

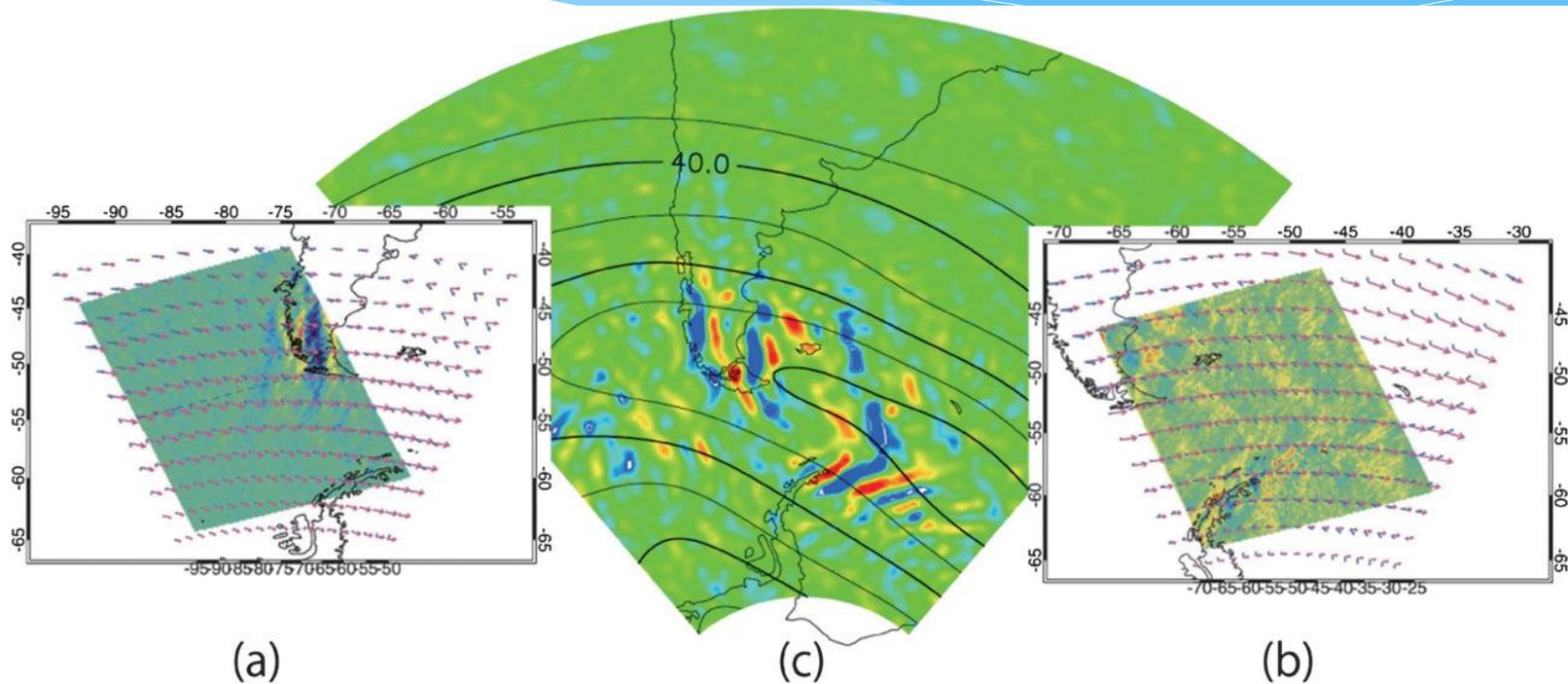
# 慣性重力波とロスビー波に適用可能な3次元残差流と波活動度flux

\*木下 武也<sup>1</sup>, 佐藤 薫<sup>1</sup>

1東京大学 大学院理学系研究科

# 研究背景

観測及び、高分解能モデルデータにより捉えられた重力波



Sato et al. [2012]

(a), (b) : AIRSによって観測された高度40kmにおける

アンデス山脈と南極半島起源の重力波 (カラーは放射輝度擾乱)

(c) : 高分解能GCMデータによってシミュレートされた重力波 (カラーは温度擾乱)

# 変形オイラー平均 (TEM) 系における2次元残差流と波活動度flux [Eliassen-Palm (EP) flux]

## 東西平均した東西方向の運動方程式

$$[u]_t + ([u]_y - f)[v^*] + [u]_z[w^*] = \nabla \cdot \mathbf{F} + [X].$$

残差流

近似的にラグランジュ平均流に一致

$$[v^*] = [v] - \rho_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \frac{[v^\dagger \Phi^\dagger]}{N^2} \right), = \rho_0^{-1} \frac{\partial \rho_0 [v^\dagger \zeta^\dagger]}{\partial z} = [v]^s,$$

$$[w^*] = [w] + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho_0 \frac{[v^\dagger \Phi^\dagger]}{N^2} \right). = \frac{\partial [w^\dagger \eta^\dagger]}{\partial y} = [w]^s$$

EP flux

擾乱の発生・散逸, 伝播を記述

$$\mathbf{F} = \rho_0 \left( 0, -[u^\dagger v^\dagger] + [u]_z \frac{[v^\dagger \Phi^\dagger]}{N^2}, -[u^\dagger w^\dagger] - ([u]_y - f) \frac{[v^\dagger \Phi^\dagger]}{N^2} \right),$$

$$[A]_t + \nabla \cdot \mathbf{F} = [D], \quad \mathbf{F} = \mathbf{C}_g A$$

$A$ : 擬運動量,  
 $D$ : 非保存項

# TEM系を3次元に拡張した研究 準地衡流 (QG) 系

時間平均を使用 ⇒ Hoskins et al. [1983], Trenberth [1986], Plumb [1986]

例 Plumb [1986]

渦位の保存則から3次元波活動度fluxと残差流を導出。このフラックスはロスビー波の群速度と擬運動量の積と一致。

時間平均を用いない導出 ⇒ Plumb [1985], Takaya and Nakamura [1997, 2001]

例 Takaya and Nakamura [2001]

エンストロフィーの保存則とエネルギー保存則を組み合わせた保存則を用い、東西非一様な場における準停滞性擾乱に適用可能な3次元波活動度fluxを導出。

**3次元残差流とStokes driftの関係については調べられていない**

# TEM系を3次元に拡張した研究

## プリミティブ方程式系：時間平均を使用

**Miyahara [2006]**：ブシネスク流体、球面プリミティブ方程式系において、重力波に適用可能な3次元波活動度fluxと残差流を導出

- ✓ 3次元残差流が質量保存を満たさない
- ✓ 東西方向の運動方程式中の移流項にオイラー平均流と3次元残差流の双方が存在

**Kinoshita et al. [2010]**：上記の問題を克服したプリミティブ方程式系における3次元残差流と波活動度fluxを導出

- 重力波の分散関係式を用いるため、重力波のみに適用可能
- 3次元波活動度fluxはロスビー数が小さい (QG系が成立) 仮定の下で、ロスビー波の伝播を記述する波活動度fluxに一致 [Plumb 1986]

**Noda [2010]**：WKB近似の元、反対称渦拡散テンソルとエネルギーfluxを用いて3次元残差流と波活動度fluxを導出

- 分母にフラックス項を含むため、単色波のみに適用可能

# 研究目的

慣性重力波とロスビー波両者を同時に解析する3次元ツール( 3次元残差流と波活動度flux) を定式化する

1. プリミティブ方程式系における慣性重力波とロスビー波両者に適用可能な3次元残差流の定式化  
(Kinoshita and Sato, A formulation of three-dimensional residual mean flow applicable both to inertia-gravity waves and to Rossby waves, submitted to *J. Atmos. Sci*, 2012 )
2. 背景場に対する波強制を表す3次元波活動度flux(3D-flux-M)と波の伝播を記述する波活動度flux (3D-flux-W)の定式化  
(Kinoshita and Sato, A formulation of unified three-dimensional wave activity flux of inertia-gravity waves and Rossby waves, submitted to *J. Atmos. Sci*, 2012 )

# 第2章 定式化の方針： プリミティブ方程式の3次元Stokes drift

擾乱の風速、ジオポテンシャルを小振幅平面波とおき、  
擾乱の方程式系および空気塊の変位の式を用いてStokes Drift  
を $\Phi'$ のみで表す

$$\Phi' = \Phi_0 e^{z/2H} \exp\{i(kx + ly + mz - \omega t)\}$$

$$\overline{D\xi'} = \mathbf{u}' \rightarrow \xi' = i\mathbf{u}' / \hat{\omega}, \quad (\hat{\omega} = \omega - k\bar{u} - l\bar{v})$$

Kinoshita et al. [2010]では

$$\overline{u'\eta'} = \frac{1}{2} \frac{f(k^2 + l^2)}{(\hat{\omega}^2 - f^2)^2} \overline{\Phi'^2}$$

に一致するものとして

$$\frac{1}{2} \left( \overline{u'^2} + \overline{v'^2} - \frac{\overline{\Phi_z'^2}}{N^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{(\hat{\omega}^2 + f^2)(k^2 + l^2)}{(\hat{\omega}^2 - f^2)^2} \overline{\Phi'^2}$$

$$\frac{\overline{\Phi_z'^2}}{N^2} = \frac{(m^2 + 1/4H^2)}{N^2} \overline{\Phi'^2} = \frac{(\hat{\omega}^2 - f^2)(k^2 + l^2)}{(\hat{\omega}^2 - f^2)^2} \overline{\Phi'^2}$$



慣性重力波の分散関係式を使用

分散関係式を用いずに新たに定式化を行う

Stokes Drift

$$\overline{u}^{-S} = \overline{(u'\eta')_y} + \rho_0^{-1} (\rho_0 \overline{u'\zeta'})_z,$$

$$\overline{v}^{-S} = -\overline{(u'\eta')_x} + \rho_0^{-1} (\rho_0 \overline{v'\zeta'})_z,$$

$$\overline{w}^{-S} = -\overline{(u'\zeta')_x} - \overline{(v'\zeta')_y}.$$

# 第2章 定式化：プリミティブ方程式の3次元Stokes driftと他のStokes Driftとの関係

用いた仮定：小振幅擾乱、平面波仮定 準地衡流系における導出では非地衡風擾乱についても考慮

本研究において導出した

準地衡流 (QG) 系の Stokes drift (QGSD)

プリミティブ方程式系 (慣性重力波 & ロスビー波)

$$\begin{aligned}
 \overline{u}^{-s} &= \left( \frac{\overline{u_g'^2 + v_g'^2}}{f_0} \right)_y - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\rho_0 \overline{u'_g \Phi'_z}}{N^2} \right)_z, & \neq \left( \frac{\overline{S}}{f_0} \right)_y - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\rho_0 \overline{u' \Phi'_z}}{N^2} \right)_z, & \left( \frac{\overline{\Phi'_x}}{f} \right)_y - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\rho_0 \overline{u' \Phi'_z}}{N^2} \right)_z, \\
 \overline{v}^{-s} &= - \left( \frac{\overline{u_g'^2 + v_g'^2}}{f_0} \right)_x - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\rho_0 \overline{v'_g \Phi'_z}}{N^2} \right)_z, & \neq - \left( \frac{\overline{S}}{f_0} \right)_x - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\rho_0 \overline{v' \Phi'_z}}{N^2} \right)_z, & \left( \frac{\overline{\Phi'_x}}{f} \right)_x - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\rho_0 \overline{v' \Phi'_z}}{N^2} \right)_z, \\
 \overline{w}^{-s} &= \left( \frac{\overline{u'_g \Phi'_z}}{N^2} \right)_x + \left( \frac{\overline{v'_g \Phi'_z}}{N^2} \right)_y, & = \left( \frac{\overline{u' \Phi'_z}}{N^2} \right)_x + \left( \frac{\overline{v' \Phi'_z}}{N^2} \right)_y. & 
 \end{aligned}$$

ロスビー数が小さいという仮定 (QG系の条件) を用いると

f平面を仮定し、慣性重力波の分散関係式を用いると

Plumb [1986]の3次元残差流

慣性重力波の Stokes drift (IGSD)

$$\begin{aligned}
 &= - \left( \frac{\overline{S}}{f} \right)_x - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\rho_0 \overline{v' \Phi'_z}}{N^2} \right)_z, & \text{[Miyahara 2006],} \\
 &= \left( \frac{\overline{u' \Phi'_z}}{N^2} \right)_x + \left( \frac{\overline{v' \Phi'_z}}{N^2} \right)_y, & \text{[Kinoshita et al. 2010]} \\
 & \left[ S = \frac{1}{2} \left( \overline{u'^2 + v'^2} - \frac{\overline{\Phi_z'^2}}{N^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

# 第3章 背景場に対する波強制を記述する3次元波活動度flux (3D-flux-M)

慣性重力波とロスビー波両者に適用可能な3次元Stokes driftを時間平均した東西方向の運動方程式に代入することで3D-flux-Mが得られる

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}^* \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \right) + \bar{w}^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} - \rho_0^{-1} (\nabla \cdot \mathbf{F}_1) + \bar{X}$$

$$\bar{\mathbf{u}}^* = \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}^S$$

$$F_1 = (F_{11}, F_{12}, F_{13}) \quad F_{11} = \rho_0 \left[ \overline{u'^2} - \bar{S}_{(p)} \right] + \bar{u}_y \frac{\bar{S}_{(p)}}{f} - \bar{u}_z \frac{\overline{u' \Phi'_z}}{N^2},$$

$$F_{12} = \rho_0 \left[ \overline{u'v'} \right] - \bar{u}_x \frac{\bar{S}_{(p)}}{f} - \bar{u}_z \frac{\overline{v' \Phi'_z}}{N^2},$$

$$F_{13} = \rho_0 \left[ \overline{u'w'} \right] + \bar{u}_x \frac{\overline{u' \Phi'_z}}{N^2} + (\bar{u}_y - f) \frac{\overline{v' \Phi'_z}}{N^2},$$

$$\bar{S}_{(p)} = \frac{1}{2} \left( \overline{u'^2} + \overline{v'^2} - \frac{\overline{u' \Phi'_y}}{f} + \frac{\overline{v' \Phi'_x}}{f} \right)$$

背景風シアが弱い  
仮定の下

# 第3章 波の伝播を記述する3次元波活動度flux (3D-flux-W) の導出

3D-flux-Mをジオポテンシャルで表す

$$F_{11} = \rho_0 \left( \overline{u'^2} - \overline{S_{(p)}} \right) = \rho_0 \frac{1}{2} \frac{k^2}{\hat{\omega}^2 - f^2} \overline{\Phi'^2},$$

$$F_{12} = \rho_0 \left( \overline{u'v'} \right) = \rho_0 \frac{1}{2} \frac{kl}{\hat{\omega}^2 - f^2} \overline{\Phi'^2},$$

$$F_{13} = \rho_0 \left( \overline{u'w'} - f \frac{\overline{v'\Phi'_z}}{N^2} \right) = -\rho_0 \frac{1}{2} \frac{km}{N^2} \overline{\Phi'^2},$$

$$\frac{\hat{C}_{gx}}{\hat{C}_{(x)}} = \left( 2k^2 + \frac{kf_y}{\hat{\omega}} \right) / \left( \frac{2\hat{\omega}\tilde{m}^2}{N^2} + \frac{kf_y}{\hat{\omega}^2} \right),$$

$$\frac{\hat{C}_{gy}}{\hat{C}_{(x)}} = 2kl / \left( \frac{2\hat{\omega}\tilde{m}^2}{N^2} + \frac{kf_y}{\hat{\omega}^2} \right),$$

$$\frac{\hat{C}_{gz}}{\hat{C}_{(x)}} = -2km \left( \frac{\hat{\omega}^2 - f^2}{N^2} \right) / \left( \frac{2\hat{\omega}\tilde{m}^2}{N^2} + \frac{kf_y}{\hat{\omega}^2} \right)$$

擬運動量は  $A = \frac{E}{\hat{C}_{(x)}}$  であるが、波活動度fluxとの比較を行う際、

見やすくするために、固有群速度を  $\hat{C}_{(x)} = \frac{\hat{\omega}}{k}$  で割った値を計算

$$F_{11} + F_u = \hat{C}_{gx} \frac{\tilde{E}}{\hat{C}_x}, \quad F_{12} = \hat{C}_{gy} \frac{\tilde{E}}{\hat{C}_x}, \quad F_{13} = \hat{C}_{gz} \frac{\tilde{E}}{\hat{C}_x}, \quad \tilde{E} = E + \rho_0 \overline{(u'\Phi')_y} / 2f$$

$$F_u \equiv \frac{\rho_0}{2} \left( -\frac{\overline{u'\Phi'_y}}{f} + \frac{\overline{v'\Phi'_x}}{f} + \frac{\overline{\Phi'_z}}{N^2} \right)$$

**3D-flux-W**

# 第3章 波の伝播を記述する3次元波活動度 flux (3D-flux-W) の東西成分の導出②

$$F_{11} + F_u = \hat{C}_{gx} \frac{\tilde{E}}{\hat{C}_x}$$

ロスビー数が小さい場合  
(準地衡流近似が成り立つ仮定)

$$\begin{aligned} \rho_0 f \overline{u' \eta'} &= 2\bar{K} \\ \therefore F_{11} + \rho_0 f \overline{u' \eta'} - \rho_0 \bar{S} &= F_{11} + E \\ &= -\rho_0 (\overline{v'^2} - E) \end{aligned}$$

Plumb [1986]により導出された  
準地衡流系の3次元波活動度fluxに一致  
F12, F13成分も同様

f平面仮定の下、重力波の  
分散関係式を用いると

$$\begin{aligned} \rho_0 f \overline{u' \eta'} &= \rho_0 \bar{S}, \\ \bar{S} &= (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} - \overline{\Phi_z'^2} / N^2) / 2 \\ \therefore F_{11} + \rho_0 f \overline{u' \eta'} - \bar{S} &= F_{11} \\ &= \rho_0 (\overline{u'^2} - \bar{S}) \end{aligned}$$

Miyahara [2006], Kinoshita et al. [2010]に  
より導出された重力波に適用可能な  
3次元波活動度fluxに一致

# 第3章 実データへの理論の適用例

## 事例解析：北半球上部対流圏の ストームトラック領域に適用

ERA-Interim 再解析データ

(1990~2008年 を使用)

緯度経度 1.5度, 鉛直37層 (top = 1hPa), 6時間間隔

✓ 時間平均(背景場) = 60日周期より長い変動成分  
(1ヶ月平均に対応)

✓ 擾乱(背景場からのずれ) = 60日周期より短い成分

※ある月の時間平均場 = その月15日の場

※この解析では、非定常擾乱の活動が活発な上部対流圏  
(250hPa) の春季に焦点をあてて解析を行った

# 第3章 実データへの理論の適用例

## 事例解析：3D-flux-Mと3D-flux-W

東西方向の運動方程式から傾度風平衡成分を取り除くと  
(解析ではRandel [1987] の手法を参考に計算した)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}^* \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \right) + \bar{w}^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} - \rho_0^{-1} (\nabla \cdot \mathbf{F}_1) + \bar{X}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}_{(ag)}^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u}_{(gr)} \frac{\partial \bar{u}_{(ag)}}{\partial x} + \bar{v}_{(gr)} \frac{\partial \bar{u}_{(ag)}}{\partial y} + \bar{v}_{(ag)}^* \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \right) + \bar{w}^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\rho_0^{-1} (\nabla \cdot \mathbf{F}_1) + \bar{X}$$

おおまかにバランスする項

(gr) : 傾度風成分, (ag) : 非傾度風成分

これより、ストームトラック領域における以下の分布を解析

$$\bar{v}_{(ag)}^* - \rho_0^{-1} (\nabla \cdot \mathbf{F}_1) / (\bar{u}_y - f)$$

擾乱に伴う ①3D flux-M, ②3D flux-M (シア無)

3次元残差流 ③3D flux-W, ④Plumb (1986) の3次元波活動度flux

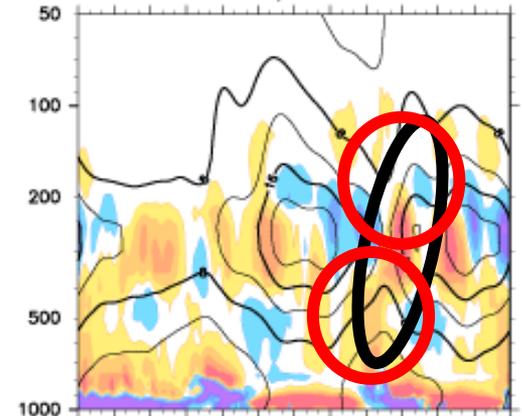
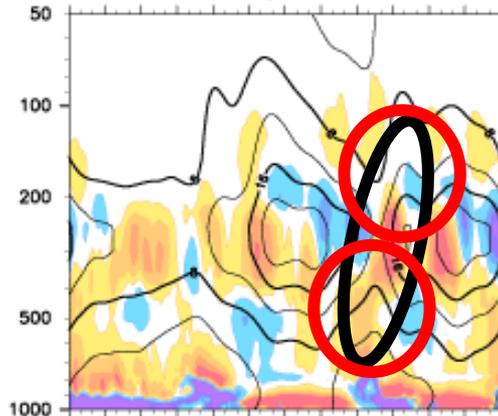
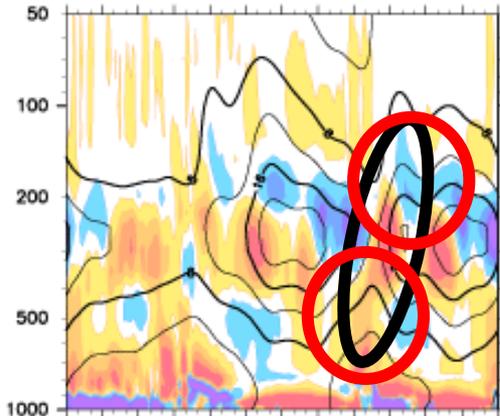
# 第3章 北緯30~60度での経度高度断面図①

擾乱に伴う  
3次元残差流

① 3D-flux-M,  
 $-\rho_0^{-1}(\nabla \cdot \mathbf{F}_1)/(\bar{u}_y - f)$

② 3D-flux-M (シア無)  
 $-\rho_0^{-1}(\nabla \cdot \mathbf{F}_1)/(\bar{u}_y - f)$

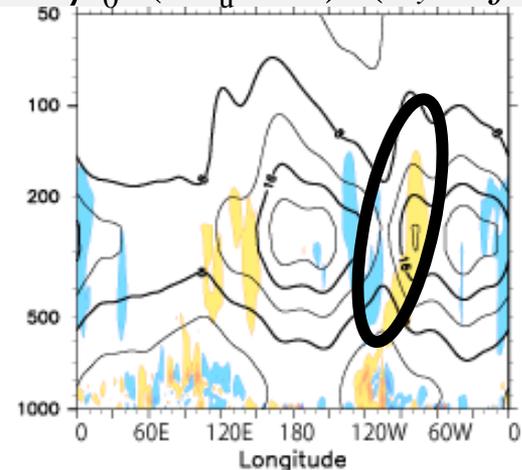
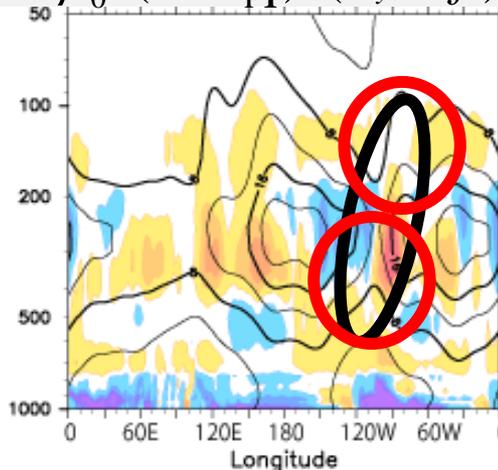
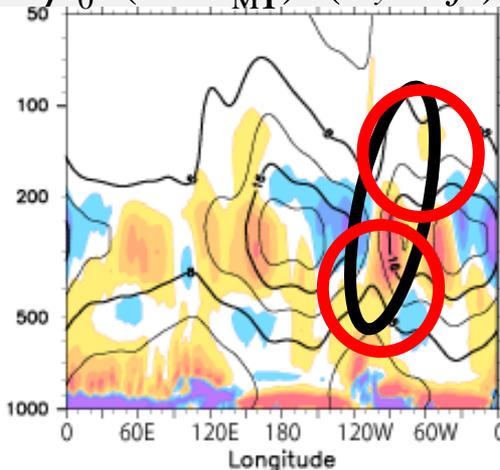
(a) Re



③ 3D-flux-W,  
 $-\rho_0^{-1}(\nabla \cdot \mathbf{F}_{M1})/(\bar{u}_y - f)$

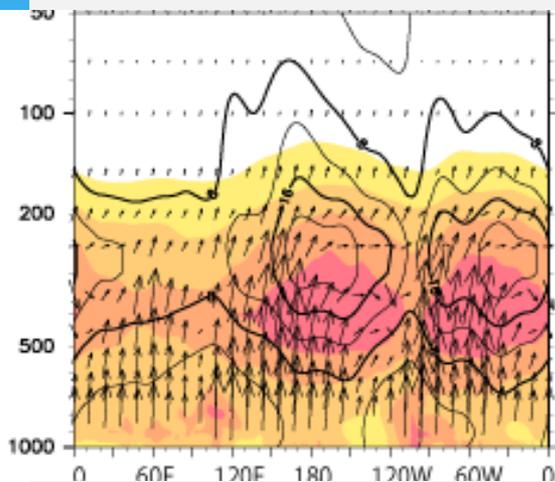
④ Plumb (1986) のflux,  
 $\rho_0^{-1}(\nabla \cdot \mathbf{F}_{P1})/(\bar{u}_y - f)$

⑤ Fuの東西微分  
 $\rho_0^{-1}(\partial \mathbf{F}_u / \partial x)/(\bar{u}_y - f)$

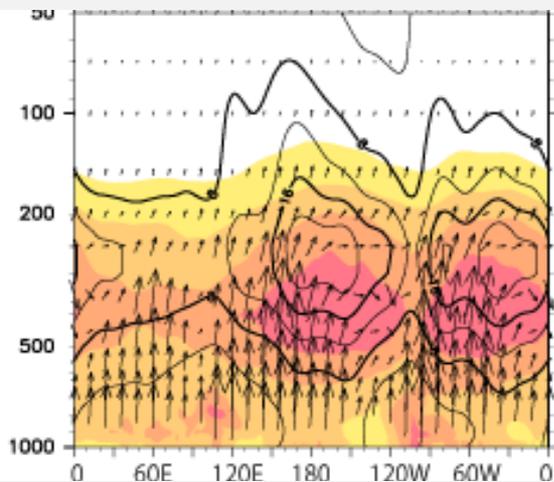


# 第3章 北緯30~60度での経度高度断面図②

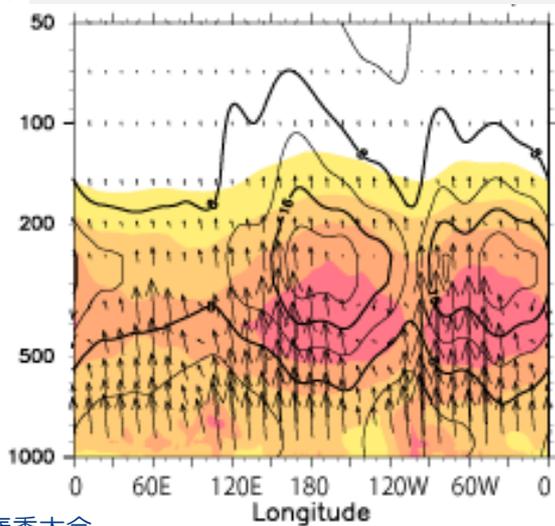
(a) ①3D-flux-M,



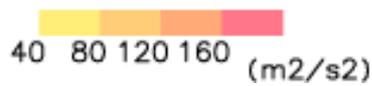
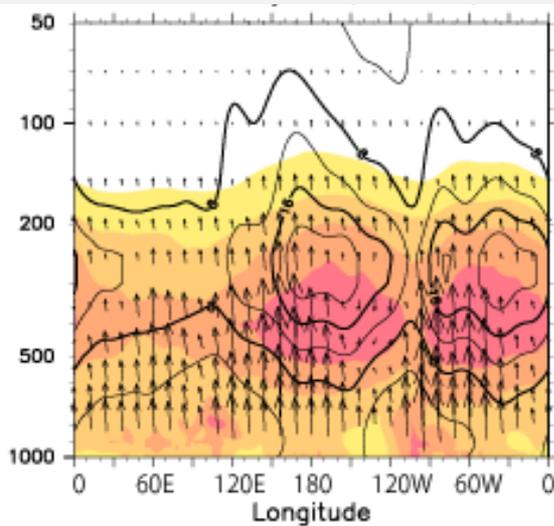
②3D-flux-M (シア無)



(c) ③3D flux-W,



④Plumb (1986) のflux



# 第3章

## 事例解析のまとめ

- \* 上部対流圏のストームトラック領域において3D-flux-Mと3D-flux-Wを比較した結果
  - \* 3D-flux-Mの収束発散と擾乱に伴う3次元残差流の分布はほぼ一致する。一方3D-flux-Wの収束発散はストームトラックの上流と下流域で若干異なる分布をしている。
  - \* 3D-flux-Wとロスビー波の伝播を記述するPlumb [1986] の3次元波活動度fluxはほぼ一致する。一方で、3D-flux-Mはストームトラック領域で異なる分布をしている。

⇒① 3D-flux-Mの収束発散は背景場に対する波強制を記述  
② 3D-flux-Wは擾乱の伝播を記述

# 全体のまとめ (理論)

- ① プリミティブ方程式系における慣性重力波とロスビー波両者に適用可能な3次元Stokes drift (PRSD) を定式化
- ② 背景場に対する波強制を記述する3次元波活動度flux (3D flux-M) と波の伝播を記述する3次元波活動度flux (3D flux-W) を別に定式化
- ③ PRSD, 3D-flux-Wが以下の関係を持つことを示した
  - ✓ ロスビー数が小さい仮定の下
    - PRSD : 準地衡系の3次元Stokes driftに一致
    - 3D flux-W : Plumb (1986) の3次元波活動度fluxに一致
  - ✓  $f$  平面仮定の下、重力波の分散関係式を使用
    - PRSD : Kinoshita et al. (2010) の3次元Stokes driftに一致
    - 3D flux-W : Miyahara (2006) の3次元波活動度fluxに一致

# 全体のまとめ（事例解析）と今後の課題

## 事例解析

3D flux-Mと3D flux-Wの比較を行った結果、

3D flux-Mの収束発散 $\div$ 擾乱に伴う3次元残差流

3D flux-W $\div$ Plumb (1986) の3次元波活動度flux

$\Rightarrow$ 3D flux-M が背景場に対する波強制を記述するflux  
であり、3D flux-W が波の伝播を記述することが  
データ解析からも示された

## • 今後の課題

- 得られた定式を用いて、これまで解析してきた両領域を含む中層大気全体の物質輸送の3次元構造のさらなる理解に向け、輸送を引き起こす擾乱の伝播経路や碎波領域、またその季節変化・経年変動について解析する
- プリミティブ方程式系における準停滞性擾乱に適用可能な3次元残差流の導出を目指す