Mei (1970) や Craik  
 1778 and Leibovich (1976) のような厳密な漸近展開を適用すればよい。例えば、式 (8.4a)-(8.4c) のよう  
 1779 に系統立てて書かれていれば、 $O(\alpha)$  と  $O(\alpha^2)$  の波には平均流の影響がなく、 $O(\alpha^3)$  の波に平均流  
 1780 の影響が現れる事が明瞭である。

表 9.1: 平均流の速度のスケールが  $\alpha c$  の場合の摂動展開と Fourier 展開の関係.

	$\theta$	$2\theta$
$\alpha$	o	
$\alpha^2$	o	o

1781 水面の傾きを表す無次元パラメータ  $\alpha \ll 1$  を使って、任意の物理量  $A = \bar{A}^\epsilon + A'$  の平均成分と  
1782 擾乱成分をそれぞれ漸近展開する。

$$1783 \quad \bar{A}^\epsilon = \alpha \bar{A}_1^\epsilon + \alpha^2 \bar{A}_2^\epsilon + \alpha^3 \bar{A}_3^\epsilon + O(\alpha^4), \quad (9.27a)$$

$$1784 \quad A' = \alpha A'_1 + \alpha^2 A'_2 + \alpha^3 A'_3 + O(\alpha^4), \quad (9.27b)$$

1785 平均流が変化する水平スケールが波の波長にくらべて  $\alpha^{-n}$  倍大きいと仮定する。これを実現する  
1786 には水平微分オペレータを  $\nabla^\epsilon = \dot{\nabla}^\epsilon + \alpha^n \bar{\nabla}^\epsilon$  のように分解すればよい。 $\dot{\nabla}^\epsilon$  は擾乱量と平均量の両  
1787 方に作用し、 $\bar{\nabla}^\epsilon$  は平均量だけに作用する。

$$1788 \quad \nabla^\epsilon A' = \dot{\nabla}^\epsilon A' + \alpha^n \bar{\nabla}^\epsilon A', \quad (9.28a)$$

$$1789 \quad \nabla^\epsilon \bar{A}^\epsilon = \alpha^n \bar{\nabla}^\epsilon \bar{A}^\epsilon, \quad (9.28b)$$

1790 平均流の時間変化が波の位相変化にくらべて  $\alpha^m$  倍ゆっくりしていると仮定する。これを実現する  
1791 には時間微分オペレータを  $\partial_{t^\epsilon} = \partial_{\tau^\epsilon} + \alpha^m \partial_{T^\epsilon}$  のように分解すればよい。 $\partial_{\tau^\epsilon}$  は擾乱量と平均量の  
1792 両方に作用し、 $\partial_{T^\epsilon}$  は平均量だけに作用する。

$$1793 \quad \partial_{t^\epsilon} A' = \partial_{\tau^\epsilon} A' + \alpha^m \partial_{T^\epsilon} A', \quad (9.29a)$$

$$1794 \quad \partial_{t^\epsilon} \bar{A}^\epsilon = \alpha^m \partial_{T^\epsilon} \bar{A}^\epsilon, \quad (9.29b)$$

1795 波の位相速度や群速度のスケールを  $c$  で表すと、擾乱速度のスケールは水平成分と鉛直成分とも  
1796 に  $\|\mathbf{V}'\| \sim \|w'\| \sim \alpha c$  となる。 $\|A\|$  は任意の物理量  $A$  のスケールを表す。次に以下の仮定をおく。

1797

- 1798 • 平均流の水平成分の強さは (第 8 章では  $\|\bar{\mathbf{V}}^\epsilon\| \sim \alpha^2 c$  としたが) 本章では  $\|\bar{\mathbf{V}}^\epsilon\| \sim \alpha c$  とする。
- 1799 • 式 (9.28a)-(9.29b) について  $m = n = 1$  とする。

1800 Euler 平均速度の支配方程式は

$$1801 \quad \partial_{T^\epsilon} \bar{\mathbf{V}}_2^\epsilon + \bar{\nabla}^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{V}}_1^\epsilon \bar{\mathbf{V}}_1^\epsilon) + \partial_{z^\epsilon} (\bar{w}_2^\epsilon \bar{\mathbf{V}}_1^\epsilon) + \bar{\nabla}^\epsilon \cdot (\bar{\mathbf{V}}_1^\epsilon \bar{\mathbf{V}}_1^\epsilon) + \partial_{z^\epsilon} (\bar{w}_1^\epsilon \bar{\mathbf{V}}_2^\epsilon + \bar{w}_2^\epsilon \bar{\mathbf{V}}_1^\epsilon) = -\bar{\nabla}^\epsilon (\bar{p}_2^\epsilon + g\bar{\eta}_2), \quad (9.30a)$$

1802

$$1803 \quad \partial_{T^\epsilon} \bar{w}_1^\epsilon + \partial_{z^\epsilon} (\bar{w}_1^\epsilon \bar{w}_1^\epsilon) = -\partial_{z^\epsilon} \bar{p}_2^\epsilon, \quad (9.30b)$$

1804

$$\bar{\nabla}^\epsilon \cdot \bar{\mathbf{V}}_1^\epsilon + \partial_{z^\epsilon} \bar{w}_2^\epsilon = 0, \quad (9.30c)$$

1805 となる。 $\bar{\mathbf{V}}_1^\epsilon$  は外部要因によって与えられ、 $\bar{w}_1^\epsilon = 0$  と仮定する。 $O(\alpha)$  の擾乱速度の支配方程式は

1806

$$1807 \quad \partial_{\tau^\epsilon} \mathbf{V}'_1 = -\dot{\nabla}^\epsilon (p'_1 + g\eta'_1), \quad (9.31a)$$

$$1808 \quad \partial_{\tau^\epsilon} w'_1 = -\partial_{z^\epsilon} p'_1, \quad (9.31b)$$

$$1809 \quad \dot{\nabla}^\epsilon \cdot \mathbf{V}'_1 + \partial_{z^\epsilon} w'_1 = 0, \quad (9.31c)$$

1810 となる。この方程式系の解は、

$$1811 \quad \phi' = (A/\kappa) \cos \theta \frac{\cosh \kappa(z^\epsilon + H_b)}{\sinh \kappa(\bar{\eta} + H_b)}, \quad \dot{\nabla}^\epsilon \theta = (k, l), \quad \partial_{\tau^\epsilon} \theta = -\omega, \quad (9.32a)$$

$$1812 \quad \omega^2 = g\kappa \tanh \kappa(\bar{\eta} + H_b), \quad \kappa \equiv \sqrt{k^2 + l^2}, \quad (9.32b)$$

$$1813 \quad \mathbf{V}'_1 = \dot{\nabla}^\epsilon \phi'_{\tau^\epsilon}, \quad w'_1 = \partial_{z^\epsilon} \phi'_{\tau^\epsilon}, \quad p'_1 + g\eta'_1 = \omega^2 \phi' \quad (9.32c)$$

1814 である。  $A = A, k, l, \omega$  とすると  $\dot{\nabla}^\epsilon A = 0$  であるが  $\bar{\nabla}^\epsilon A \neq 0$  である。平均流による Doppler シフト  
1815 याシアの影響は  $O(\alpha^2)$  の擾乱速度の支配方程式に現れる。

$$1816 \quad \partial_{T^\epsilon} \mathbf{V}'_1 + \partial_{\tau^\epsilon} \mathbf{V}'_2 + (\bar{\mathbf{V}}_1 + \mathbf{V}'_1) \cdot \dot{\nabla}^\epsilon \mathbf{V}'_1 + w'_1 \partial_{z^\epsilon} (\bar{\mathbf{V}}_1 + \mathbf{V}'_1) = -\dot{\nabla}^\epsilon (p'_2 + g\eta'_2), \quad (9.33a)$$

$$1817 \quad \partial_{T^\epsilon} w'_1 + \partial_{\tau^\epsilon} w'_2 + (\bar{\mathbf{V}}_1 + \mathbf{V}'_1) \cdot \dot{\nabla}^\epsilon w'_1 + w'_1 \partial_{z^\epsilon} w'_1 = -\partial_{z^\epsilon} p'_2, \quad (9.33b)$$

$$1818 \quad \dot{\nabla}^\epsilon \cdot \mathbf{V}'_2 + \partial_{z^\epsilon} w'_2 = 0, \quad (9.33c)$$

1819  $O(\alpha^2)$  の波の解は、 $\cos \theta$  や  $\sin \theta$  に比例する成分と  $\cos 2\theta$  や  $\sin 2\theta$  に比例する成分の線形結合で書  
1820 く事ができる (Chu and Mei, 1970; AG13a)。後者は平均流の方程式系の Reynolds 応力を計算す  
1821 る時に寄与しないので無視して良い。 $\cos \theta$  や  $\sin \theta$  に比例する成分が満たす支配方程式は、

$$1822 \quad \partial_{T^\epsilon} \mathbf{V}'_1 + \partial_{\tau^\epsilon} \mathbf{V}'_2 + \bar{\mathbf{V}}_1 \cdot \dot{\nabla}^\epsilon \mathbf{V}'_1 + w'_1 \partial_{z^\epsilon} \bar{\mathbf{V}}_1 = -\dot{\nabla}^\epsilon (p'_2 + g\eta'_2), \quad (9.34a)$$

$$1823 \quad \partial_{T^\epsilon} w'_1 + \partial_{\tau^\epsilon} w'_2 + \bar{\mathbf{V}}_1 \cdot \dot{\nabla}^\epsilon w'_1 = -\partial_{z^\epsilon} p'_2, \quad (9.34b)$$

1824 である。

1825  $O(\alpha^2)$  の波の式 (9.34a)-(9.34b) を使って、Euler 平均速度の時間発展式 (9.30a) を展開していく  
1826 には、2つの方法がある。

- 1827 • 第1の方法は本章の前半のように式 (9.30a) を水深積分して、波の峰の式を使う (1960年代  
1828 の方法)。この場合は平均流の水平成分は鉛直一様と仮定して、式 (9.34a) の  $w'_1 \partial_{z^\epsilon} \bar{\mathbf{V}}_1$  を落  
1829 とす必要がある。そうすると式 (9.34a)-(9.34b) は式 (9.14a) と同じになる。
- 1830 • 第2の方法は厳密な漸近展開をこのまま続ける (1970年代の方法)。この場合は式 (9.34a)  
1831 の  $w'_1 \partial_{z^\epsilon} \bar{\mathbf{V}}_1$  を落とす必要はない。第8章 (Craik and Leibovich, 1976) と同じように、まず  
1832 式 (9.34a)-(9.34b) に基づく渦度方程式を導き、次に Euler 平均速度の時間発展式 (9.30a) を  
1833 ベクトル不変型に書き換える。式 (9.30a) を水深積分する必要がない。

1834 以下第1の方法を説明する。Euler 平均速度の時間発展式 (9.30a) の水深積分をとると、

$$1835 \quad \frac{\partial}{\partial T^\epsilon} \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \bar{\mathbf{V}}_2 + \frac{\partial}{\partial T^\epsilon} (\eta'_1 \bar{\mathbf{V}}_1|_{z^\epsilon=\bar{\eta}}) + \bar{\nabla}^\epsilon \cdot \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \bar{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbf{V}}_1^\epsilon dz^\epsilon + gH_b \bar{\nabla}^\epsilon \bar{\eta}_2$$

$$1836 \quad + \underbrace{\bar{\nabla}^\epsilon \cdot \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \mathbf{V}'_1 \mathbf{V}'_1^\epsilon dz^\epsilon}_{S_{xx}^{(1)}} + \underbrace{\bar{\nabla}^\epsilon \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \bar{p}_2^\epsilon dz^\epsilon}_{S_{xx}^{(2)}} + \underbrace{\bar{\nabla}^\epsilon \frac{g}{2} \eta'^2}_{S_{xx}^{(3)}} = 0, \quad (9.35)$$

1837 が得られ、直接型の運動量方程式 (9.4)-(9.7) に対応する。式 (9.30a) や (9.35) は  $O(\alpha^3)$  で書かれ  
1838 ている。式 (9.6)-(9.7) において Leibniz 則を適用した際に水面と海底における境界条件としてで  
1839 てきた項は  $O(\alpha^4)$  や  $O(\alpha^5)$  になるので、式 (9.35) には現れない。Euler 平均速度の鉛直成分の式  
1840 (9.30b) に  $\bar{w}_1^\epsilon = 0$  を代入すると  $\bar{p}_2^\epsilon = -w_1'^2$  が得られるので、式 (9.35) における放射応力の第2

1841 成分と第3成分は

$$\begin{aligned}
 1842 \quad \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \bar{p}_2^\epsilon dz^\epsilon + \frac{g}{2} \bar{\eta}_1'^2 &= \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \left[ \bar{p}_2^\epsilon + \frac{1}{2} \overline{(|\mathbf{V}'_1|^2 + w_1'^2)^\epsilon} \right] dz^\epsilon \\
 1843 &= \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \left[ \frac{1}{2} \overline{(|\mathbf{V}'_1|^2 - w_1'^2)^\epsilon} \right] dz^\epsilon \\
 1844 &= H \frac{\partial \omega}{\partial H} \frac{E_2}{\omega}, \tag{9.36}
 \end{aligned}$$

1845 となる。式(9.36)は式(9.20b)を $O(\alpha^2)$ で書いた物である。次に式(9.25)を $O(\alpha^3)$ で書くと、

$$1846 \quad \frac{\partial}{\partial T^\epsilon} (\bar{\eta}'_1 \mathbf{V}'_1 |_{z^\epsilon = \bar{\eta}}) + \bar{\nabla}^\epsilon \cdot \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \bar{\mathbf{V}}'_1 \bar{\mathbf{V}}'_1{}^\epsilon dz^\epsilon + (\bar{\nabla}^\epsilon H) \frac{\partial \omega}{\partial H} \frac{E_2}{\omega} = 0, \tag{9.37}$$

1847 となる。式(9.36)-(9.37)を式(9.35)に代入すると

$$1848 \quad \frac{\partial}{\partial T^\epsilon} \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \bar{\mathbf{V}}_2^\epsilon dz^\epsilon + \bar{\nabla}^\epsilon \cdot \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \bar{\mathbf{V}}_1^\epsilon \bar{\mathbf{V}}_1^\epsilon dz^\epsilon + (\bar{\eta} + H_b) \bar{\nabla}^\epsilon \left[ g \bar{\eta}_2 + \underbrace{\overline{(|\mathbf{V}'_1|^2 - w_1'^2)^\epsilon} / 2}_{=(\partial \omega / \partial H) E_2 / \omega} \right] = 0, \tag{9.38}$$

1849 が得られ、変形型の運動量方程式に対応する (Smith, 2006)。

1850 一般的に、放射応力は $m = n$  (平均流の時間変化が速い) のようにスケーリングした時に、渦  
 1851 度力は $m = n + 2$  (平均流の時間変化が遅い) のようにスケーリングした時に現れる (AG13a,b)。  
 1852 Craik and Leibovich (1976) のスケーリングは $m = 2, n = 0$ と解釈することができる。McWilliams  
 1853 et al. (2004) は渦度力が海浜流に与える影響を考察し、 $m = 4, n = 2$ としている。

## 第10章 鉛直 semi-Lagrange 座標系

鉛直積分系（第9章）では平均流と波のエネルギーの考察を行うのに、平均流の水平成分が鉛直一様であると仮定したり、波の峰の式を使ったりする必要があった。一方、シグマ座標系（鉛直 Lagrange 座標系の一種）を用いれば鉛直一様を仮定しないで、（放射応力を含む）直接型の運動量の式を導く事ができる (Mellor, 2003)。しかし近年まで、シグマ座標系からどのようにして（渦度力を含む）変形型の運動量の式を導けばよいのか理解されていなかった (Mellor, 2008; Arduin et al., 2008)。本章では (i) 変形型の運動量の式, (ii) Lagrange 疑運動量といった概念（第7章）をどのようにして鉛直 semi-Lagrange 座標系に導入するかを説明する。また、鉛直 semi-Lagrange 座標系は、第7-9章で説明した手法と比較して、乱流粘性項の定式化が最も進んでいるのでその内容についても紹介する。

第5章では成層流体を考えていたので、密度座標系を発展させる形で鉛直 semi-Lagrange 座標系を説明した。本章のように風波の分野では密度が一様なので「各流体粒子をその深さの時間平均値  $z$  でラベル付けて、同じラベルを持つ流体粒子を集めて整理したのが鉛直 semi-Lagrange 座標系である」という事を強く意識する必要がある。まず密度面を用いなくても semi-Lagrange 座標系が定義できることを確認しよう。鉛直 semi-Lagrange 座標系  $(x, y, z, t)$  から Euler 座標系  $(x^\epsilon, y^\epsilon, z^\epsilon, t^\epsilon)$  への変換は次のように書くことができる。

$$x^\epsilon = x, \quad y^\epsilon = y, \quad z^\epsilon = z^\epsilon(x, y, z, t), \quad t^\epsilon = t, \quad (10.1)$$

両座標系間の偏微分の連鎖律は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_x^\epsilon & 0 \\ 0 & 1 & z_y^\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & z_z^\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & z_t^\epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x^\epsilon} \\ \partial_{y^\epsilon} \\ \partial_{z^\epsilon} \\ \partial_{t^\epsilon} \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

流体粒子の瞬間的な深さを  $z^\epsilon$ 、時間平均した深さを  $z \equiv \bar{z}^\epsilon$  と表し、 $z$  の値が同じになる流体粒子を集めて面にしたのが図 10.1 の各青線である。任意の物理量  $A$  について、 $z$  面に沿う時間平均を  $\bar{A}$ 、それからのずれを  $A''' \equiv A - \bar{A}$  で表す ( $z$  を固定して比較)。

$$\bar{z}^\epsilon = z, \quad (10.3a)$$

$$z^\epsilon(x, y, z, t) = z + z'''(x, y, z, t), \quad (10.3b)$$

となる。最後に  $\partial_x z = \partial_y z = \partial_t z = 0$  であることに注意して式 (10.3a)-(10.3b) の偏微分をとると、

$$(\bar{z}_x^\epsilon, \bar{z}_y^\epsilon, \bar{z}_z^\epsilon, \bar{z}_t^\epsilon) = (0, 0, 1, 0), \quad (10.4a)$$

$$(z_x^\epsilon, z_y^\epsilon, z_z^\epsilon, z_t^\epsilon) = (z_x''', z_y''', 1 + z_z''', z_t'''), \quad (10.4b)$$

が得られる。

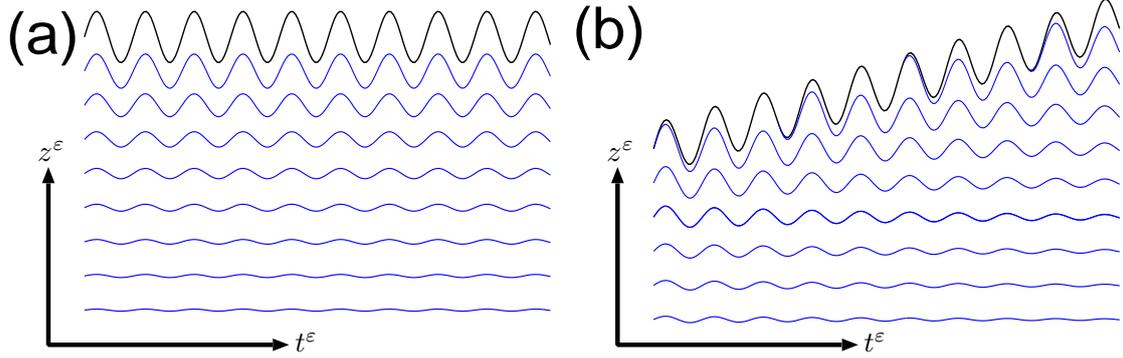


図 10.1: 鉛直 semi-Lagrange 座標系の鉛直断面の模式図。青線が  $z$  の値が一定の面、黒線が水面を表す。背景場に上昇流が (a) ない場合と (b) ある場合。Aiki and Greatbatch (2012)。

## 10.1 支配方程式 (AG12)

Euler 座標系における支配方程式 (7.1a)-(7.1c) に連鎖律 (10.2) を代入すると鉛直 semi-Lagrange 座標系における支配方程式が得られる。

$$(z_z^\epsilon)_t + \nabla \cdot (z_z^\epsilon \mathbf{V}) + (z_z^\epsilon \varpi) = 0, \quad (10.5a)$$

$$(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \varpi \partial_z) z^\epsilon = w, \quad (10.5b)$$

$$(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \varpi \partial_z) \mathbf{V} + f \mathbf{z} \times \mathbf{V} = -\nabla(p + g\eta) + p_{z^\epsilon} \nabla z^\epsilon + F^{\mathbf{V}}, \quad (10.5c)$$

$$(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \varpi \partial_z) w = -\partial_{z^\epsilon} p + F^w, \quad (10.5d)$$

鉛直方向の運動量の式 (10.5d) は第 5 章にはなかったものである。

再確認になるが、物理量  $\varpi$  の定義は式 (10.5b) に含まれている。図 10.1b のように (平均流が水平収束するなどして) ゆっくりとした上昇流がある海域の波を考えよう。青線は (平均した高さが一定のままになるように設計されているので) 流体粒子と一緒に昇っていかない。各流体粒子は青線を次々とまたいでいくということは、流体粒子のラベル (i.e.  $z$  の値) が時間とともに徐々にすり変わっていくことを意味する。これを数式で書くと  $(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \varpi \partial_z) z = \varpi$  となる。基本的には  $\varpi$  は遅い鉛直流成分を表すので、 $\varpi''$  には波の位相変化による鉛直速度は殆ど含まれない。

式 (10.5c)-(10.5d) の記号  $F^{\mathbf{V}}$  と  $F^w$  は粘性項を表し、Euler 座標系の偏微分を用いて次のように対称テンソルのような形で書く事ができる。

$$F^u \equiv [\nu(2u_{x^\epsilon})]_{x^\epsilon} + [\nu(u_{y^\epsilon} + v_{x^\epsilon})]_{y^\epsilon} + [\nu(u_{z^\epsilon} + w_{x^\epsilon})]_{z^\epsilon}, \quad (10.6a)$$

$$F^v \equiv [\nu(v_{x^\epsilon} + u_{y^\epsilon})]_{x^\epsilon} + [\nu(2v_{y^\epsilon})]_{y^\epsilon} + [\nu(v_{z^\epsilon} + w_{y^\epsilon})]_{z^\epsilon}, \quad (10.6b)$$

$$F^w \equiv [\nu(w_{x^\epsilon} + u_{z^\epsilon})]_{x^\epsilon} + [\nu(w_{y^\epsilon} + v_{z^\epsilon})]_{y^\epsilon} + [\nu(2w_{z^\epsilon})]_{z^\epsilon}, \quad (10.6c)$$

粘性係数  $\nu = \nu(z)$  は鉛直方向にだけ変化すると仮定する。風波の砕波やその下の海洋混合層乱流による粘性係数は  $10^{-4} \sim 10^{-2} \text{ m}^2/\text{sec}$  程度である。粘性項を鉛直 semi-Lagrange 座標系の偏微分に書き換えるには、まず式 (10.6a)-(10.6c) の両辺に  $z_z^\epsilon$  を掛けて、次に連鎖律の式 (10.2) を適用す

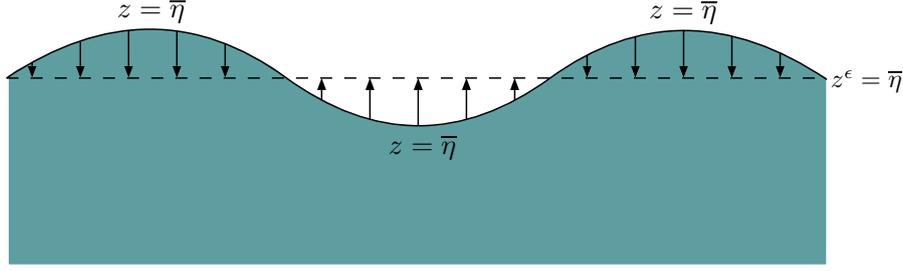


図 10.2: 鉛直 semi-Lagrangian 座標系による Euler 平均量の算出手順の模式図. 水面は  $z = \bar{\eta}$  で表される. 任意の物理量  $A$  について  $A|_{z=\bar{\eta}}$  や  $A_{z^\epsilon}|_{z=\bar{\eta}}$  を使って深さ  $z^\epsilon = \bar{\eta}$  における値を Taylor 近似する.

1904 る. 簡単のために  $\partial_{y^\epsilon} = 0$  と仮定すると,

$$1905 \quad z_z^\epsilon F^u = z_z^\epsilon [\nu(2u_{xx^\epsilon})]_x - z_x^\epsilon [\nu(2u_{xx^\epsilon})]_z + [\nu(u_{xz^\epsilon} + w_{xx^\epsilon})]_z$$

$$1906 \quad = [z_z^\epsilon \nu(2u_{xx^\epsilon})]_x + [\nu(u_{xz^\epsilon} + w_{xx^\epsilon}) - z_x^\epsilon \nu(2u_{xx^\epsilon})]_z, \quad (10.7a)$$

$$1907 \quad z_z^\epsilon F^v = z_z^\epsilon [\nu v_{xx^\epsilon}]_x - z_x^\epsilon [\nu v_{xx^\epsilon}]_z + [\nu v_{zz^\epsilon}]_z$$

$$1908 \quad = [z_z^\epsilon \nu v_{xx^\epsilon}]_x + [\nu v_{zz^\epsilon} - z_x^\epsilon \nu v_{xx^\epsilon}]_z, \quad (10.7b)$$

$$1909 \quad z_z^\epsilon F^w = z_z^\epsilon [\nu(w_{xx^\epsilon} + u_{z^\epsilon})]_x - z_x^\epsilon [\nu(w_{xx^\epsilon} + u_{z^\epsilon})]_z + [\nu(2w_{zz^\epsilon})]_z$$

$$1910 \quad = [z_z^\epsilon \nu(w_{xx^\epsilon} + u_{z^\epsilon})]_x + [\nu(2w_{zz^\epsilon}) - z_x^\epsilon \nu(w_{xx^\epsilon} + u_{z^\epsilon})]_z, \quad (10.7c)$$

1911 となる.  $z_z^\epsilon$  で重み付けられた粘性項はフラックス発散型で書けることが分かる.

1912 Euler 平均速度と全輸送速度は非圧縮の条件を完全に満たす.

$$1913 \quad \nabla^\epsilon \cdot \bar{\mathbf{V}}^\epsilon + \partial_{z^\epsilon} \bar{w}^\epsilon = 0, \quad (10.8a)$$

$$1914 \quad \nabla \cdot \hat{\mathbf{V}} + \partial_z \hat{w} = 0, \quad (10.8b)$$

$$1915 \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} + \partial_{z^\epsilon} \bar{w} \neq 0, \quad (10.8c)$$

$$1916 \quad \nabla^\epsilon \cdot \mathbf{V}' + \partial_{z^\epsilon} w' = 0, \quad (10.8d)$$

$$1917 \quad \nabla \cdot \mathbf{V}''' + \partial_z w''' \neq 0, \quad (10.8e)$$

1918 重みなし平均速度には若干の圧縮性がある. 式 (10.8a) と式 (10.8b) から準 Stokes 速度 ( $\mathbf{V}^{qs}, w^{qs}$ )  $\equiv$

1919  $(\hat{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{V}}^\epsilon, \hat{w} - \bar{w}^\epsilon)$  が完全に非圧縮であることが確認できる.

## 1920 10.2 直接型の運動方程式 (AG12)

1921 式 (10.5a)-(10.5d) を組み合わせると, 運動量の式をフラックス発散型で書く事ができる.

$$1922 \quad (z_z^\epsilon \mathbf{V})_t + \nabla \cdot (z_z^\epsilon \mathbf{V} \mathbf{V}) + (z_z^\epsilon \varpi \mathbf{V})_z + f \mathbf{z} \times z_z^\epsilon \mathbf{V} = -z_z^\epsilon \nabla(p + g\eta) + p_z \nabla z^\epsilon + z_z^\epsilon F^{\mathbf{V}} \quad (10.9a)$$

$$1923 \quad (z_z^\epsilon w)_t + \nabla \cdot (z_z^\epsilon \mathbf{V} w) + (z_z^\epsilon \varpi w)_z = -\partial_z p + z_z^\epsilon F^w. \quad (10.9b)$$

1924 これらの式に時間平均を施すと, 重み付け平均速度 ( $\hat{\mathbf{V}}, \hat{w}$ ) に対する時間発展方程式が得られる.

$$1925 \quad \hat{\mathbf{V}}_t + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}) + (\hat{\varpi} \hat{\mathbf{V}})_z + f \mathbf{z} \times \hat{\mathbf{V}} + \mathcal{RS}^{\mathbf{V}} = -\nabla(\bar{p} + g\bar{\eta}) + \mathcal{FS}^{\mathbf{V}} + \hat{F}^{\mathbf{V}}, \quad (10.10a)$$

$$1926 \quad \hat{w}_t + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{V}} \hat{w}) + (\hat{\varpi} \hat{w})_z + \mathcal{RS}^w = -\partial_z \bar{p} + \hat{F}^w, \quad (10.10b)$$

1927 式 (10.10a)-(10.10b) は重み付け平均速度 ( $\hat{\mathbf{V}}, \hat{w}$ ) が全輸送速度 ( $\hat{\mathbf{V}}, \hat{\omega}$ ) によって移流されることを  
 1928 示している。 $z^\epsilon$  面を通過する速度  $w$  の重み付け平均と  $z$  面を通過する速度  $\omega$  の重み付け平均の違いは、  
 1929

$$1930 \quad \hat{w} = \overline{w} + \overline{z_z''' w'''} \\
 1931 \quad = \hat{\omega} + \overline{\mathbf{V}''' \cdot \nabla z'''} + \overline{w''' z_z'''}, \quad (10.11)$$

1932 となる。2行目の導出には式 (10.5b) を使った。式 (10.10a)-(10.10b) の Reynolds 応力項は、

$$1933 \quad \mathcal{RS}^A \equiv \nabla \cdot (\overline{z_z^\epsilon \mathbf{V}'' A''}) + (\overline{z_z^\epsilon \omega'' A''})_z, \quad A = u, v, w \quad (10.12)$$

1934 となる。 $\omega''$  は殆どゼロなので第2項は無視しても構わない。式 (10.10a)-(10.10b) の形状応力項は

$$1935 \quad \mathcal{FS}^{\mathbf{V}} \equiv -\overline{z_z''' \nabla (p''' + g\eta''')} + \overline{p_z''' \nabla z'''} \\
 1936 \quad = -\left[ \overline{z_z''' \nabla (p''' + g\eta''')} \right]_z + \nabla (\overline{z_z''' p_z'''}). \quad (10.13)$$

1937 となる。式 (10.13) の第1項は非粘性の線形波の解析解 (第9章) を考えると、水面で  $z''' \nabla (p''' +$   
 1938  $g\eta''') = g\eta''' \nabla \eta''' = (g/2) \nabla \eta'''^2$  となるので、鉛直積分された運動量方程式 (9.35) における放射  
 1939 応力の第3成分  $S_{xx}^{(3)}$  に対応する。式 (10.13) の第2項は非粘性の線形波の解析解 (第9章) を考え  
 1940 ると  $\overline{z_z''' p_z'''} \simeq -\overline{z_z''' w_t'''} = \overline{w'''^2}$  となるので、鉛直積分された運動量方程式 (9.35) における放射応力  
 1941 の第2成分  $S_{xx}^{(2)}$  に対応する。

1942 式 (10.5a)-(10.5d) から運動エネルギー  $\mathcal{K} \equiv (u^2 + v^2 + w^2)/2$  の式と圧力フラックスの式を導くと

$$1943 \quad [z_z^\epsilon \mathcal{K}]_t + \nabla \cdot [z_z^\epsilon \mathbf{V} \mathcal{K}] + [z_z^\epsilon \omega \mathcal{K}]_z = -\mathbf{V} \cdot z_z^\epsilon \nabla (p + g\eta) + \mathbf{V} \cdot p_z \nabla z^\epsilon - w p_z + z_z^\epsilon (\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{V}} + w F^w), \\
 1944 \quad (10.14a)$$

$$1945 \quad [z_t^\epsilon (p + g\eta)]_z + \nabla \cdot [z_z^\epsilon \mathbf{V} (p + g\eta)] + [z_z^\epsilon \omega (p + g\eta)]_z = \mathbf{V} \cdot z_z^\epsilon \nabla (p + g\eta) + \underbrace{(z_t^\epsilon + \omega z_z^\epsilon)}_{w - \mathbf{V} \cdot \nabla z^\epsilon} p_z, \quad (10.14b)$$

1946 となる。式 (10.14a)-(10.14b) の和をとると右辺は粘性項だけが残る。2層モデルのエネルギー方程  
 1947 式 (2.11a)-(2.12c) のように、式 (10.14a)-(10.14b) に重み付けに基づく平均場と擾乱場の分離\*10.1を  
 1948 施すと、

$$1949 \quad \partial_t \mathcal{K}^{\text{mean}} + \nabla \cdot [\hat{\mathbf{V}} \mathcal{K}^{\text{mean}} + \hat{u}(\bar{p} + g\bar{\eta})] + [\hat{\omega} \mathcal{K}^{\text{mean}} + \hat{\omega}(\bar{p} + g\bar{\eta})]_z \\
 1950 \quad = [\hat{\mathbf{V}} \cdot (\mathcal{FS}^{\mathbf{V}} - \mathcal{RS}^{\mathbf{V}}) - \hat{w} \mathcal{RS}^w + (\hat{\omega} - \hat{w}) \bar{p}_z] + (\hat{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{F}}^{\mathbf{V}} + \hat{w} \hat{F}^w), \quad (10.15a)$$

$$1951 \quad \partial_t \mathcal{K}^{\text{wave}} + \nabla \cdot [\hat{\mathbf{V}} \mathcal{K}^{\text{wave}} + \hat{\mathbf{V}} \overline{z_z''' (p''' + g\eta''')} + \overline{\mathbf{V}'' \mathcal{K}} + \overline{\mathbf{V}'' z_z^\epsilon (p + g\eta)}] \\
 1952 \quad + [z_t''' (p''' + g\eta''') + \hat{\omega} \mathcal{K}^{\text{wave}} + \hat{\omega} \overline{z_z''' (p''' + g\eta''')} + \overline{\omega'' \mathcal{K}} + \overline{\omega'' z_z^\epsilon (p + g\eta)}]_z \\
 1953 \quad = -[\hat{\mathbf{V}} \cdot (\mathcal{FS}^{\mathbf{V}} - \mathcal{RS}^{\mathbf{V}}) - \hat{w} \mathcal{RS}^w + (\hat{\omega} - \hat{w}) \bar{p}_z] + \overline{z_z^\epsilon (\mathbf{V}'' \cdot \mathbf{F}''^{\mathbf{V}} + w'' F''^w)}, \quad (10.15b)$$

1954 のように平均場の運動エネルギー  $\mathcal{K}^{\text{mean}} \equiv (\hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{w}^2)/2$  と擾乱場の運動エネルギー  $\mathcal{K}^{\text{wave}} \equiv$   
 1955  $\overline{z_z^\epsilon (u''^2 + v''^2 + w''^2)}/2$  の収支式が得られる。 $z'''$  の境界条件は  $z'''|_{z=\bar{\eta}} \equiv \eta'''$  と  $z'''|_{z=-H_b} = 0$  で  
 1956 ある。後者については第5章で説明した。式 (10.15a)-(10.15b) は波と平均流の間のエネルギー変  
 1957 換が Reynolds 応力と形状応力によってなされる事を示している。波のエネルギーの式 (10.15b) は  
 1958 鉛直積分系の式 (9.13) に対応する。

\*10.1 任意の物理量  $A$  と  $B$  に対して  $\overline{z_z^\epsilon AB} = \hat{A} \hat{B} + \overline{z_z^\epsilon A'' B''}$ 。

### 10.3 変形型の運動方程式 (AG13b)

まず物質微分演算子  $\mathcal{D}_t \equiv \partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla + \varpi \partial_z$  を使って、運動量の式 (10.5c)-(10.5d) を次のよう  
書く。

$$\mathcal{D}_t \mathbf{V} + f \mathbf{z} \times \mathbf{V} = -\nabla(p + g\eta) - \underbrace{(\mathcal{D}_t w - F^w) \nabla z'''}_{-p_z^\epsilon} + F^{\mathbf{V}}, \quad (10.16a)$$

$$\underbrace{(1 + z_z''')}_{z_z^\epsilon} \mathcal{D}_t w = -\partial_z p + \underbrace{(1 + z_z''')}_{z_z^\epsilon} F^w, \quad (10.16b)$$

式 (10.16a)-(10.16b) を使って、形状応力項 (10.13) を展開すると

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \mathcal{S}^{\mathbf{V}} &= -\overline{z_z''' \nabla(p + g\eta)} + \overline{(\nabla z''') p_z} \\ &= \overline{z_z''' [\mathcal{D}_t \mathbf{V} + f \mathbf{z} \times \mathbf{V} + (\mathcal{D}_t w - F^w) \nabla z''' - F^{\mathbf{V}}]} - \overline{(\nabla z''') (1 + z_z''') (\mathcal{D}_t w - F^w)} \\ &= \overline{z_z''' (\mathcal{D}_t \mathbf{V})'''} - \overline{(\nabla z''') (\mathcal{D}_t w)'''} + f \mathbf{z} \times \overline{z_z''' \mathbf{V}'''} - \overline{z_z''' (F^{\mathbf{V}})'''} + \overline{(\nabla z''') (F^w)'''}, \end{aligned} \quad (10.17)$$

のように、圧力を全く用いない表現に書き換える事ができる。

変形型の運動量の式を導くには、式 (10.17) を重み付け平均された運動量の式 (i.e. 直接型の式) に代入して、式 (7.7) と同等の処理を施す。確かに

$$\hat{\mathcal{D}}_t (\bar{\mathbf{V}} + \overline{w''' \nabla z'''}) + \dots + f \mathbf{z} \times \hat{\mathbf{V}} = -\nabla(\bar{p} + g\bar{\eta} - \overline{w'''^2}/2) + \dots + \hat{F}^{\mathbf{V}} - \overline{z_z''' (F^{\mathbf{V}})'''} + \overline{(\nabla z''') (F^w)'''}, \quad (10.18a)$$

$$\hat{\mathcal{D}}_t (\underbrace{\bar{w} + \overline{w''' \partial_z z'''}}_{\hat{w}}) + \dots = -\partial_z(\bar{p} - \overline{w'''^2}/2) + \dots + \hat{F}^w, \quad (10.18b)$$

のように予報変数や粘性項が新しい形になって現れる<sup>\*10.2</sup>。記号  $\hat{\mathcal{D}}_t \equiv \partial_t + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla + \hat{\omega} \partial_z$  である。式 (10.18a)-(10.18b) は 3次元 semi-Lagrange 座標系の変形型の運動量の式 (7.8) に対応する<sup>\*10.3</sup>。確かに、VL (vertically Lagrangian) 疑運動量を次のように定義すると、式 (10.18a)-(10.18b) の予報変数は「全輸送速度」マイナス「VL 疑運動量」と書く事ができる<sup>\*7.3</sup>。

$$\begin{pmatrix} \bar{u} + \overline{z_x''' w'''} \\ \bar{v} + \overline{z_y''' w'''} \\ \bar{w} + \overline{z_z''' w'''} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\omega} \end{pmatrix}}_{\text{total transport velocity}} - \underbrace{\begin{pmatrix} +z_x''' & 0 & -z_x''' \\ 0 & +z_y''' & -z_x''' \\ -z_x''' & -z_y''' & -z_z''' \end{pmatrix}}_{\text{VL pseudomomentum}} \begin{pmatrix} u''' \\ v''' \\ w''' \end{pmatrix}, \quad (10.19)$$

この式は式 (7.11) に対応する。VL 疑運動量と準 Stokes 速度の関係は、平均流のシアが弱いと仮定して簡単に書くと、

$$\underbrace{\overline{z_z''' \mathbf{V}'''} - \overline{(\nabla z''') w'''}}_{\text{VL pseudomomentum}} = \underbrace{\overline{z_z''' \mathbf{V}'''}}_{\mathbf{V}^{qs}} - \nabla(\overline{z_z''' w'''}) - \overline{z_z''' (\mathbf{V}_z''' - \nabla w''')}, \quad (10.20)$$

波の統計量が水平一様かつ鉛直断面の運動が渦なしならば、VL 疑運動量と準 Stokes 速度が一致する事を示している。式 (10.20) は式 (7.14) に対応する。

<sup>\*10.2</sup>式 (10.17) の Coriolis 項は同じ行内の  $\overline{z_z''' (\mathcal{D}_t \mathbf{V})'''}'$  から派生する項の一部と相殺される (AG13b)。結果として、式 (10.10a) に元々あった Coriolis 項が無傷のまま式 (10.18a) に引き継がれる。

<sup>\*10.3</sup>式 (10.18a)-(10.18b) の Bernoulli ヘッド  $-\overline{w'''^2}/2$  は、式 (7.13) の Bernoulli ヘッド  $-(1/2) \overline{u_j^L u_j^L}$  に対応する。Lagrange 座標系の変形型の運動量の方程式に現れる Bernoulli ヘッドは圧力の符号と逆になるという特徴がある。Euler 座標系で移流項をベクトル不変型で書いた時に現れる Bernoulli ヘッドは圧力の符号と同じである [式 (8.8) 参照]。

## 10.4 各種平均量の比較

第5章の繰り返しになるが、Euler 平均量、重み付け平均量、重みなし平均量とそれぞれに対応する擾乱量の関係は

$$\bar{A}^\epsilon \simeq \hat{A} + [-z'''A'''' + (\overline{z''''^2}/2)\bar{A}_z]_z, \quad (10.21a)$$

$$\hat{A} = \overline{z_z^\epsilon A}, \quad (10.21b)$$

$$\bar{A} = \hat{A} - \overline{z_z'''A''''}, \quad (10.21c)$$

$$A - \bar{A}^\epsilon = A' \simeq A'''' - z''''\bar{A}_z, \quad (10.21d)$$

$$A - \hat{A} = A'' = A'''' - \overline{z_z'''A''''}, \quad (10.21e)$$

$$A - \bar{A} = A''', \quad (10.21f)$$

となる。式(10.21a)はTaylorに基づく近似式(5.24)そのものである(図10.2)。 $A''''$ と $A''$ の違いは擾乱について2次の積なので十分小さい。 $A''''$ と $A'$ の違いは擾乱について1次の積なので無視できない。例えば強い鉛直シアを持つ平均流の中の擾乱速度を考えた場合、 $\mathbf{V}''''$ と $\mathbf{V}'$ は殆ど同じとみなしても構わないが、 $\mathbf{V}''''$ と $\mathbf{V}'$ は区別する必要がある。式(5.24)の水深積分をとると、

$$\begin{aligned} \int_{-H_b}^{\bar{\eta}} \hat{A} - \bar{A}^\epsilon dz &= \overline{\eta''''A''''}|_{z=\bar{\eta}} - (\overline{\eta''''^2}/2)\bar{A}_z|_{z=\bar{\eta}} \\ &= \overline{\eta''''A'}|_{z=\bar{\eta}} + (\overline{\eta''''^2}/2)\bar{A}_z|_{z=\bar{\eta}}, \end{aligned} \quad (10.22)$$

となる。式(10.22)は式(9.3)に対応し、ともに水面変位がある場合の積み重ね則を表す<sup>\*5.1</sup>。

## 10.5 薄い粘性境界層

まず、水面波の位相変化に伴う粘性境界層(薄い粘性境界層と呼ばれる)の厚さを次元解析を用いて考察しよう(図10.3)。水面波の振動数を $\omega \sim 1 \text{ sec}^{-1}$ 、粘性係数を $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ sec}^{-1}$ とすると、粘性境界層の厚さは $\sqrt{\nu/\omega} \sim 3.2 \text{ cm}$ 程度になる。深水波の分散関係式は $\omega^2 = gk$ なので $k^{-1} = g/\omega^2 = 9.8 \text{ m}$ が擾乱速度が卓越する深さスケールである。薄い粘性境界層を考察するには、第8、9章のような鉛直 Euler 座標系では水面の取り扱いが大雑把すぎてままならない(図9.2)。第6、7章のような3次元 semi-Lagrange 座標系では平均水位が実際の水位と若干ずれる(図??)という懸念がある。鉛直 semi-Lagrange 座標系を用いれば何の問題もなく(碎波は対象外だが)薄い粘性境界層を取り扱う事ができる。

風波の水側の運動を考察する。波の位相速度を $\omega/k$ 、水面の傾きを表す無次元パラメーターを $\alpha \ll 1$ とすると、水側の平均流(Ekman 流や吹送流)の強さのスケールが高々 $\alpha(\omega/k)$ になる。運動方程式(10.5a)-(10.5d)の擾乱成分の摂動展開を考えると、 $O(\alpha)$ の支配方程式は、

$$z_{1zt}''' + u_{1x}''' = 0, \quad (10.23a)$$

$$z_{1t}''' = w_{1t}''', \quad (10.23b)$$

$$u_{1t}''' = -(p_1''' + g\eta_1''')_x + \nu(u_{1xx}''' + u_{1zz}'''), \quad (10.23c)$$

$$w_{1t}''' = -p_{1z}''' + \nu(w_{1xx}''' + w_{1zz}'''), \quad (10.23d)$$

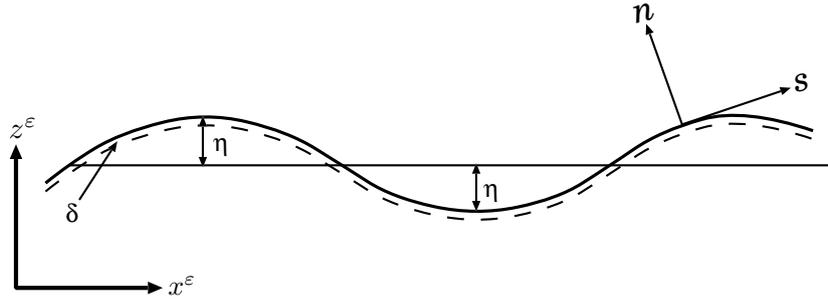


図 10.3: 波の位相変化によってできる薄い粘性境界層の鉛直断面の模式図.  $\delta$  は粘性境界層の厚さを表す.  $n$  は水面の法線方向,  $s$  は水面の接線方向を表す. Aiki and Greatbatch (2012).

2016 となる。本節では解析解を導く事を目的としているので、粘性係数  $\nu$  は鉛直一様と仮定している。  
2017 線形方程式 (10.23a)-(10.23d) の一般解は、深水波を仮定すると、

$$2018 \quad u_1''' = \mathbf{Re}\{e^{i\theta}[e^{k(z-\bar{\eta})}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) - e^{m(z-\bar{\eta})}\mathcal{B}m/k]\}\omega, \quad (10.24a)$$

$$2019 \quad w_1''' = \mathbf{Im}\{e^{i\theta}[e^{k(z-\bar{\eta})}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) - e^{m(z-\bar{\eta})}\mathcal{B}]\}\omega, \quad (10.24b)$$

$$2020 \quad z_1''' = \mathbf{Re}\{e^{i\theta}[e^{k(z-\bar{\eta})}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) - e^{m(z-\bar{\eta})}\mathcal{B}]\}, \quad (10.24c)$$

$$2021 \quad p_1''' + g\eta_1''' = \mathbf{Re}\{e^{i\theta}[e^{k(z-\bar{\eta})}(\mathcal{A} + \mathcal{B})]\}\omega^2/k, \quad (10.24d)$$

$$2022 \quad \omega^2 = gk, \quad \theta \equiv kx - \omega t, \quad (10.24e)$$

$$2023 \quad m \equiv \sqrt{-i(\omega/\nu) + k^2} = (k/\sqrt{\beta})\sqrt{-i + \beta}, \quad \beta \equiv \nu k^2/\omega \ll 1, \quad (10.24f)$$

2024 となる。係数  $\mathcal{A}$  は水面変位の振幅を表し、係数  $\mathcal{B}$  は水面で気側から受ける外力によって決まる（第  
2025 1 1、1 2 章）。係数  $\mathcal{A}$  が付いている部分を非粘性解で、その深さスケールは  $1/k$  である。係数  $\mathcal{B}$   
2026 が付いている部分は粘性解で、その深さスケールは  $\sqrt{\nu/\omega} = \sqrt{\beta}/k$  である。前述の次元解析で用  
2027 いたスケールを代入すると無次元数  $\beta \sim 10^{-5}$  となる\*10.4。

2028 深さ  $\bar{\eta} - \sqrt{\nu/\omega} < z < \bar{\eta}$  の範囲が（波の位相変化による）薄い粘性境界層である (Pierson, 1962)。  
2029 鉛直断面における流体粒子の運動は、薄い粘性境界層内では渦ありで、それより下では渦なしで  
2030 ある。

$$2031 \quad u_{1z}''' - w_{1x}''' \neq 0, \quad \text{for } \bar{\eta} - \sqrt{\nu/\omega} < z < \bar{\eta}, \quad (10.25a)$$

$$2032 \quad u_{1z}''' - w_{1x}''' = 0, \quad \text{for } z < \bar{\eta} - \sqrt{\nu/\omega}, \quad (10.25b)$$

2033 式 (10.20) に注意すると、VL 疑運動量と準 Stokes 速度が一致するのは、薄い粘性境界層の底より  
2034 下側だけであることが分かる。このような理由から変形型の運動量の式 (10.14a) や式 (7.15) を使っ  
2035 て、波が平均流に与える影響を考察したり、数値モデルで再現する場合には、海洋の上端を厳密な  
2036 平均水位  $z = \bar{\eta}$  ではなく薄い粘性境界層の底  $z = \bar{\eta} - \sqrt{\nu/\omega}$  と見なすのが一般的である。

2037 薄い粘性境界層の底より下側では、準 Stokes 速度は非粘性解を使って書く事ができる。

$$2038 \quad u^{qs} = (\overline{z_1''' u_1''})_z = (\mathcal{A}^2 \omega e^{2k(z-\bar{\eta})})_z = 2k\omega \mathcal{A}^2 e^{2k(z-\bar{\eta})}, \quad (10.26)$$

2039 これは 3 次元 Euler 座標系における Stokes ドリフト速度の表現 (8.7a) と一致する。本節では  $y$  方  
2040 向には波の運動がないと仮定してるので  $v^{qs} = 0$  である。

\*10.4 この  $\beta$  は Coriolis パラメータと関係する  $\beta$  ではないので注意しよう。

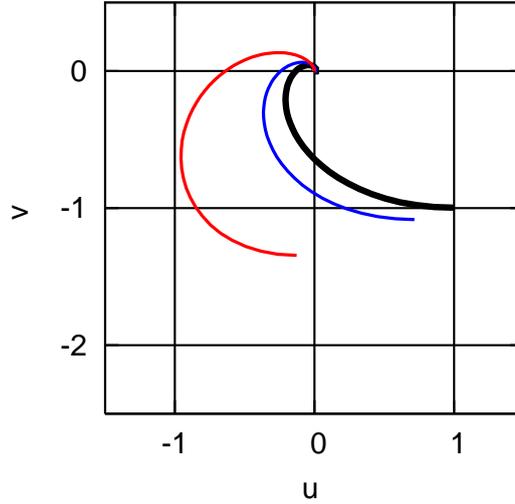


図 10.4: 風によって駆動される海洋表層の Ekman スパイラル速度. 波がない場合 (黒線)、波の振幅が 1 m の場合 (青線)、波の振幅が 2 m の場合 (赤線). Aiki and Greatbatch (2012).

2041 最後に、平均流が水平方向に一樣かつ定常であると仮定し、薄い粘性境界層の底より下側における平均流の運動量バランスを考察しよう。波は前述のように  $x$  方向に進行しているとする。直接型  
2042  
2043 型の運動量の式 (10.10a) は

$$2044 \quad -f(\bar{v}^\epsilon + v^{qs}) = -\overline{[z'''(p''' + g\eta''')]_x}_z + \partial_z[\nu\bar{u}_z^\epsilon], \quad (10.27a)$$

$$2045 \quad f(\bar{u}^\epsilon + u^{qs}) = \partial_z[\nu\bar{v}_z^\epsilon], \quad (10.27b)$$

2046 となる。波の統計量が水平一樣であると仮定しているので式 (10.10a) の Reynolds 応力項が消える  
2047 のは当然である。式 (10.27a) の形状応力項は解析解 (10.24a)-(10.24f) を代入すればゼロになるが、  
2048 これは本節のように粘性係数が鉛直一樣であると仮定した場合に限った話なので注意しよう。変形  
2049 型の運動量の式 (10.18a) は

$$2050 \quad -f(\bar{v}^\epsilon + v^{qs}) = \partial_z[\nu(\bar{u}^\epsilon - u^{qs})_z] + \nu u_{zz}^{qs}, \quad (10.28a)$$

$$2051 \quad f(\bar{u}^\epsilon + u^{qs}) = \partial_z[\nu\bar{v}_z^\epsilon], \quad (10.28b)$$

2052 となる。本節のように粘性係数が鉛直一樣であると仮定した場合には、式 (10.28a) の右辺は  $\partial_z[\nu\bar{u}_z^\epsilon]$   
2053 となるので、直接型の方程式系 (10.27a)-(10.27b) と変形型の方程式系 (10.28a)-(10.28b) は一致す  
2054 る。上記の粘性項の導出は第 1 2 章で説明する。

2055 式 (10.27b) と式 (10.28b) の左辺にある  $f u^{qs}$  は Coriolis-Stokes 力と呼ばれ (Hasselmann, 1970;  
2056 Huang, 1979)、古典的な Ekman スパイラルの向きを風上側にずらす作用があることが知られてい  
2057 る (図 10.4)。即ち準 Stokes 速度を相殺する向きに Euler 平均速度が増加する。

## 2058 10.6 まとめ

- 2059 • 直接型の運動量の式の予報変数は重み付け平均速度  $(\hat{\mathbf{V}}, \hat{\omega})$  である。非圧縮の条件を完全に  
2060 満たすのは全輸送速度  $(\hat{\mathbf{V}}, \hat{\omega})$  である。

- 2061 ● 近年までシグマ座標系（鉛直 Lagrange 座標系の一種）からは直接型の運動量の式しか導け  
2062 ないと考えられていた (Mellor, 2003, 2008; Arduin et al., 2008)。
- 2063 ● 形状応力項を圧力に関する物理量を全く使わない表現に書き換える事で、直接型の運動量の  
2064 式を変形型の運動量の式に書き換える事ができる。変形型の式には渦度力が現れる (AG13b)。
- 2065 ● 変形型の運動量の式の子報変数は「全輸送速度」マイナス「VL 疑運動量」である。
- 2066 ● 3次元 semi-Lagrange 座標系（第6、7章）で平均した水面の高さは、実際の平均水面から  
2067 ずれる。鉛直 semi-Lagrange 座標系ではこの問題が発生しない。
- 2068 ● 鉛直 Euler 座標系（第8、9章）では水面の境界条件の取り扱いが大雑把すぎて、薄い粘性  
2069 境界層を陽に取り扱うことができないが、鉛直 semi-Lagrange 座標系ではそれができる。
- 2070 ● 薄い粘性境界層より下側では波による運動が渦なしなので、VL 疑運動量が準 Stokes 速度に  
2071 等しくなり、変形型の運動量の式の子報変数が実質的に Euler 平均速度になる。
- 2072 ● Coriolis-Stokes 力によるエネルギー変換は図 8.2 のように平均 KE を Euler 平均速度に基づい  
2073 て定義した場合に現れる。直接型の運動量の式に基づくエネルギー収支式 (10.15a)-(10.15a)  
2074 は重み付け平均速度に基づいているので、この場合の平均 KE は図 8.2 の破線ボックスに対  
2075 応する。

## 第11章 平均流のシアがある場合

風波の気側では、鉛直シアを持つ風が不安定を起こし、気側の運動量を波に与える。本章では、平均流のシアが卓越する系に対して Lagrange 的な考察を行う場合の注意点をまとめる。

### 11.1 鉛直シアを持つ風に関する渦度方程式

風波の生成に関する線形不安定問題の支配方程式を使用する。平均流は鉛直シアを持つ風で、初期に水側は無運動とする。粘性は考慮しない。気側の方程式系は Rayleigh の不安定を一般化した問題（順圧不安定）と同じであるが、気側の下端の境界条件（すなわち水面）は自由表面扱いになっている。気側の密度と水側の密度はそれぞれ固定値とする。これは Miles (1957) の不安定と呼ばれる (Mitsuyasu, 2002)。

Miles (1957) の不安定問題の気側の支配方程式を鉛直 semi-Lagrange 座標系で記述すると、

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) z_{1z}''' + u_{1x}''' = 0, \quad (11.1a)$$

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) z_1''' = w_1''', \quad (11.1b)$$

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) u_1''' = -P_{1x}''', \quad (11.1c)$$

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) w_1''' = -P_{1z}''', \quad (11.1d)$$

となる。添字の数字は  $\alpha$  (水面の傾き) について摂動展開を表す。平均流は 0 次のオーダーで与えられ、波は 1 次のオーダーで発達する。平均流  $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(z)$  は定常で鉛直方向だけに変化すると仮定する。気側の方程式系なので水平方向の運動量の式 (11.1c) の圧力勾配項に静水圧の勾配  $g\eta_x'''$  は現れない。 $z$  面を通り越す鉛直速度の擾乱成分  $\varpi'''$  は殆どゼロなので以下省略する [i.e. 例えば  $O(\alpha^6)$  や  $O(\alpha^7)$  にならないと  $\varpi'''$  は現れない]。

まず式 (11.1b) を式 (11.1a) に代入すると擾乱速度 ( $u_1'''$ ,  $w_1'''$ ) には圧縮性があるかのような関係式が得られる<sup>\*11.1</sup>。

$$u_{1x}''' + w_{1z}''' - z_{1x}''' \bar{u}_{0z} = 0, \quad (11.2)$$

これはいささか不都合ではあるが、よく注意すれば流線関数  $\psi$  を定義することができる。

$$(\psi_z, -\psi_x) \equiv (u_1''' - z_1''' \bar{u}_{0z}, w_1'''). \quad (11.3)$$

式 (11.3) を詳しく説明するために「Lagrange 擾乱」と「Euler 擾乱」という用語を導入する。Lagrange 擾乱とは  $A''' (= A - \bar{A})$  の事である。すなわち任意の物理量  $A$  について鉛直 semi-Lagrange 座標系における重みなし平均  $\bar{A}$  からのずれである (引き算は  $z$  を固定して行う)。Euler 擾乱とは  $A' (= A - \bar{A}^e)$  の事である。すなわち任意の物理量  $A$  について Euler 直交座標系における平均  $\bar{A}^e$

<sup>\*11.1</sup>式 (6.6c) や式 (10.8e) の具体的な事例を表したのが、式 (11.2) である。

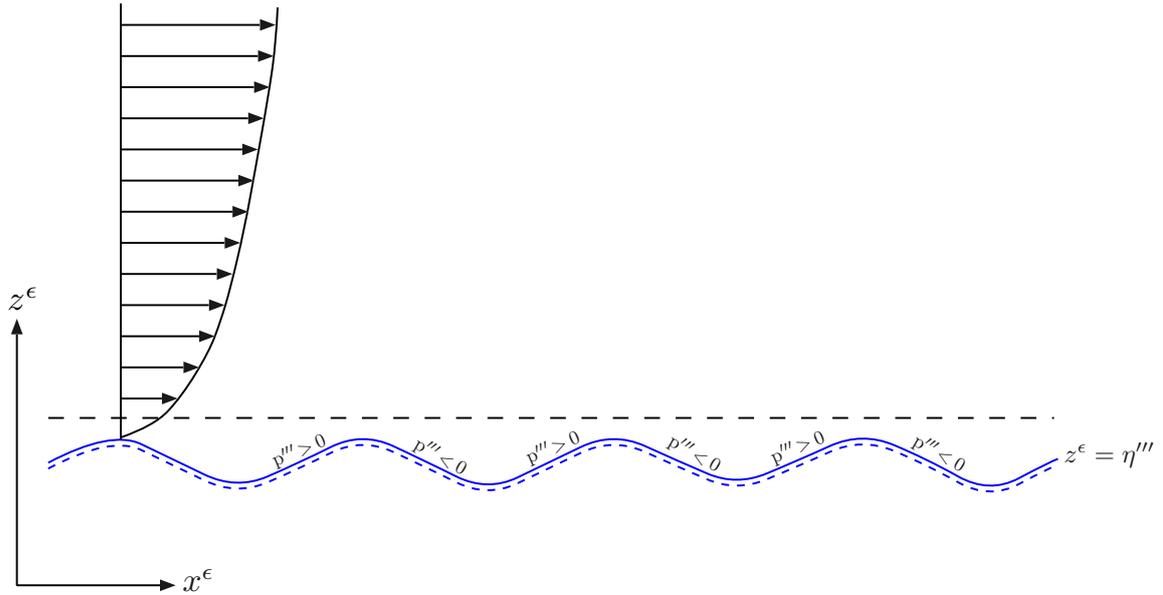


図 11.1: 風波の鉛直断面の模式図. 青色実線が水面、青色点線が薄い粘性境界層の底、黒色矢印が風速、黒色破線が臨界層の高さを表す.

2104 からのずれである (引き算は  $z^\epsilon$  を固定して行う). Euler 擾乱  $A'$  と Lagrange 擾乱  $A'''$  の関係は鉛  
2105 直方向 Taylor 展開を使って説明する事ができる.

$$2106 \quad A' = A''' + (-z''')\bar{A}_{z^\epsilon} + (-z''')^2\overline{A_{z^\epsilon z^\epsilon}}/2 + \dots$$

$$2107 \quad \simeq A''' - z''' \bar{A}_z, \quad (11.4)$$

2108 これは前の章でもたびたび登場した重要な関係式である. 式 (11.4) を使うと、式 (11.2) は  $w'_{1x} + w'_{1z} =$   
2109  $0$ 、式 (11.3) は  $(\psi_z, -\psi_x) \equiv (u', w')$  と書き直す事ができる. つまり Euler 擾乱速度を使えば、非  
2110 圧縮の条件や流線関数をすんなりと定義できるのである. 添字の  $x$  や  $z$  は鉛直 semi-Lagrange 座  
2111 標系における偏微分になっているので、例えば、境界条件として水面 ( $z = 0$ ) における流線関数の  
2112 値や勾配を具体的に記述したい場合には厳密に対処することができる.

2113 Euler 擾乱と Lagrange 擾乱の関係式 (11.4) は、渦度方程式の解釈にも役立つ. まず鉛直断面に  
2114 おける流体粒子の運動による渦度  $\zeta \equiv u_{z^\epsilon} - w_{x^\epsilon}$  の Lagrange 擾乱は

$$2115 \quad \zeta_1''' = (u_z/(1+z''') - w_x + w_{z^\epsilon} z_x^\epsilon)_1'''$$

$$2116 \quad = u_{1z}''' - z_{1z}''' \bar{u}_{0z} - w_{1x}''', \quad (11.5)$$

2117 となる. ここで  $u_{z^\epsilon} = u_z/z_z^\epsilon = u_z/(1+z''')$  を使った. 渦度の Euler 擾乱を得るには式 (11.4) に  
2118  $A = \zeta$  を代入して

$$2119 \quad \zeta_1' = \zeta_1''' - z_1''' \bar{u}_{0zz}$$

$$2120 \quad = (u_1''' - z_1''' \bar{u}_0)_z - w_{1x}'''$$

$$2121 \quad = \psi_{xx} + \psi_{zz}, \quad (11.6)$$

2122 とすればよい. 2行目の導出には式 (11.5) を使った. またしても「Euler 擾乱を使えば」渦度と流  
2123 線関数の関係式をすっきりと書くことができるのである.

2124 さて渦度方程式を導くには、まず運動量の式 (11.1c)-(11.1d) のカールをとって圧力勾配項を消  
2125 去する。

$$2126 \quad (\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x)(u_{1z}''' - w_{1x}''') + \bar{u}_{0z} u_{1x}''' = 0, \quad (11.7)$$

2127 この式に厚さの式 (11.1a) を代入すると、

$$2128 \quad (\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) \underbrace{(u_{1z}''' - w_{1x}''' - z_{1z}''' \bar{u}_{0z})}_{\zeta_1''} = 0, \quad (11.8)$$

2129 という、渦度の Lagrange 擾乱  $\zeta_1'''$  の保存式が得られる。式 (11.8) に式 (11.6) の一行目を代入す  
2130 ると

$$2131 \quad (\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) \zeta_1' + \underbrace{(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) z_1''}_{w_1''} \bar{u}_{0zz} = 0, \quad (11.9)$$

2132 という、渦度の Euler 擾乱  $\zeta'$  の予報方程式が得られる。流線関数を使って式 (11.9) を書き直すと

$$2133 \quad (\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x)(\psi_{xx} + \psi_{yy}) - \psi_x \bar{u}_{0zz} = 0, \quad (11.10)$$

2134 となって Euler 平均系の渦度方程式とそっくりになるが、添字の  $x$  や  $z$  は鉛直 semi-Lagrange 座  
2135 標系における偏微分になっているので、例えば、境界条件として水面 ( $z = 0$ ) における流線関数の  
2136 値や勾配を具体的に記述したい場合には厳密に対処することができる。

## 2137 11.2 疑運動量と Kelvin の循環

2138 Euler 平均量の Taylor 近似式 (10.7a) を使うと、準 Stokes 流速を次のように書くことができる。

$$2139 \quad u_2^{qs} \equiv \hat{u}_2 - \bar{u}_2^\epsilon \\ 2140 \quad = [\overline{z_1''' u_1'''} - (z_1'''^2/2) \bar{u}_{0z}]_z. \quad (11.11)$$

2141 平均流の鉛直シアによる項が入ってきたのは、気側では平均流の強さを  $O(\alpha^0)$  と仮定しているか  
2142 らである。水側では平均流の強さはせいぜい  $O(\alpha^1)$  なので、式 (11.11) の鉛直シアに部分は考慮し  
2143 なくてよい。

2144 VL 疑運動量と準 Stokes 速度の関係を調べよう。

$$2145 \quad \underbrace{z_{1z}''' u_1''' - z_{1x}''' w_1'''}_{\text{VL pseudomomentum}} = -(\overline{z_1''' w_1'''})_x + \overline{z_{1z}''' u_1'''} + \overline{z_1''' w_{1x}'''} \\ 2146 \quad = -(\overline{z_1''' w_1'''})_x + (\overline{z_1''' u_1'''})_z + \overline{z_1''' (w_{1x}''' - u_{1z}''')} \\ 2147 \quad = -(\overline{z_1''' w_1'''})_x + [\overline{z_1''' u_1'''} - (z_1'''^2/2) \bar{u}_{0z}]_z + \overline{z_1''' (w_{1x}''' - u_{1z}''' + z_{1z}''' \bar{u}_{0z})} + (z_1'''^2/2) \bar{u}_{0zz}, \\ 2148 \quad = -(\overline{z_1''' w_1'''})_x + u_2^{qs} + \underbrace{[-z_1''' \zeta_1'' + (z_1'''^2/2) \bar{\zeta}_{0z}]}_{\text{VB pseudomomentum}}, \quad (11.12)$$

2149 風波は水平方向に一様であると考えてもよいので最後の行の一番目の項は消える。最後の行の二番  
2150 目の項は準 Stokes 速度で、三番目の項は本講義では VB (vorticity-based) 疑運動量と呼ぶことに  
2151 する \*7.3。

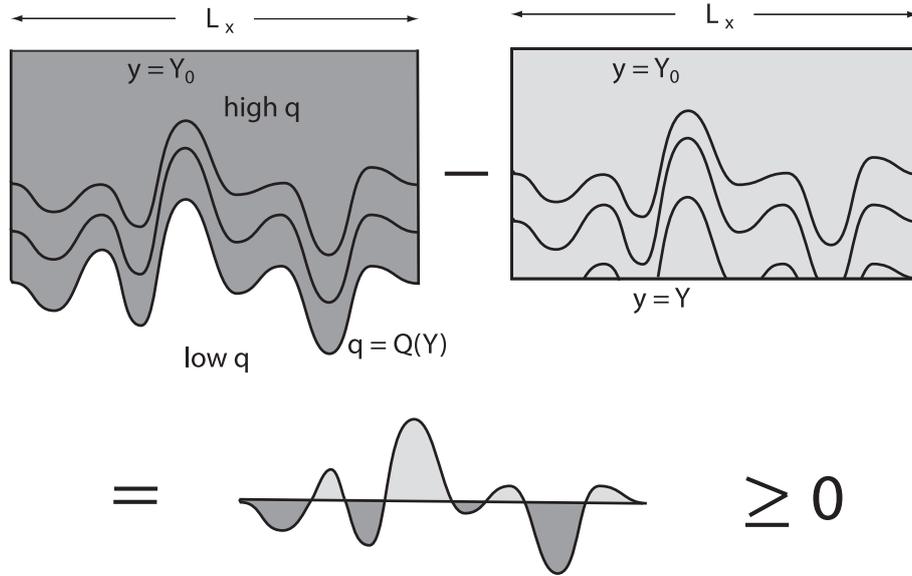


図 11.2: Nakamura and Zhu (2010) の図 1 からの転載. Kelvin の循環に基づく疑運動量の計算手順の説明. 設定は大気力学における西風ジェットの前圧不安定問題.

2152 重み付け平均と Euler 平均の関係式 (10.21a) に  $A = \zeta$  を代入すると、VB 疑運動量を積分形で  
2153 書くことができる。

$$2154 \quad \underbrace{-z_1''' \zeta_1''' + (\overline{z_1'''^2}/2) \zeta_{0z}}_{\text{VB pseudomomentum}} \simeq \int_z (\hat{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_2) dz, \quad (11.13)$$

2155 この式を使えば VB 疑運動量を Kelvin の循環になぞらえて解釈することができる。まず  $(x^\epsilon, z^\epsilon)$   
2156 面における高さ  $z^\epsilon$  より上の領域の Kelvin の循環を考えよう。この循環は  $L \int_{z^\epsilon} \langle \langle \zeta \rangle \rangle dz^\epsilon$  のように  
2157 書く事ができる。ここで  $\langle \langle A \rangle \rangle \equiv \int_{x^\epsilon - L/2}^{x^\epsilon + L/2} A dx^\epsilon / L$  は任意の物理量  $A$  の  $x^\epsilon$  方向の平均である。 $x^\epsilon$   
2158 方向の平均と時間平均との違いこそあるが、Kelvin の循環をとる領域を鉛直 semi-Lagrange 座標  
2159 系の  $z$  が一定の線に沿うようにしたのが  $\int_z \hat{\zeta} dz$  で Euler 座標系の  $z^\epsilon$  が一定の線に沿うようにした  
2160 のが  $\int_{z^\epsilon} \bar{\zeta} dz^\epsilon$  に対応する (図 3.2 参照)。このように二種類の方法で見積もった Kelvin の循環の  
2161 差をとったのが VB 疑運動量であると解釈することができる<sup>\*11.2</sup>。

2162 VB 疑運動量の実用的な話に移ろう。渦度の Lagrange 擾乱は式 (11.8) に従って保存するので、  
2163  $\zeta_1''' = 0$  がいつでも成り立つと考えることができる。その勢いで VB 疑運動量の第一項 (インパ  
2164 ルスの部分) は省略しても構わないが、そのまま残しておくべき2つの理由である。まず渦粘性やそ  
2165 の他の外力がある場合には  $\zeta''' \neq 0$  となる場合があり得るというのが1つ目の理由である。また過  
2166 去の論文ではしばしば、Euler 擾乱と Euler 平均を使って式 (11.13) の左辺は表したりしている。そ  
2167 の場合には  $\zeta' \neq 0$  であるというのが2つ目の理由である。例えば Scinocca and Shepherd (1992)

<sup>\*11.2</sup>Kelvin の循環に基づく VB 疑運動量の解釈は、大気力学における前圧不安定の分野で発達した (Shepherd, 1987; McIntyre and Shepherd, 1987; Ishioka and Yoden, 1996; Solomon and Nakamura, 2012)。図 11.2 は前圧渦度の分布を水平面内で積分する際の手順の説明であるが、これは本講義における鉛直断面内における積分手順の説明 (図 3.2) によく対応する。

2168 の式 (6.16) を本講義の記法で書き直すと

$$\begin{aligned}
2169 \quad A &= -\frac{g}{\rho_0 N^2} \rho' \zeta' - \frac{g^2 \rho'^2}{2\rho_0^2 N^4} \frac{d\bar{\zeta}^\epsilon}{dz^\epsilon} \\
2170 &\simeq -\overline{z_1''' \zeta_1'} - \overline{(z_1''^2/2)} \bar{\zeta}_{0z} \\
2171 &\simeq -\overline{z_1''' \zeta_1'''} + \overline{(z_1''^2/2)} \bar{\zeta}_{0z}, \tag{11.14}
\end{aligned}$$

2172 となる。シングルプライムは Euler 擾乱と表す。彼らは非静力内部重力波を考えているので、成  
2173 層による浮力振動数  $N = \sqrt{-g\bar{\rho}_{z^\epsilon}^\epsilon/\rho_0}$  が存在する。よく使われる密度面の高さとの関係  
2174 式  $z''' = -\rho'/\bar{\rho}_{z^\epsilon}^\epsilon = g\rho'/(\rho_0 N^2)$  を使って元の形に戻したのが式 (11.14) の二行目である。さらに  
2175 Euler 擾乱と Lagrange 擾乱の関係式 ( $\zeta_1' = \zeta_1''' - z_1''' \bar{u}_{0zz}$ ) を代入したのが式 (11.14) の三行目であ  
2176 り、本講義の VB 疑似運動量の定義と一致する。式 (11.14) の右辺第一項を渦度の Euler 擾乱で書  
2177 くか Lagrange 擾乱の書くかによって第二項の符号が変わってくるので、いろいろな論文で使われ  
2178 ている VB 疑似運動量を比較する時には注意が必要である。

### 2179 11.3 Taylor (1915) の恒等式

2180 VB 疑似運動量は Taylor (1915) の恒等式と深く関係している。Taylor (1915) の恒等式とは、一般  
2181 的な Rayleigh の不安定 (あるいは順圧不安定) が生じるための必要条件は、平均流のシアの勾配  
2182 の符号がどこかで逆転していることである、といった古典的な説明をする際に使われる式である。

2183 不安定によって発達した波のエネルギーは  $O(\alpha^2)$  に現れる。このオーダーにおける気側 ( $z > 0$ )  
2184 の平均流の運動量の式について考察する。Reynolds 応力項 (10.12) は、 $O(\alpha)$  の波が水平一様と仮  
2185 定されている事から、ゼロになる。

$$\begin{aligned}
2186 \quad \mathcal{RS}_2^u &= \overline{(z_z^\epsilon u'' u'')}_{2x} + \overline{(z_z^\epsilon \varpi'' u'')}_{2z} \\
2187 &= \overline{(z_z^\epsilon u'' u'')}_{2x} \\
2188 &= \overline{(u_1''' u_1''')}_{2x} \\
2189 &= 0, \tag{11.15}
\end{aligned}$$

2190 3行目の導出には式 (10.3b) と式 (10.21e) を使った。形状応力項は圧力擾乱に基づくオリジナルの  
2191 表現 (10.13) は

$$\begin{aligned}
2192 \quad \mathcal{FS}_2^u &= -\overline{z_{1z}''' p_{1x}'''} + \overline{z_{1x}''' p_{1z}'''} \\
2193 &= -\overline{(z_1''' p_{1x}''')}_{2z} + \overline{(z_1''' p_{1z}''')}_{2x} \\
2194 &= -\overline{(z_1''' p_{1x}''')}_{2z}, \tag{11.16a}
\end{aligned}$$

2195 となる。形状応力項の速度擾乱に基づく新しい表現 (10.17) は

$$\begin{aligned}
2196 \quad \mathcal{FS}_2^u &= -\overline{z_{1z}''' p_{1x}'''} + \overline{z_{1x}''' p_{1z}'''}, \\
2197 &= \overline{z_{1z}''' (\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) u_1'''} - \overline{z_{1x}''' (\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) w_1'''} \\
2198 &= (\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) \overline{(z_{1z}''' u_1''' - z_{1x}''' w_1''')} + \frac{1}{2} \overline{(u_1'''^2 + w_1'''^2)}_x \\
2199 &= \partial_t [u_2^{qs} + \underbrace{\overline{(-z_1''' \zeta_1''')} + \overline{(z_1''^2/2)} \bar{\zeta}_{0z}}_{\text{VB pseudomomentum}}], \tag{11.16b} \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{VL pseudomomentum}}
\end{aligned}$$

2200 となる。式 (11.16a) と式 (11.16b) の差をとってから気側で鉛直積分 ( $z = 0$  から  $z = \infty$  までの範  
2201 囲の積分) をとると Taylor の恒等式が得られる。

$$\begin{aligned}
2202 \quad \int_0^\infty \underbrace{[\partial_t(-z_1'''\zeta_1''') + \partial_t(z_1''''/2)\bar{\zeta}_{0z}]}_{\partial_t(\text{VB pseudomomentum})} dz &= - \int_0^\infty [(z_1'''\text{p}_{1x}'')_z + \partial_t u_2^{qs}] dz \\
2203 &= - \int_0^\infty \partial_t u_2^{qs} dz \\
2204 &= 0, \tag{11.17}
\end{aligned}$$

2205 2 行目と 3 行目の導出には (本章は本来は Miles の不安定による風波の生成を説明するのが主  
2206 旨ではあるが、しばし脱線して) 気側の下端で固定面になっていて水面に波がないと仮定した  
2207 ( $z'''|_{z=0} = \eta''' = 0$ )。いる。2 行目から 3 行目への導出には式 (11.11) を使った。式 (11.17) の左辺  
2208 の積分演算子の中の 2 つの項について、1 番目の項は非粘性の場合は渦度の Lagrange 擾乱がない  
2209  $\zeta_1''' = 0$  のでゼロになる。不安定波が発達するためには 2 番目の項の  $\bar{\zeta}_{0z} = \bar{u}_{0zz}$  の符号がどこかで  
2210 逆転してはなくてはならない。このように VB 疑運動量は Taylor(1915) の恒等式と関係としてい  
2211 るという側面がある。念を押しておくがこれは気側の下端が固定面になっている (水面波がない)  
2212 という風波の生成問題から脱線した仮定をおいた場合の話である。

## 2213 11.4 風波の気側のエネルギー収支

2214 さて風波の問題に戻って ( $z'''|_{z=0} = \eta''' \neq 0$ )、気側から水側への擾乱エネルギーの伝達過程を調  
2215 べよう。まず支配方程式 (11.1a)-(11.1d) を使って、気側の運動エネルギーと圧力フラックスの式  
2216 を導くと、

$$2217 \quad (\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) \frac{1}{2} (u_1'''^2 + w_1'''^2) = -u_1'''\text{p}_{1x}'' - w_1'''\text{p}_z''', \tag{11.18a}$$

$$\begin{aligned}
2218 \quad [z_1'''\text{p}_{1x}''']_z + [(z_{1z}'''\bar{u}_0 + u_1''')\text{p}_1''']_x &= z_{1t}'''\text{p}_{1z}'' + (z_{1z}'''\bar{u}_0 + u_1''')\text{p}_{1x}'' \\
2219 &= u_1'''\text{p}_{1x}'' + w_1'''\text{p}_{1z}'' - \bar{u}_0(z_{1x}'''\text{p}_{1z}'' - z_{1z}'''\text{p}_{1x}''), \tag{11.18b}
\end{aligned}$$

2220 となる。式 (11.18a)-(11.18b) の和をとって、擾乱が水平方向に一様だと仮定すると、

$$\begin{aligned}
2221 \quad \partial_t \frac{1}{2} \overline{(u_1'''^2 + w_1'''^2)} + \underbrace{[z_1'''\text{p}_{1x}''']_z}_{\text{air to water}} &= -\bar{u}_0 \mathcal{F} S_2 \\
2222 &= \bar{u}_0 \overline{(z_1'''\text{p}_{1x}'')_z} \\
2223 &= \overline{(\bar{u}_0 z_1'''\text{p}_{1x}'')_z} - \underbrace{\overline{\bar{u}_{0z} z_1'''\text{p}_{1x}''}}_{\text{production}} \\
2224 &= \overline{(\bar{u}_0 z_1'''\text{p}_{1x}'')_z} + \bar{u}_{0z} \overline{z_1'''} (\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) u_1''' \tag{11.19}
\end{aligned}$$

2225 が得られる。擾乱エネルギーの鉛直フラックス項は式 (11.19) の左辺と右辺に一つずつあるが、風  
2226 速は水面でゼロ ( $\bar{u}_0|_{z=0} = 0$ ) なので右辺のフラックス項は水側に擾乱エネルギーを伝達するこ  
2227 とができない。よって左辺の圧力フラックス  $\overline{z_1'''\text{p}_{1x}''}|_{z=0}$  が擾乱エネルギーを気側から水側へ伝達する  
2228 ことになる。

2229 式 (11.19) には形状応力によるエネルギー生成項があるが、一般的な Reynolds 応力によるエネ

2230 ルギ一生成項との関係を調べるために、 $u_1' \sim u_1''' - z_1''' \bar{u}_{0z}$  を代入すると、

$$\begin{aligned}
 2231 \quad \partial_t \frac{1}{2} (\overline{u_1'^2 + w_1'''^2}) + \underbrace{\overline{(z_1''' p_1''')}}_{\text{air to water}} &= \overline{(\bar{u}_{0z} z_1''' p_1''')} - \bar{u}_{0z} \overline{u_1''' (\partial_t + \bar{u}_{0z} \partial_x) z_1'''} \\
 2232 \quad &= \overline{(\bar{u}_{0z} z_1''' p_1''')} - \underbrace{\bar{u}_{0z} \overline{u_1''' w_1'''}}_{\text{production}}, \quad (11.20)
 \end{aligned}$$

2233 となる。式 (11.19) では Lagrange 擾乱に基づいて波 KE が定義されているのに対し、式 (11.20) で  
 2234 は Euler 擾乱に基づいて波 KE が定義されている。式 (11.20) の最後の行の第 2 項がシア生成項で  
 2235 ある。つまり気側では風の鉛直シアが正 ( $\bar{u}_{0z} > 0$ ) で、鉛直方向の Reynolds 応力が下向きであれ  
 2236 ば、シア生成項は正になる。これによって気側の擾乱 KE が発達し、下に向かって伝搬する。

## 2237 11.5 まとめ

- 2238 ● 本章は線形不安定 (i.e. 微小振幅擾乱の増幅) 問題を題材としているので、時間平均ではなく  
 2239  $x$  方向の平均を用いた方が整合的である。本章では波が  $x$  方向に一様であると仮定している  
 2240 ので、すべての式の時間平均記号をそのまま  $x$  方向の平均と読み替えればよい。
- 2241 ● 本章では GFD 的に新しい事を解説している訳ではないが、波と平均流に関する主要な概念を  
 2242 Lagrange 平均系で再説明する際に、手がかりとする関係式、注意すべき点を総括したつもり  
 2243 である。特に (i) 渦度を定義する時には必ず Euler 座標系における偏微分を使う事、(ii) Euler  
 2244 擾乱量と Lagrange 擾乱量を根気よく区別する事が重要である。
- 2245 ● VL 疑運動量は準 Stokes 速度と VB 疑運動量の和として書く事ができる。平均流に強いシア  
 2246 がある場合には、Euler 平均量の Taylor 近似式 (5.24) を頼りにする。
- 2247 ● Lagrange 座標系で Taylor (1915) の恒等式の考察するには、形状応力項には 2 種類の表現が  
 2248 あることを利用する。即ち圧力擾乱に基づく表現 (11.16a) と速度擾乱に基づく表現 (11.16b)  
 2249 である。後者は VB 疑運動量と関係する。形状応力項の 2 種類の表現を利用するという事は、  
 2250 Lagrange 座標系における直接型の運動量の式と変形型の運動量の式の差をとると VL 疑運動  
 2251 量 (あるいは GL 疑運動量) の時間発展式が得られる事と関係する (第 7 章)。
- 2252 ● 図 3.2 と式 (5.24) に関して本講義で繰り返し説明したことを振り返ると次のようになる。(i)  
 2253 図 3.2 の色が塗られた部分で密度  $\rho$  の積分をとると、式 (3.23a)-(3.23b) や (5.27) に示したと  
 2254 おり、擾乱 PE が得られる。(ii) 図 3.2 の色が塗られた部分で水平速度  $\mathbf{V}$  の積分をとると、式  
 2255 (5.29) に示したとおり、準 Stokes 流線関数が得られる。(iii) 図 3.2 の色が塗られた部分で渦  
 2256 度  $\zeta$  の積分をとると、式 (11.13) に示したとおり、VB 疑運動量が得られる。

## 第12章 粘性がある場合

風波の水側では、乱流粘性による波の減衰に伴って、波の運動量が表層流に渡される (図 12.1)。本章では粘性項に対する Lagrange 平均手法を説明する。

### 12.1 風波の水側のエネルギー収支

風波の水側の運動を考察する。波は  $x$  方向に進行し、位相速度を  $\omega/k$ 、水面の傾き表す無次元パラメーターを  $\alpha \ll 1$  とする。水側の平均流 (Ekman 流や吹送流) の強さのスケールは高々  $\alpha(\omega/k)$  であると仮定する。運動方程式 (10.5a)-(10.5d) の擾乱成分の摂動展開を考えると、鉛直 semi-Lagrange 座標系における  $O(\alpha)$  の支配方程式は、

$$z_{zt}''' + u_x''' = 0, \quad (12.1a)$$

$$z_t''' = w''', \quad (12.1b)$$

$$u_t''' = -(p_1''' + g\eta_1''')_x + \underbrace{[\nu(2u_x''')]_x + [\nu(u_z''' + w_x''')]_z}_{(F^u)'''}, \quad (12.1c)$$

$$w_t''' = -p_z''' + \underbrace{[\nu(w_x''' + u_z''')]_x + [\nu(2w_z''')]_z}_{(F^w)'''}, \quad (12.1d)$$

となる。本章では粘性係数  $\nu$  が鉛直方向に変化できると仮定している。これが式 (10.23a)-(10.23d) との違いである。式 (12.1a)-(12.1d) を使って波のエネルギー収支式を導くと、

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2}(u'''^2 + w'''^2) \right]_t + [z_t'''(p_1''' + g\eta_1''')]_z \\ &= \underbrace{u'''\{[\nu(2u_x''')]_x + [\nu(u_z''' + w_x''')]_z\}}_{(F^u)'''} + \underbrace{w'''\{[\nu(w_x''' + u_z''')]_x + [\nu(2w_z''')]_z\}}_{(F^w)'''} \\ &= [\nu u'''\{u_z''' + w_x'''\}]_z + \nu 2 \overline{w'''\{w_z'''\}}_z - \nu [2u_x'''^2 + 2w_z'''^2 + (u_z''' + w_x''')^2] \\ &= [\nu u'''\{u_z''' + w_x'''\}]_z - \nu 2 \overline{w'''\{u_x'''\}}_z - \nu [4u_x'''^2 + (u_z''' + w_x''')^2], \\ &= \underbrace{[\nu u'''\{u_z''' + 3w_x'''\}]_z}_{\text{FluxDiv}} - \underbrace{\nu [4u_x'''^2 + (u_z''' + w_x''')^2]}_{\text{Dissipation}}, \end{aligned} \quad (12.2)$$

となる。3行目からは3次元乱流の研究分野でよくやられるように粘性によるフラックス発散項と消散項に書き直してある。波は乱流粘性によって減衰しつつ、水面から風のエネルギーを貰って発達する。水面を通り抜けて入ってくるエネルギーフラックスは、式 (12.2) の左辺と右辺の鉛直フラックスを参照して、

$$\text{wave energy input} = [-\overline{\eta_t'''} p_1'''] + \overline{\nu u'''\{u_z''' + 3w_x'''\}}]_{z=\bar{\eta}}, \quad (12.3)$$

となる。第11章で言及したように、圧力フラックス  $-\overline{\eta_t'''} p_1'''$  が主成分である。波のエネルギーの式 (12.2) は式 (10.15b) を簡単化  $[\overline{z_z^c A'' B''} \simeq \overline{A'' B''}]$ 、式 (10.21e) を参照することによって導く事もできる。

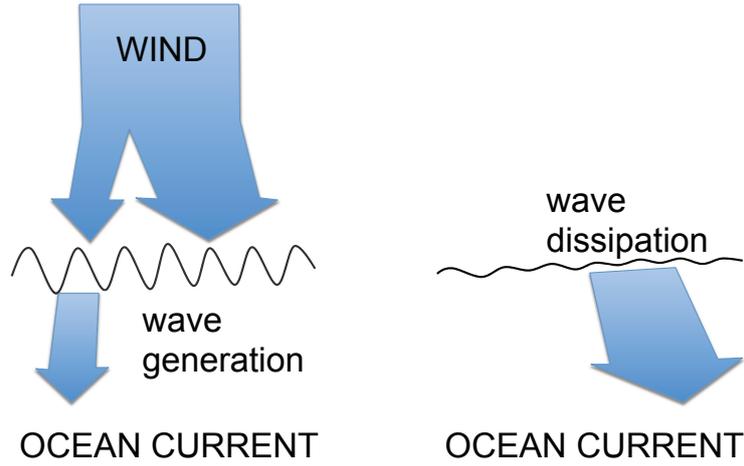


図 12.1: 風から水面波と海洋側の表層流への運動量伝達の模式図.

## 12.2 直接型の運動量方程式の粘性項 (AG12)

本節では第 10 章で紹介した式 (10.27a)-(10.27b) がどのように導出されたのかを説明する。  
 $z_z^\epsilon$  で重み付けされた粘性項の式 (10.7a) の時間平均をとると、

$$\begin{aligned}
 \hat{F}^u &= \overline{z_z^\epsilon F^u} \\
 &= \overline{[\nu(u_{z^\epsilon} + w_{x^\epsilon}) - z_x^{\prime\prime\prime} \nu(2u_{x^\epsilon})]_z}, \\
 &= \overline{[\nu(u_z/z_z^\epsilon + w_x - z_x^\epsilon w_{z^\epsilon}) - z_x^\epsilon \nu(2u_{x^\epsilon})]_z} \\
 &= \overline{[\nu(u_z - z_z^{\prime\prime\prime} u_z^{\prime\prime\prime} - z_x^{\prime\prime\prime} w_z^{\prime\prime\prime}) - z_x^{\prime\prime\prime} \nu(2u_x^{\prime\prime\prime})]_z} \\
 &= [\nu \bar{u}_z + \nu(-z_z^{\prime\prime\prime} u_z^{\prime\prime\prime} + z_x^{\prime\prime\prime} w_z^{\prime\prime\prime})]_z \\
 &= [\nu \hat{u}_z + \nu(-z_{zz}^{\prime\prime\prime} u_z^{\prime\prime\prime} - 2z_z^{\prime\prime\prime} u_z^{\prime\prime\prime} + z_x^{\prime\prime\prime} w_z^{\prime\prime\prime})]_z \\
 &= [\nu \hat{u}_z + \nu(-3z_z^{\prime\prime\prime} u_z^{\prime\prime\prime} + z_x^{\prime\prime\prime} w_z^{\prime\prime\prime})]_z \\
 &= [\nu \hat{u}_z - \nu z_z^{\prime\prime\prime} (3u_z^{\prime\prime\prime} + w_x^{\prime\prime\prime})]_z, \tag{12.4}
 \end{aligned}$$

となる。5 行目の導出は  $u_x^{\prime\prime\prime} + w_z^{\prime\prime\prime} = 0$  を使い、6 行目の導出は  $\hat{u} = \bar{u} + \overline{z_z^{\prime\prime\prime} u_z^{\prime\prime\prime}}$  を使い、7 行目の導出には  $z_z^{\prime\prime\prime} = u_z^{\prime\prime\prime}(k/\omega)$  を使い<sup>\*12.1</sup>、最後の行の導出には  $z_t^{\prime\prime\prime} = w_z^{\prime\prime\prime}$  を使った。式 (12.4) の最後の行は重み付け平均速度の鉛直微分に基づいているが、Euler 平均速度の鉛直微分に書き換えることができる。

$$\begin{aligned}
 \hat{F}^u &= [\nu \hat{u}_z - \nu z_z^{\prime\prime\prime} (3u_z^{\prime\prime\prime} + w_x^{\prime\prime\prime})]_z \\
 &= [\nu \hat{u}_z - \nu (3z_z^{\prime\prime\prime} u_z^{\prime\prime\prime} + z_x^{\prime\prime\prime} w_x^{\prime\prime\prime})]_z \\
 &= [\nu \bar{u}_z + \nu (z_{zz}^{\prime\prime\prime} u_z^{\prime\prime\prime} - z_z^{\prime\prime\prime} u_z^{\prime\prime\prime} + z_x^{\prime\prime\prime} u_{zz}^{\prime\prime\prime} - z_x^{\prime\prime\prime} w_{xz}^{\prime\prime\prime})]_z \\
 &= [\nu \bar{u}_z + \nu z_z^{\prime\prime\prime} (u_z^{\prime\prime\prime} - w_x^{\prime\prime\prime})]_z, \tag{12.5}
 \end{aligned}$$

2 行目の導出には  $z_t^{\prime\prime\prime} = w_z^{\prime\prime\prime}$  を使い、3 行目の導出には  $\hat{u} = \bar{u} + \overline{z_z^{\prime\prime\prime} u_z^{\prime\prime\prime}}$  を使い、最後の行の導出には  $z_z^{\prime\prime\prime} = u_z^{\prime\prime\prime}(k/\omega)$  を使った。式 (12.4) や式 (12.5) を直接型の運動量の式 (10.10a) に代入し

<sup>\*12.1</sup>  $z_{zz}^{\prime\prime\prime} u_z^{\prime\prime\prime} = u_z^{\prime\prime\prime}(k/\omega) u_z^{\prime\prime\prime} = u_z^{\prime\prime\prime} z_z^{\prime\prime\prime}$ .

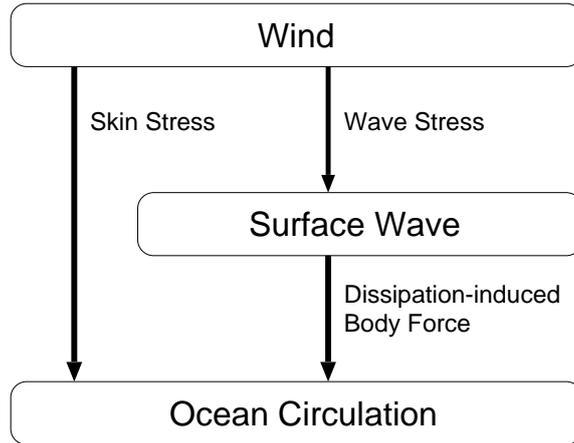


図 12.2: 風から水面波と海洋側の表層流への運動量伝達の模式図. Aiki and Greatbatch (2013b).

2305 て、波や平均流が水平一様であると仮定すると、

$$\begin{aligned}
 2306 \quad \partial_t \hat{u} + f \hat{v} &= \partial_z [-z''' (\overline{p''''} + g \overline{\eta''''})_x + \nu \hat{u}_z - \nu z_z''' (3 \overline{u_z''''} + \overline{w_x''''})] \\
 2307 \quad &= \partial_z [-z''' (\overline{p''''} + g \overline{\eta''''})_x + \nu \overline{u_z^\epsilon} + \nu z_z''' (\overline{u_z''''} - \overline{w_x''''})_z], \quad (12.6)
 \end{aligned}$$

2308 となる。水面そのもの (i.e. 薄い粘性境界層の上) における境界条件を議論する場合には式 (12.6)  
 2309 の 1 行目を使う。なぜならば 2 行目の Euler 平均速度は、あくまでも Taylor 近似量なので、実際  
 2310 に実験などで計測したりするには向いてからである。2 行目の表現は薄い粘性境界層の底より下  
 2311 側の渦なし領域を考察する時に使う。式 (12.6) の 1 行目によると、水面を通過して気側 (風) から  
 2312 水側 (波と表層流) に与えられる運動量フラックス (i.e. 応力) の総量は

$$2313 \quad \text{total surface stress} = [-\overline{\eta'''' p_x''''} - \overline{\nu z_z''' (3 \overline{u_z''''} + \overline{w_x''''})} + \nu \hat{u}_z]_{z=\bar{\eta}}, \quad (12.7)$$

2314 となる。式 (12.7) は気側が感じる底摩擦応力と解釈することもできる。

2315 薄い粘性境界層の底より下側における平均流の運動量収支を考察する。鉛直断面内の運動が渦な  
 2316 しであると仮定できるので、平均流の運動量の式 (12.6) の 2 行目の  $(\overline{v_z''''} - \overline{w_x''''})_z$  がゼロになる。こ  
 2317 の式の予報変数は重み付け平均速度であるのに、粘性項は Euler 平均速度に対して働くということ  
 2318 が分かる。粘性係数が鉛直一様ならば、第 9 章で示したように、式 (12.6) の形状応力項は (薄い粘  
 2319 性境界層の底より下では) ゼロになる。現実的には、粘性係数は鉛直一様ではないので、形状応力  
 2320 項の鉛直構造をどのように見積もるか考える必要がある。

### 2321 12.3 変形型の運動量方程式の粘性項 (AG13b)

2322 本節では第 10 章で紹介した式 (10.28a)-(10.28b) がどのように導出されたのかを説明する。

2323 重み付け平均速度 (i.e. Lagrange 平均速度) は平均流と波の運動量の和に対応する。前節では重  
 2324 み付け平均速度の時間発展方程式 (12.6) を考えたので、気側から水側への総応力だけを考えればよ  
 2325 かった。式 (12.7) の運動量フラックスは、風から水面波への運動量フラックス (i.e. 波応力) と風  
 2326 から水側の表層流への運動量フラックス (i.e. スキン応力) の和として解釈することができる (Fan

2327 et al., 2010; Donelan et al., 2012)。

$$2328 \quad \text{wave stress} \equiv (\text{wave energy input})(k/\omega) \\ 2329 \quad = [-\overline{\eta''''p_x'''} + \overline{\nu z_z'''(u_z'''' + 3w_x''')}]|_{z=\bar{\eta}}, \quad (12.8a)$$

$$2330 \quad \text{skin stress} \equiv (\text{total surface stress}) - (\text{wave stress}) \\ 2331 \quad = [\nu \hat{u}_z - 4\nu \overline{z_z'''(u_z'''' + w_x''')}]|_{z=\bar{\eta}}, \quad (12.8b)$$

2332 波応力は、風から水側の波に与えられるエネルギーフラックス [式 (12.3)] を波の位相速度で割った  
2333 物理量として定義される。波応力とスキン応力のそれぞれは水面  $z = \bar{\eta}$  (i.e. 薄い粘性境界層の上  
2334 端) にて定義される。

2335 次に変形型の運動量の式 (10.18a) の最後の 2 項を擾乱の 2 次の積についての精度で計算すると、

$$2336 \quad -\overline{z_z'''(Fu)''''} + \overline{z_x'''(Fw)''''} = \overline{[u''''(Fu)'''' + w''''(Fw)'''']}(-k/\omega) \\ 2337 \quad = \underbrace{\overline{[\nu u''''(u_z'''' + 3w_x''')]}_z}_{\text{FluxDiv}}(-k/\omega) - \underbrace{\overline{\nu[4u_x''''^2 + (u_z'''' + w_x''')^2]}_z}_{\text{Dissipation}}(-k/\omega) \\ 2338 \quad = [-\nu \overline{z_z'''(u_z'''' + 3w_x''')}]_z + \underbrace{\overline{\nu[4u_x''''^2 + (u_z'''' + w_x''')^2]}_z}_{\text{Dissipation}}(k/\omega), \quad (12.9)$$

2339 のように、波のエネルギーの式 (12.2) の粘性項に  $-k/\omega$  を掛けた表現になる。式 (12.9) の導出に  
2340 は、式 (12.1a)-(12.1b) に基づいて、 $-\omega z_z'''' + k u'''' = 0$  と  $z_x'''' = -(k/\omega) z_t'''' = -(k/\omega) w''''$  を使った。  
2341 式 (12.9) と (12.4) を変形型の運動量の式 (10.18a) に代入して、波や平均流が水平一様であると仮  
2342 定すると、

$$2343 \quad \partial_t(\bar{u} + \overline{w''''z_x''''}) + f\bar{v} = \hat{F}^u - \overline{z_z'''(Fu)''''} + \overline{z_x'''(Fw)''''} \\ 2344 \quad = [\nu \hat{u}_z - 4\nu \overline{z_z'''(u_z'''' + w_x''')}]_z + \underbrace{\overline{\nu[4u_x''''^2 + (u_z'''' + w_x''')^2]}_z}_{\text{Dissipation}}(k/\omega), \quad (12.10)$$

2345 となる。変形型の運動量の方程式の粘性項はもはやフラックス発散型で書けないという特徴がある  
2346 なる。式の (12.10) の最後の項は符号は波の位相速度の符号に等しい。この項は (乱流粘性  $\nu$  による)  
2347 波の消散にともなって波の運動量が表層流に伝達されることを示している (図 12.2)。

2348 薄い粘性境界層の底より下側における平均流の運動量収支を考察する。鉛直断面内の運動が渦な  
2349 し ( $u_z'''' - w_x'''' = 0$ ) の条件を使って、式 (12.10) を書き直すと

$$2350 \quad \partial_t \bar{u}^e + f\bar{v} = [\nu \hat{u}_z - 8\nu \overline{z_z''''u_z''''}]_z + \underbrace{\overline{4\nu[u_x''''^2 + u_z''''^2]}_z}_{\text{Dissipation}}(k/\omega) \\ 2351 \quad = [\nu \hat{u}_z - 2\nu(\overline{z_z''''u_z''''} + 3\overline{z_z''''u_z''''})]_z + 4\nu[\overline{k\omega z_z''''^2 + z_z''''u_z''''}] \\ 2352 \quad = [\nu \hat{u}_z - 2\nu(\overline{z_z''''u_z''''} + 2\overline{z_z''''u_z''''} + \overline{z_z''''u_z''''})]_z + 4\nu[\overline{z_z''''u_z''''} + \overline{z_z''''u_z''''}] \\ 2353 \quad = [\nu(\hat{u} - 2u^{qs})_z]_z + \nu[4\overline{z_z''''u_z''''}]_z \\ 2354 \quad = [\nu(\bar{u}^e - u^{qs})_z]_z + \nu u_{zz}^{qs}, \quad (12.11)$$

2355 となる。2 行目の導出には  $z_z'''' = u''''(k/\omega)$  を使い<sup>\*12.1</sup>、3 行目の導出には  $u_z'''' = w_x'''' = k\omega z''''$  を使  
2356 い<sup>\*12.2</sup>、4 行目の導出には  $u^{qs} = \overline{(z''''u''')}_z$  を使った。式 (12.11) は粘性係数が鉛直方向に変化する場  
2357 合にも成り立つ。式 (12.11) の予報変数は Euler 平均速度になっている。つまり表層流だけの運動量

<sup>\*12.2</sup>  $\overline{z_z''''u_z''''} = \overline{z_z''''(k\omega)z''''} = \overline{u_z''''z''''}$

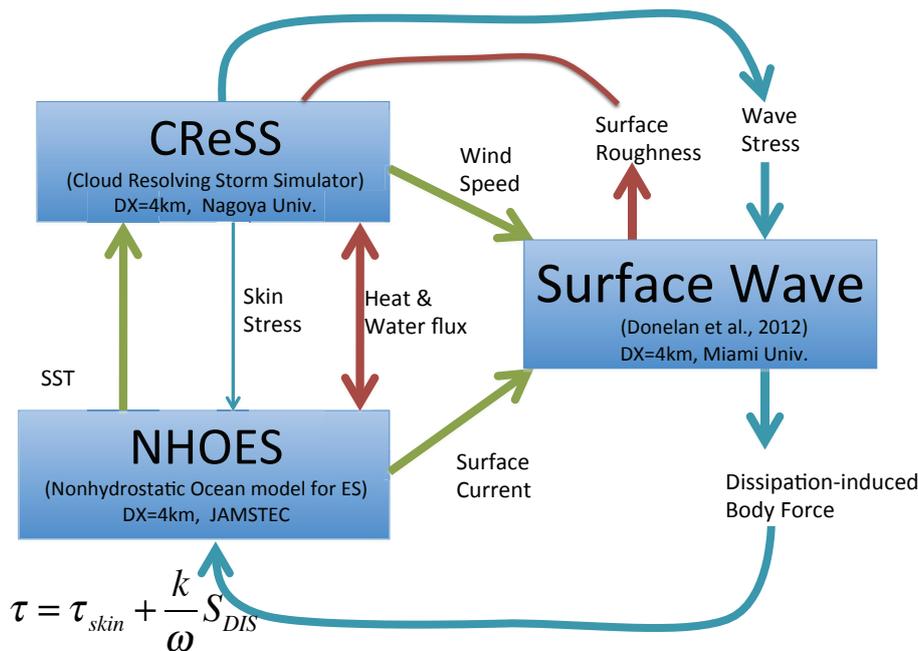


図 12.3: 大気・海洋・波浪結合モデルにおける各種交換量の模式図。

2358 に対応する。式 (12.11) の最後の行の第 1 項は、乱流粘性による運動量の鉛直フラックスの発散を表  
 2359 す。対称領域の上端 (i.e. 薄い粘性境界層の底) における境界条件は  $\nu \partial_z (\bar{u}^\epsilon - u^{qs})|_{z=\bar{\eta}-\delta} = \text{skin stress}$   
 2360 となる\*12.3。記号  $\delta \sim \sqrt{\nu/\omega}$  は薄い粘性境界層の厚さである。式 (12.11) の最後の項は波の消散に  
 2361 ともなつて波の運動量が表層流に伝達されることを示す。式 (10.24a)-(10.24f) の解析解を考えた場  
 2362 合、粘性解は粘性境界層の底より下側では殆どゼロであるので、薄い粘性境界層の中でしか粘性が  
 2363 働かないかのように錯覚してしまう。実際にはその逆で、エネルギー収支の式 (12.2) や運動量収  
 2364 支の式 (12.10)-(12.11) の水深積分を考えた場合、(薄い粘性境界層の中での消散は境界層の厚さが  
 2365 薄すぎるので殆ど寄与せず) 薄い粘性境界層の底より下側全体において非粘性解が粘性を感じる効  
 2366 果によって、エネルギー消散率の水深積分量が決まる (Phillips, 1977)。

## 2367 12.4 まとめ

- 2368 ● 変形型運動量方程式の粘性項はもはやフラックス発散型で書く事ができない。実はそれが利  
 2369 点であったりする。
- 2370 ● 風波の発達と消散を経由した風から海流への運動量伝達過程は、最近の大気・海洋・波浪結  
 2371 合モデルに試験的に導入されている (図 12.3)。
- 2372 ● 薄い粘性境界層が薄くない時には理論の修正が必要である。

\*12.3 風が全く吹いていない場合にはスキン応力がゼロになるので、 $\partial_z \bar{u}^\epsilon|_{z=\bar{\eta}-\delta} = \partial_z u^{qs}|_{z=\bar{\eta}-\delta}$  になる。これは Longuet-Higgins (1953) の実験結果と整合する。Longuet-Higgins (1953) は風がない状態の水槽内の波を観察し、水面近くの Lagrange 平均速度の鉛直勾配が Stokes ドリフト速度の鉛直勾配の 2 倍 (i.e.  $\partial_z \bar{u}^L = 2 \partial_z \epsilon u^{Stokes}$  すなわち  $\partial_z \epsilon \bar{u}^\epsilon = \partial_z \epsilon u^{Stokes}$ ) になっていることを発見した。

- 2373 • 鉛直 semi-Lagrange 座標系における直接型の運動量の式 (10.10a) の粘性項  $\hat{F}^V$  は、3次元  
2374 semi-Lagrange 座標系における式 (6.12) の  $\bar{Q}_j^L$  に対応する。
- 2375 • 鉛直 semi-Lagrange 座標系における変形型の運動量の式 (10.10a) の粘性項  $-\overline{z''''(F^V)''''} +$   
2376  $\overline{(\nabla z'''')(F^w)''''}$  は、3次元 semi-Lagrange 座標系における式 (7.8) の  $\xi_{j,i} \bar{Q}_j^L$  に対応する。

## 2377 12.5 追記 (Pierson, 1962)

2378 3次元 Lagrange 座標系の微分演算子で粘性項を表すとどうなるのか考察したのが Pierson (1962)  
2379 である。その結果は 1960 年代から 1980 年代にかけて風波の分野でよく使われていた (Madsen,  
2380 1978; Jenkins, 1986)。Pierson (1962) の手法の特徴は

- 2381 • 3次元 Lagrange (1788) 座標系を使った。
- 2382 • 直接型と変形型の運動量の方程式のそれぞれを摂動展開を用いて表した。
- 2383 • 粘性係数は鉛直一様とした。
- 2384 • 平均流の強さは  $\|\alpha^2(\omega/k)\|$  とした。

2385 である。AM78 の 3次元 semi-Lagrange 座標系の運動方程式についても「摂動展開を導入しさえ  
2386 すれば」、Pierson (1962) と同じように粘性項を展開する事ができるはずである。しかし AM78 の  
2387 論文では粘性項を外力に一部と見なす程度で詳細な説明は行っていない。おそらく、摂動展開を  
2388 導入してしまうと AM78 の体系の「有限振幅への適用」という看板に傷がつくし、そこまでして  
2389 Pierson (1962) の焼き直しをしても旨味がなかったことが伺える。

2390 波は  $x$  方向に進行すると仮定し、直接型と変形型の運動量の式 (7.4a)-(7.4b) をもう一度書くと、

$$2391 \begin{pmatrix} x_{tt}^\epsilon - Q^u \\ z_{tt}^\epsilon - Q^w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_a^\epsilon & z_a^\epsilon \\ x_c^\epsilon & z_c^\epsilon \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_a \\ p_c \end{pmatrix}, \quad (12.12a)$$

$$2392 \begin{pmatrix} x_a^\epsilon & z_a^\epsilon \\ x_c^\epsilon & z_c^\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{tt}^\epsilon - Q^u \\ z_{tt}^\epsilon - Q^w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p_a \\ p_c \end{pmatrix}. \quad (12.12b)$$

2393 となる。 $(x^\epsilon, z^\epsilon)$  は各流体粒子の瞬間的な位置、 $(a, c)$  は各流体粒子の初期位置である (第7章)。  
2394 Euler 座標系における流体粒子の位置を摂動展開する。

$$2395 \begin{pmatrix} x^\epsilon \\ z^\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_1^\epsilon \\ z_1^\epsilon \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} x_2^\epsilon \\ z_2^\epsilon \end{pmatrix} + O(\alpha^3), \quad (12.13)$$

2396 式 (12.13) の物質微分 (つまり Lagrange 座標系における時間微分  $\partial_t$ ) をとると、速度の摂動展開が  
2397 得られる。

$$2398 \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_{1t}^\epsilon \\ z_{1t}^\epsilon \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} x_{2t}^\epsilon \\ z_{2t}^\epsilon \end{pmatrix} + O(\alpha^3), \quad (12.14)$$

2399 が得られる。式 (12.14) の Lagrange 平均をとると、

$$2400 \begin{pmatrix} \bar{u}^\mathcal{L} \\ \bar{w}^\mathcal{L} \end{pmatrix} = \alpha^2 \begin{pmatrix} \overline{x_{2t}^\epsilon}^\mathcal{L} \\ \overline{z_{2t}^\epsilon}^\mathcal{L} \end{pmatrix} + O(\alpha^3), \quad (12.15)$$

2401 となる。Pierson (1962) に倣って平均流の強さは  $O(\alpha^2)$  とした。連鎖律の式 (7.3b) を摂動展開す  
 2402 るには式 (12.13) を使って

$$2403 \quad \begin{pmatrix} \partial_a \\ \partial_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha x_{1a}^\epsilon & \alpha z_{1a}^\epsilon \\ \alpha x_{1c}^\epsilon & 1 + \alpha z_{1c}^\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x^\epsilon} \\ \partial_{z^\epsilon} \end{pmatrix} + O(\alpha^3) \quad (12.16)$$

2404 とする。この変換行列の行列式

$$2405 \quad J \equiv 1 + \alpha(x_{1a}^\epsilon + z_{1c}^\epsilon) + O(\alpha^2) \quad (12.17)$$

2406 は Lagrange 座標系の制御要素の体積を表す (第 6 章)。特に Lagrange (1788) の座標系の場合は、  
 2407 その瞬間値が 1 のまま変化しないので、 $O(\alpha)$  での非圧縮の式が得られる。

$$2408 \quad x_{1a}^\epsilon + z_{1c}^\epsilon = 0, \quad (12.18)$$

2409 連鎖律の式 (12.16) の両辺に逆行列をかけると、

$$2410 \quad \begin{pmatrix} \partial_a \\ \partial_c \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 1 + \alpha z_{1c}^\epsilon & -\alpha z_{1a}^\epsilon \\ -\alpha x_{1c}^\epsilon & 1 + \alpha x_{1a}^\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_a \\ \partial_c \end{pmatrix} + O(\alpha^3)$$

$$2411 \quad = \begin{pmatrix} \partial_a \\ \partial_c \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} x_{1a}^\epsilon \partial_a + z_{1a}^\epsilon \partial_c \\ x_{1c}^\epsilon \partial_a + z_{1c}^\epsilon \partial_c \end{pmatrix} + O(\alpha^3) \quad (12.19)$$

2412 となる。2 行目への変形は  $J = 1$  と非圧縮の式 (12.18) を使った。

2413 次に式 (12.12a)-(12.12b) の粘性項を

$$2414 \quad Q^A = \alpha Q_1^A + \alpha^2 Q_2^A + O(\alpha^3), \quad (12.20)$$

2415 のように摂動展開する。式 (12.19) と式 (12.20) を直接型の運動量の式 (12.12a) に代入して、 $O(\alpha^2)$   
 2416 の項を取り出すと

$$2417 \quad \begin{pmatrix} x_{2tt}^\epsilon - Q_2^u \\ z_{2tt}^\epsilon - Q_2^w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p_{2a} \\ p_{2c} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{1a}^\epsilon & z_{1a}^\epsilon \\ x_{1c}^\epsilon & z_{1c}^\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_a p_1 \\ \partial_c p_1 \end{pmatrix}, \quad (12.21)$$

2418 となる。一方、式 (12.13) と式 (12.20) を変形型の運動量の式 (12.12b) に代入して、 $O(\alpha^2)$  の項を  
 2419 取り出すと

$$2420 \quad \begin{pmatrix} x_{2tt}^\epsilon \\ z_{2tt}^\epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{1a}^\epsilon & z_{1a}^\epsilon \\ x_{1c}^\epsilon & z_{1c}^\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1tt}^\epsilon \\ z_{1tt}^\epsilon \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_2^u \\ Q_2^w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{1a}^\epsilon & z_{1a}^\epsilon \\ x_{1c}^\epsilon & z_{1c}^\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^u \\ Q_1^w \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p_{2a} \\ p_{2c} \end{pmatrix} \quad (12.22)$$

2421 となる。Pierson (1962) は粘性係数  $\nu$  を固定値と見なしたので、粘性項  $Q^A$  を

$$2422 \quad Q^A = \nu(\partial_{x^\epsilon x^\epsilon} + \partial_{z^\epsilon z^\epsilon})A, \quad (12.23)$$

2423 のような Euler 座標系における Laplace 型の微分で書く。Euler 座標系における 2 階の偏微分を  
 2424 Lagrange 座標系における偏微分で表すには、式 (12.19) を使って、

$$2425 \quad \begin{pmatrix} \partial_{x^\epsilon x^\epsilon} \\ \partial_{z^\epsilon z^\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\partial_a - \alpha x_{1a}^\epsilon \partial_a - \alpha z_{1a}^\epsilon \partial_c]^2 \\ [\partial_c - \alpha x_{1c}^\epsilon \partial_a - \alpha z_{1c}^\epsilon \partial_c]^2 \end{pmatrix} + O(\alpha^3)$$

$$2426 \quad = \begin{pmatrix} \partial_{aa} \\ \partial_{cc} \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} x_{1aa}^\epsilon \partial_a + z_{1aa}^\epsilon \partial_c + 2x_{1a}^\epsilon \partial_{aa} + 2z_{1a}^\epsilon \partial_{ac} \\ x_{1cc}^\epsilon \partial_a + z_{1cc}^\epsilon \partial_c + 2x_{1c}^\epsilon \partial_{ac} + 2z_{1c}^\epsilon \partial_{cc} \end{pmatrix} + O(\alpha^3) \quad (12.24)$$

2427 とする。式 (12.24) を式 (12.23) に代入すると

$$2428 \quad Q_1^A = \nu(\partial_{aa} + \partial_{cc})A_1, \quad (12.25a)$$

$$2429 \quad Q_2^A = \nu(\partial_{aa} + \partial_{cc})A_2 - \nu[(x_{1aa}^\epsilon + x_{1cc}^\epsilon)\partial_a + (z_{1aa}^\epsilon + z_{1cc}^\epsilon)\partial_c +$$
$$2430 \quad 2x_{1a}^\epsilon\partial_{aa} + 2(z_{1a}^\epsilon + x_{1c}^\epsilon)\partial_{ac} + 2z_{1c}^\epsilon\partial_{cc}]A_1, \quad (12.25b)$$

2431 のように、摂動展開された粘性項の式 (12.20) の具体的な表現が得られる。

## 2432 関連図書

- 2433 Aiki, H., and R. J. Greatbatch, Thickness-weighted mean theory for the effect of surface gravity  
2434 waves on mean flows in the upper ocean, *J. Phys. Oceanogr.*, *42*, 725–747, 2012.
- 2435 Aiki, H., and R. J. Greatbatch, The vertical structure of the surface wave radiation stress  
2436 on circulation over a sloping bottom as given by thickness-weighted-mean theory, *J. Phys.*  
2437 *Oceanogr.*, *43*, 149–164, 2013a.
- 2438 Aiki, H., and R. J. Greatbatch, A new expression for the form stress term in the vertically  
2439 Lagrangian mean framework for the effect of surface waves on the upper ocean circulation, *J.*  
2440 *Phys. Oceanogr.*, *43*, in press, 2013b.
- 2441 Aiki, H., and K. J. Richards, Energetics of the global ocean: the role of layer-thickness form  
2442 drag, *J. Phys. Oceanogr.*, *38*, 1845–1869, 2008.
- 2443 Aiki, H., and T. Yamagata, Energetics of the layer-thickness form drag based on an integral  
2444 identity, *Ocean Science*, *2*, 161–171, 2006.
- 2445 Aiki, H., T. Jacobson, and T. Yamagata, Parameterizing ocean eddy transports from surface  
2446 to bottom, *Geophys. Res. Lett.*, *31*, L19,302, 2004.
- 2447 Aiki, H., J. P. Matthews, and K. G. Lamb, Modeling and energetics of nonhydrostatic wave  
2448 trains in the Lombok Strait: impact of the Indonesian throughflow, *J. Geophys. Res.*, *116*,  
2449 C03023, 2011a.
- 2450 Aiki, H., K. J. Richards, and H. Sakuma, Maintenance of the mean kinetic energy in the global  
2451 ocean by the barotropic and baroclinic energy routes: the roles of JEBAR and the Ekman  
2452 dynamics, *Ocean Dynamics*, *61*, 675–700, 2011b.
- 2453 Aiki, H., X. Zhai, and R. J. Greatbatch, Energetics of the global ocean: the role of mesoscale  
2454 eddies in honour of Prof. Toshio Yamagata, in *Climate Variations: Basic Research to Rich*  
2455 *Applications*, pp. –, World Scientific, under revision.
- 2456 Andrews, D. G., A finite-amplitude Eliassen-Palm theorem in isentropic coordinates, *J. Atmos.*  
2457 *Sci.*, *40*, 1877–1883, 1983.
- 2458 Andrews, D. G., and M. E. McIntyre, Planetary waves in horizontal and vertical shear: the  
2459 generalized Eliassen-Palm relation and the mean zonal acceleration, *J. Atmos. Sci.*, *33*, 2031–  
2460 2048, 1976.
- 2461 Andrews, D. G., and M. E. McIntyre, An exact theory of nonlinear waves on a Lagrangian-mean  
2462 flow, *J. Fluid Mech.*, *89*, 609–646, 1978a.

- 2463 Andrews, D. G., and M. E. McIntyre, On wave-action and its relatives, *J. Fluid Mech.*, *89*,  
2464 647–664, 1978b.
- 2465 Bleck, R., On the conversion between mean and eddy components of potential and kinetic  
2466 energy in isentropic and isopycnic coordinates, *Dyn. Atmos. Oceans*, *9*, 17–37, 1985.
- 2467 Böning, C. W., and R. G. Budich, Eddy dynamics in a primitive equation model: sensitivity  
2468 to horizontal resolution and friction, *J. Phys. Oceanogr.*, *22*, 361–381, 1992.
- 2469 Bretherton, F. P., Critical layer instability in baroclinic flows, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, *92*,  
2470 325–334, 1966.
- 2471 Bretherton, F. P., and C. J. R. Garrett, Wave trains in inhomogeneous moving media, *Proc.*  
2472 *Roy. Soc. London*, *A302*, 529–554, 1968.
- 2473 Bühler, O., *Waves and mean flows*, 341 pp., Cambridge University Press, 2009.
- 2474 Charney, J. G., The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current, *J. Meteor.*, *4*,  
2475 135–163, 1947.
- 2476 Chu, V. H., and C. C. Mei, On slowly varying Stokes waves, *J. Fluid Mech.*, *41*, 873–887, 1970.
- 2477 Craik, A. D. D., *Wave interactions and fluid flows*, 322 pp., Cambridge Universtiy Press, 1985.
- 2478 Craik, A. D. D., and S. Leibovich, A rational model for Langmuir circulations, *J. Fluid Mech.*,  
2479 *73*, 401–426, 1976.
- 2480 de Szoeke, R. A., and A. F. Bennett, Microstructure fluxes across density surfaces, *J. Phys.*  
2481 *Oceanogr.*, *23*, 2254–2264, 1993.
- 2482 Donelan, M. A., M. Curcic, S. S. Chen, and A. K. Magnusson, Modeling waves and wind stress,  
2483 *J. Geophys. Res.*, *117*, C00J23, 2012.
- 2484 Eady, E. T., Long waves and cyclone waves, *Tellus*, *1*, 33–52, 1949.
- 2485 Ekman, V. W., On the influence of the Earth’s rotation on ocean currents, *Arch. Math. Astron.*  
2486 *Phys.*, *2*, 1–52, 1905.
- 2487 Fan, Y., I. Ginis, and T. Hara, Momentum flux budget across the air-sea interface under uniform  
2488 and tropical cyclone winds, *J. Phys. Oceanogr.*, *40*, 2221–2242, 2010.
- 2489 Favre, A., Equations des gaz turbulents compressibles. Parts I and II, *Journal de Mechanic*, *4*,  
2490 361–421, 1965.
- 2491 Ferrari, R., S. M. Griffies, A. J. G. Nurser, and G. K. Vallis, A boundary-value problem for the  
2492 parameterized mesoscale eddy transport, *Ocean Modelling*, *32*, 143–156, 2010.
- 2493 Gallimore, R. G., and D. R. Johnson, The forcing of the meridional circulation of the isentropic  
2494 zonally averaged circumpolar vortex, *J. Atmos. Sci.*, *38*, 583–599, 1981.
- 2495 Garrett, C., Generation of Langmuir circulations by surface waves – A feedback mechanism, *J.*  
2496 *Mar. Res.*, *34*, 117–130, 1976.

- 2497 Gent, P. R., The Gent-McWilliams parameterization: 20/20 hindsight, *Ocean Modelling*, 39,  
2498 2–9, 2011.
- 2499 Gent, P. R., and J. C. McWilliams, Isopycnal mixing in ocean circulation models, *J. Phys.*  
2500 *Oceanogr.*, 20, 150–155, 1990.
- 2501 Gent, P. R., J. Willebrand, T. J. McDougall, and J. C. McWilliams, Parameterizing eddy-  
2502 induced tracer transports in ocean circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, 25, 463–474, 1995.
- 2503 Greatbatch, R. J., Exploring the relationship between eddy-induced transport velocity, vertical  
2504 momentum transfer, and the isopycnal flux of potential vorticity, *J. Phys. Oceanogr.*, 28, 422–  
2505 432, 1998.
- 2506 Greatbatch, R. J., and K. G. Lamb, On parameterizing vertical mixing of momentum in non-  
2507 eddy-resolving ocean models, *J. Phys. Oceanogr.*, 20, 1634–1637, 1990.
- 2508 Greatbatch, R. J., and T. J. McDougall, The non-Boussinesq temporal residual mean, *J. Phys.*  
2509 *Oceanogr.*, 33, 1231–1239, 2003.
- 2510 Griffies, S. M., C. Böning, F. O. Bryan, E. P. Chassignet, R. Gerdes, H. Hasumi, A. Hirst,  
2511 A. Treguier, and D. Webb, Developments in ocean climate modelling, *Ocean Modelling*, 2,  
2512 123–192, 2000.
- 2513 Hasselmann, K., Wave-driven inertial oscillations, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1, 463–502,  
2514 1970.
- 2515 Huang, N. E., On surface drift currents in the ocean, *J. Fluid Mech.*, 91, 191–208, 1979.
- 2516 Ishioka, K., and S. Yoden, Numerical methods of estimating bounds on the non-linear saturation  
2517 of barotropic instability, *J. Meteor. Soc. Japan*, 74, 167–174, 1996.
- 2518 Iwasaki, T., Atmospheric energy cycle viewed from wave-mean-flow interaction and Lagrangian  
2519 mean circulation, *J. Atmos. Sci.*, 58, 3036–3052, 2001.
- 2520 Jacobson, T., and H. Aiki, An exact energy for TRM theory, *J. Phys. Oceanogr.*, 36, 558–564,  
2521 2006.
- 2522 Jenkins, A. D., A theory for steady and variable wind- and wave-induced currents, *J. Phys.*  
2523 *Oceanogr.*, 16, 1370–1377, 1986.
- 2524 Johnson, G. C., and H. L. Bryden, On the size of the Antarctic Circumpolar Current, *Deep-Sea*  
2525 *Res.*, 36, 39–53, 1989.
- 2526 Kasahara, A., Various vertical coordinate system used for numerical weather prediction, *Mon.*  
2527 *Wea. Rev.*, 102, 509–522, 1974.
- 2528 Killworth, P. D., Boundary conditions on quasi-Stokes velocities in parameterizations, *J. Phys.*  
2529 *Oceanogr.*, 31, 1132–1155, 2001.
- 2530 Kinoshita, T., and K. Sato, A formulation of three-dimensional residual mean flow applicable  
2531 both to inertia-gravity waves and to Rossby waves, *J. Atmos. Sci.*, 70, 1577–1602, 2013.

- 2532 Lagrange, J. L., *Méchanique Analitique*, 512 pp., Paris: la Veuve Desaint,  
2533 <http://books.google.com>, 1788.
- 2534 Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6th ed., 738 pp., Cambridge Univ. Press, 1932.
- 2535 Langmuir, I., Surface motion of water induced by wind, *Science*, *87*, 119–123, 1938.
- 2536 Lee, M. M., and H. Leach, Eliassen–Palm flux and eddy potential vorticity flux for a nonquasi-  
2537 geostrophic time-mean flow, *J. Phys. Oceanogr.*, *26*, 1304–1319, 1996.
- 2538 Leibovich, S., On wave-current interaction theory of Langmuir circulations, *J. Fluid Mech.*, *99*,  
2539 715–724, 1980.
- 2540 Longuet-Higgins, M. S., Mass transport in water waves, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, *A245*,  
2541 535–581, 1953.
- 2542 Longuet-Higgins, M. S., Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface, *J.*  
2543 *Fluid Mech.*, *8*, 293–306, 1960.
- 2544 Longuet-Higgins, M. S., and R. W. Stewart, Changes in the form of short gravity waves on long  
2545 waves and tidal currents, *J. Fluid Mech.*, *8*, 565–583, 1960.
- 2546 Longuet-Higgins, M. S., and R. W. Stewart, The changes in amplitude of short gravity waves  
2547 on steady non-uniform currents, *J. Fluid Mech.*, *10*, 529–549, 1961.
- 2548 Longuet-Higgins, M. S., and R. W. Stewart, Radiation stress in water waves: A physical dis-  
2549 cussion with applications, *Deep-Sea Res.*, *11*, 529–562, 1964.
- 2550 Lorenz, E. N., Available potential energy and the maintenance of the general circulation, *Tellus*,  
2551 *2*, 157–167, 1955.
- 2552 Madsen, O. S., Mass transport in deep-water waves, *J. Phys. Oceanogr.*, *8*, 1009–1015, 1978.
- 2553 Masina, S., S. G. H. Philander, and A. B. G. Bush, An analysis of tropical instability waves in  
2554 a numerical model of the Pacific Ocean 2, Generation and energetics of the waves, *J. Geophys.*  
2555 *Res.*, *104*, 29,637–29,661, 1999.
- 2556 Masumoto, Y., and Coauthors, A fifty-year eddy-resolving simulation of the world ocean – pre-  
2557 liminary outcomes of OFES (OGCM for the Earth Simulator) –, *Journal of the Earth Simulator*  
2558 [http://www.es.jamstec.go.jp/esc/images/jes\\_vol.1/pdf/JES1-3.2-masumoto.pdf](http://www.es.jamstec.go.jp/esc/images/jes_vol.1/pdf/JES1-3.2-masumoto.pdf), *1*, 35–56, 2004.
- 2559 McDougall, T. J., and P. C. McIntosh, The temporal-residual-mean velocity. Part II: Isopycnal  
2560 interpretation and the tracer and momentum equations, *J. Phys. Oceanogr.*, *31*, 1222–1246,  
2561 2001.
- 2562 McIntyre, M. E., A note on the divergence effect and the Lagrangian-mean surface elevation in  
2563 periodic water waves, *J. Fluid Mech.*, *189*, 235–242, 1988.
- 2564 McIntyre, M. E., Book review for Bühler (2009), *J. Fluid Mech.*, *688*, 602–606, 2011.

- 2565 McIntyre, M. E., and T. G. Shepherd, An exact local consevation theorem for finite-amplitude  
2566 disturbances to non-parallel shear flows, with remarks on Hamiltonian structure and on  
2567 Arnol'd's stability theorems, *J. Fluid Mech.*, *181*, 525–565, 1987.
- 2568 McWilliams, J. C., J. M. Restrepo, and E. M. Lane, An asymptotic theory for the interaction  
2569 of waves and currents in coastal waters, *J. Fluid Mech.*, *511*, 135–178, 2004.
- 2570 Mellor, G., The three-dimensional current and surface wave equations, *J. Phys. Oceanogr.*, *33*,  
2571 1978–1989, 2003.
- 2572 Mellor, G., The depth-dependent current and wave interaction equations: a revision, *J. Phys.*  
2573 *Oceanogr.*, *38*, 2587–2596, 2008.
- 2574 Miles, J. W., On the generation of surface waves by shear flows, *J. Fluid Mech.*, *3*, 185–204,  
2575 1957.
- 2576 Mitsuyasu, H., A historical note on the study of ocean surface waves, *J. Oceanogr.*, *58*, 109–120,  
2577 2002.
- 2578 Miyahara, S., A three dimensional wave activity flux applicable to inertio-gravity waves, *SOLA*,  
2579 *2*, 108–111, 2006.
- 2580 Miyazawa, T., and Coauthors, Water mass variability in the western North Pacific Detected in  
2581 a 15-year eddy resolving ocean reanalysis, *J. Oceanogr.*, *65*, 737–756, 2009.
- 2582 Miyazawa, T., X. Guo, and T. Yamagata, Roles of mesoscale eddies in the Kuroshio paths, *J.*  
2583 *Phys. Oceanogr.*, *34*, 2203–2222, 2004.
- 2584 Munk, W., and E. Palmén, Notes on the dynamics of the Antarctic Circumpolar Current,  
2585 *Tellus*, *3*, 53–55, 1951.
- 2586 Nakamura, N., and D. Zhu, Finite-amplitude wave activity and diffusive flux of potential vor-  
2587 ticity in eddy-mean flow interaction, *J. Atmos. Sci.*, *67*, 2701–2716, 2010.
- 2588 Noda, A., A general three-dimensional transformed Eulerian mean formulation, *SOLA*, *6*, 085–  
2589 088, 2010.
- 2590 Phillips, O. M., *Dynamics of the Upper Ocean*, 336 pp., Cambridge University Press, 1977.
- 2591 Pierson, W. J., Perturbation analysis of the Navier-Stokes equations in Lagrangian form with  
2592 selected linear solutions, *J. Geophys. Res.*, *67*, 3151–3160, 1962.
- 2593 Plumb, R. A., 3-dimensional propagation of transient quasi-geostrophic eddies and its relation-  
2594 ship with the eddy forcing of the time mean flow, *J. Atmos. Sci.*, *43*, 1657–1678, 1986.
- 2595 Polton, J. A., and S. E. Belcher, Langmuir turbulence and deeply penetrating jets in an un-  
2596 stratified mixed layer, *J. Geophys. Res.*, *112*, C09020, 2007.
- 2597 Redi, M. H., Oceanic isopycnal mixing by coordinate rotation, *J. Phys. Oceanogr.*, *12*, 1154–  
2598 1158, 1982.

- 2599 Scinocca, J. F., and T. G. Shepherd, Nonlinear wave-activity conservation laws and Hamiltonian  
2600 structure for the two-dimensional anelastic equations, *J. Atmos. Sci.*, *49*, 5–27, 1992.
- 2601 Shepherd, T. G., Non-ergodicity of inviscid two-dimensional flow on a beta-plane and on the  
2602 surface of a rotating sphere, *J. Fluid Mech.*, *184*, 289–302, 1987.
- 2603 Smith, J. A., Wave-current interactions in finite depth, *J. Phys. Oceanogr.*, *36*, 1403–1419,  
2604 2006.
- 2605 Smith, R. D., The primitive equations in the stochastic theory of adiabatic stratified turbulence,  
2606 *J. Phys. Oceanogr.*, *29*, 1865–1880, 1999.
- 2607 Solomon, A., and N. Nakamura, An exact lagrangian-mean wave activity for finite-amplitude  
2608 disturbances to barotropic flow on a sphere, *JFM*, *693*, 69–92, 2012.
- 2609 Stokes, G. G., On the theory of oscillatory waves, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, *8*, 441–455,  
2610 1847.
- 2611 Sullivan, P. P., and J. C. McWilliams, Dynamics of winds and currents coupled to surface waves,  
2612 *Annu. Rev. Fluid Mech.*, *42*, 19–42, 2010.
- 2613 Takaya, K., and H. Nakamura, A formulation of a phase-independent wave-activity flux for  
2614 stationary and migratory quasigeostrophic eddies on a zonally varying basic flow, *J. Atmos.*  
2615 *Sci.*, *58*, 608–627, 2001.
- 2616 Tamura, H., Y. Miyazawa, and L.-Y. Oey, The Stokes drift and wave induced-mass flux in the  
2617 North Pacific, *J. Geophys. Res.*, *117*, C08021, 2012.
- 2618 Taylor, G. I., Eddy motion in the atmosphere, *Proc. Roy. Soc. London*, *A215*, 1–23, 1915.
- 2619 Tsujino, H., S. Nishikawa, K. Sakamoto, H. Nakano, and H. Ishizaki, Mesoscale eddy statistics  
2620 and implications for parameterization refinements from a diagnosis of a high resolution model  
2621 of the North Pacific, *Ocean Modelling*, *33*, 205–223, 2010.
- 2622 Uchiyama, Y., J. C. McWilliams, and A. F. Shchepetkin, Wave-current interaction in an oceanic  
2623 circulation model with a vortex-force formalism: Application to the surf zone, *Ocean Modelling*,  
2624 *34*, 16–35, 2010.
- 2625 Wells, N. C., V. O. Ivchenko, and S. E. Best, Instabilities in the Agulhas retroflection current  
2626 system: a comparative model study, *J. Geophys. Res.*, *105*, 3233–3241, 2000.
- 2627 Whitham, G. B., Mass, momentum and energy flux in water waves, *J. Fluid Mech.*, *12*, 135–147,  
2628 1962.
- 2629 Whitham, G. B., A general approach to linear and nonlinear dispersive water waves using a  
2630 Lagrangian, *J. Fluid Mech.*, *22*, 273–283, 1965.
- 2631 Whitham, G. B., *Linear and nonlinear waves*, 636 pp., John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- 2632 Young, W. R., An exact thickness-weighted average formulation of the Boussinesq equations,  
2633 *J. Phys. Oceanogr.*, *42*, 692–707, 2012.