

東西非一様な時間平均場における
局所化された
変形オイラー平均エネルギーサイクル

村上茂教

気象大学校

0. 背景

Lorenz, E. N. , 1955: Available Potential Energy and the Maintenance of the General Circulation. Tellus, 7.

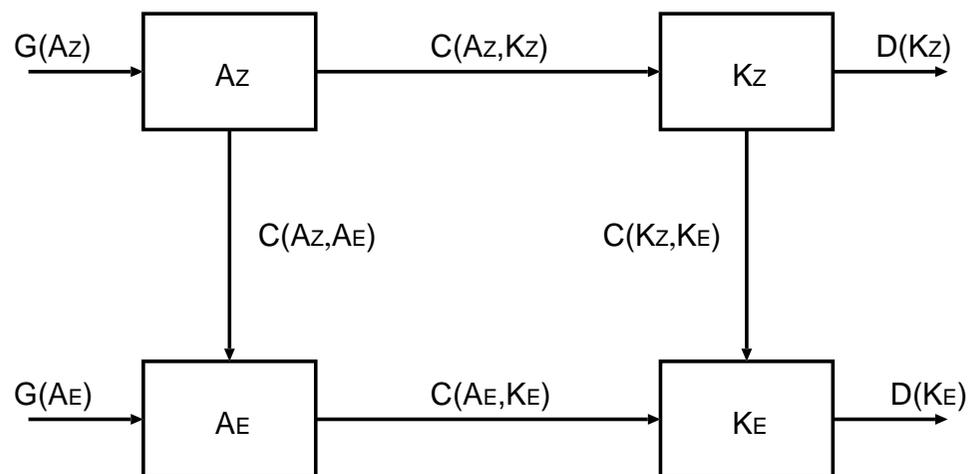
Plumb, R. A. , 1983: A New Look at the Energy Cycle. J. Atmos. Sci. , 40.

Plumb, R. A. , 1986: Thee-Dimensional Propagation of the Transient Quasi-Geostrophic Eddies and Its Relationship with the Eddy Forcing of the Time-Mean Flow. J. Atmos. Sci. 43.

Murakami et al. , 2011: Atmospheric Local Energetics and Energy Interactions between Mean and Eddy Fields. Part I II. J. Atmos. Sci. , 68.

1. ローレンツエネルギーサイクル

Lorenz (1955) の
エネルギーダイアグラム



エネルギー収支方程式

$$\frac{dA_Z}{dt} = G(A_Z) - C(A_Z, A_E) - C(A_Z, K_Z)$$

$$\frac{dA_E}{dt} = G(A_E) + C(A_Z, A_E) - C(A_E, K_E)$$

$$\frac{dK_Z}{dt} = C(A_Z, K_Z) - C(K_Z, K_E) - D(K_Z)$$

$$\frac{dK_E}{dt} = C(A_E, K_E) + C(K_Z, K_E) - D(K_E)$$

エネルギー変換項

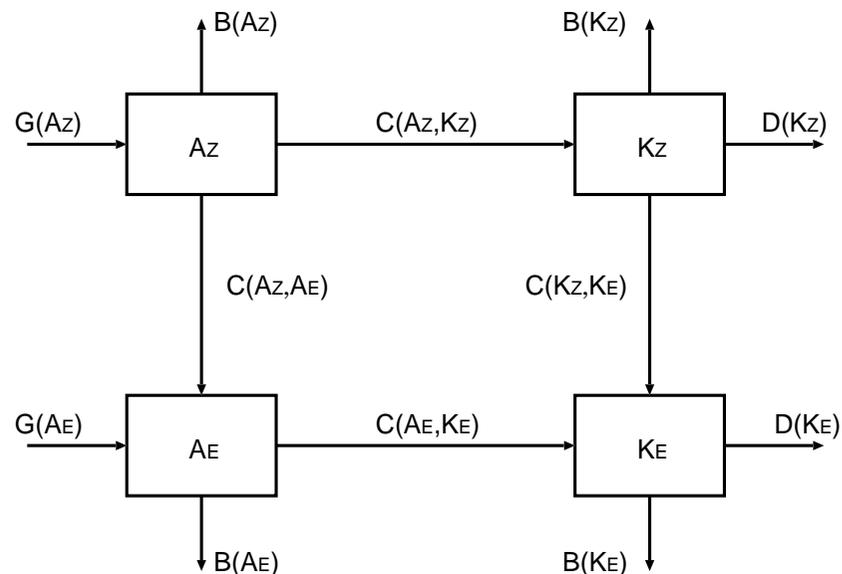
$$C(A_Z, A_E) = - \int C_p \Pi \gamma \overline{\theta' \mathbf{u}'} \text{grad}(\overline{\theta} - \langle \theta \rangle) dm$$

$$C(A_E, K_E) = - \int \overline{\omega' \alpha'} dm$$

$$C(K_Z, K_E) = - \int (\overline{u' \mathbf{u}'} \cdot \text{grad} \bar{u} + \overline{v' \mathbf{u}'} \cdot \text{grad} \bar{v}) dm$$

これらの変換項は元々全大気平均量として定義されていた

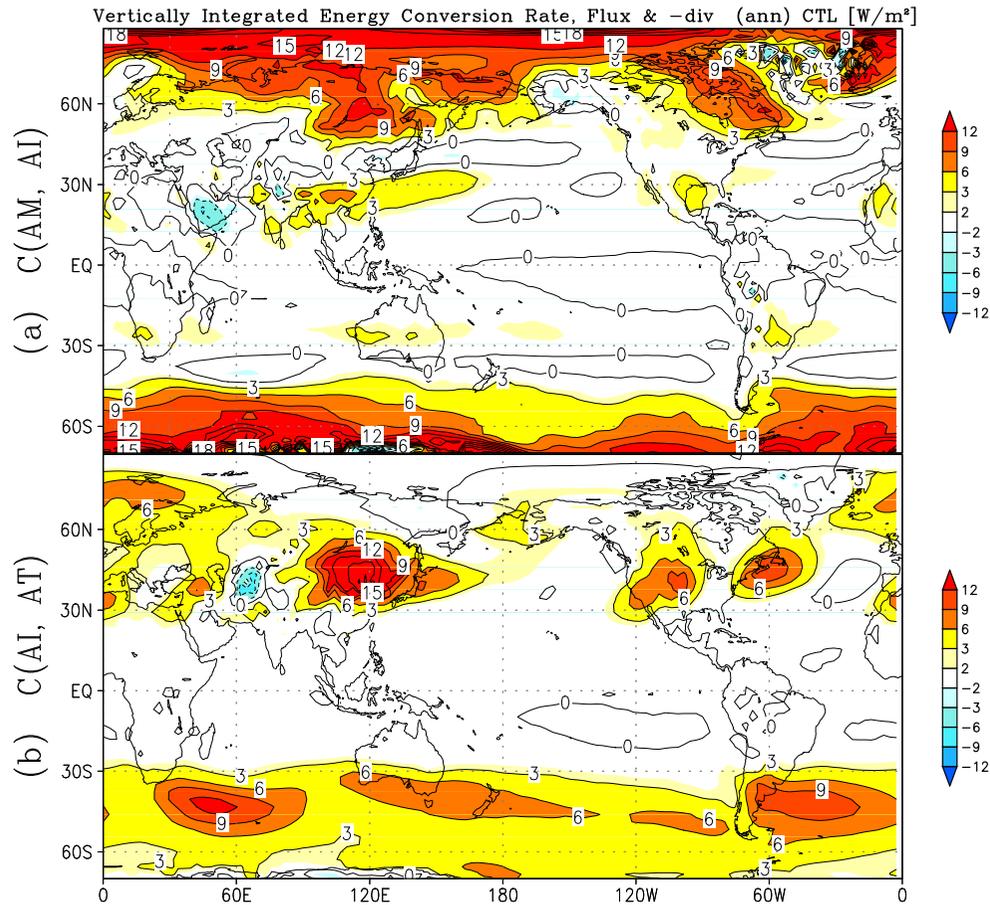
局所 or 開領域では？



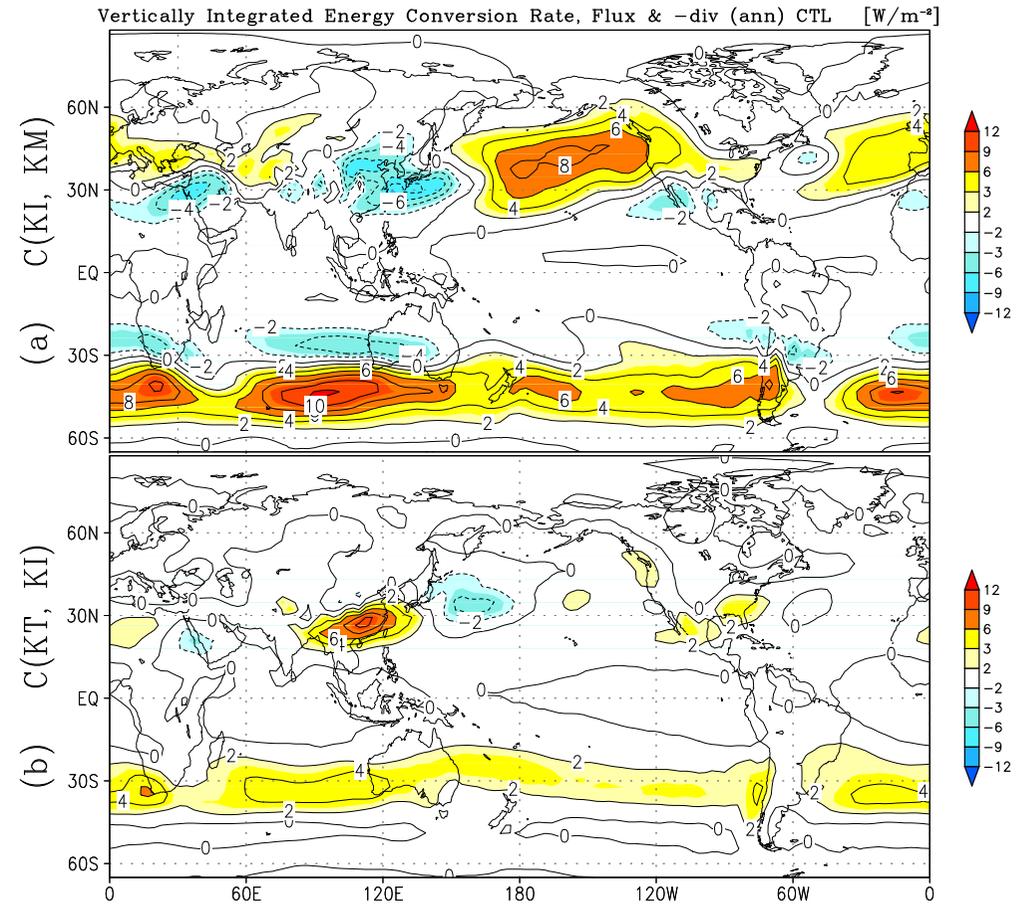
これは本当？

2. エネルギー変換を局所的にみると

傾圧変換



順圧変換



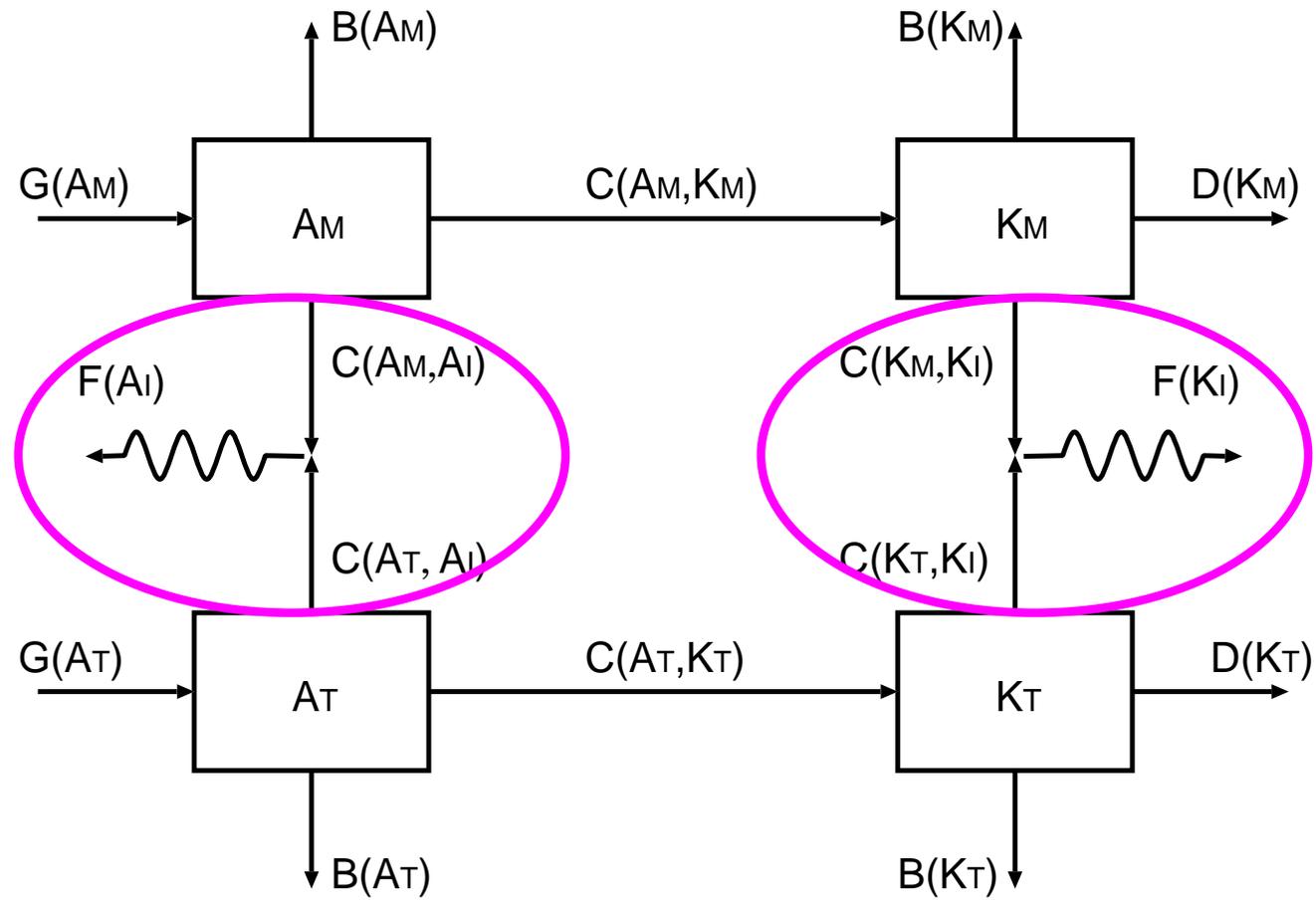
傾圧変換・順圧変換は其々二種類の書き方が出来る

両者の空間パターンは明らかに異なる

変換の方向が逆転する場所がある (特に順圧変換)

3. 局所エネルギー相互作用ダイアグラム

新たに付け加わった部分



$$\frac{\partial A_M}{\partial t} = G(A_M) - C(A_M, K_M) - C(A_M, A_I) - B(A_M) + R(A_M)$$

$$\frac{\partial A_T}{\partial t} = G(A_T) - C(A_T, K_T) - C(A_T, A_I) - B(A_T)$$

$$\frac{\partial A_I}{\partial t} = 0 = C(A_M, A_I) + C(A_T, A_I) - F(A_I)$$

$$\frac{\partial K_M}{\partial t} = C(A_M, K_M) - C(K_M, K_I) - D(K_M) - B(K_M)$$

$$\frac{\partial K_T}{\partial t} = C(A_T, K_T) - C(K_T, K_I) - D(K_T) - B(K_T)$$

$$\frac{\partial K_I}{\partial t} = 0 = C(K_M, K_I) + C(K_T, K_I) - F(K_I)$$

エネルギー収支方程式は 6 本

4. 相互作用エネルギーとそのフラックス

運動エネルギー方程式 flux 形式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \text{div} \left\{ \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) \mathbf{u} + \Phi \mathbf{u} \right\} = -\alpha \omega + \mathbf{u} \cdot \mathcal{F}$$

運動エネルギーの分割

KEフラックスの分割

$$K = \frac{(\bar{u} + u')^2 + (\bar{v} + v')^2}{2} = \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2} + \frac{u'^2 + v'^2}{2} + (\bar{u}u' + \bar{v}v')$$

$$= K_M + K_T + K_I$$

$$\overline{K\mathbf{u}} = \overline{(K_M + K_T + K_I)(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')}$$

$$= K_M \bar{\mathbf{u}} + \bar{K}_T \bar{\mathbf{u}} + \overline{K_T \mathbf{u}'} + \overline{K_I \mathbf{u}'}$$

時間平均をとると K_I は消えるが $K_I u'$ は消えない

時間平均KE方程式 を平均と擾乱に分けようとするれば $K_I u'$ の項が余る

$$\frac{\partial (K_M + \bar{K}_T)}{\partial t} + \text{div} (K_M \bar{\mathbf{u}} + \bar{K}_T \bar{\mathbf{u}} + \overline{K_T \mathbf{u}'} + \overline{K_I \mathbf{u}'}) + \text{div} (\bar{\Phi} \bar{\mathbf{u}} + \overline{\Phi' \mathbf{u}'})$$

$$= -\bar{\alpha} \bar{\omega} - \overline{\alpha' \omega'} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathcal{F}} + \overline{\mathbf{u}' \cdot \mathcal{F}'}$$

しかし $\text{div } K_I u'$ は次のように
分割できる

$$\text{div } \overline{K_I \mathbf{u}'} = \bar{u} \text{div } \overline{u' \mathbf{u}'} + \bar{v} \text{div } \overline{v' \mathbf{u}'} + \overline{u' \mathbf{u}'} \cdot \text{grad } \bar{u} + \overline{v' \mathbf{u}'} \cdot \text{grad } \bar{v}$$

$$= C(K_M, K_I) + C(K_T, K_I)$$

よって

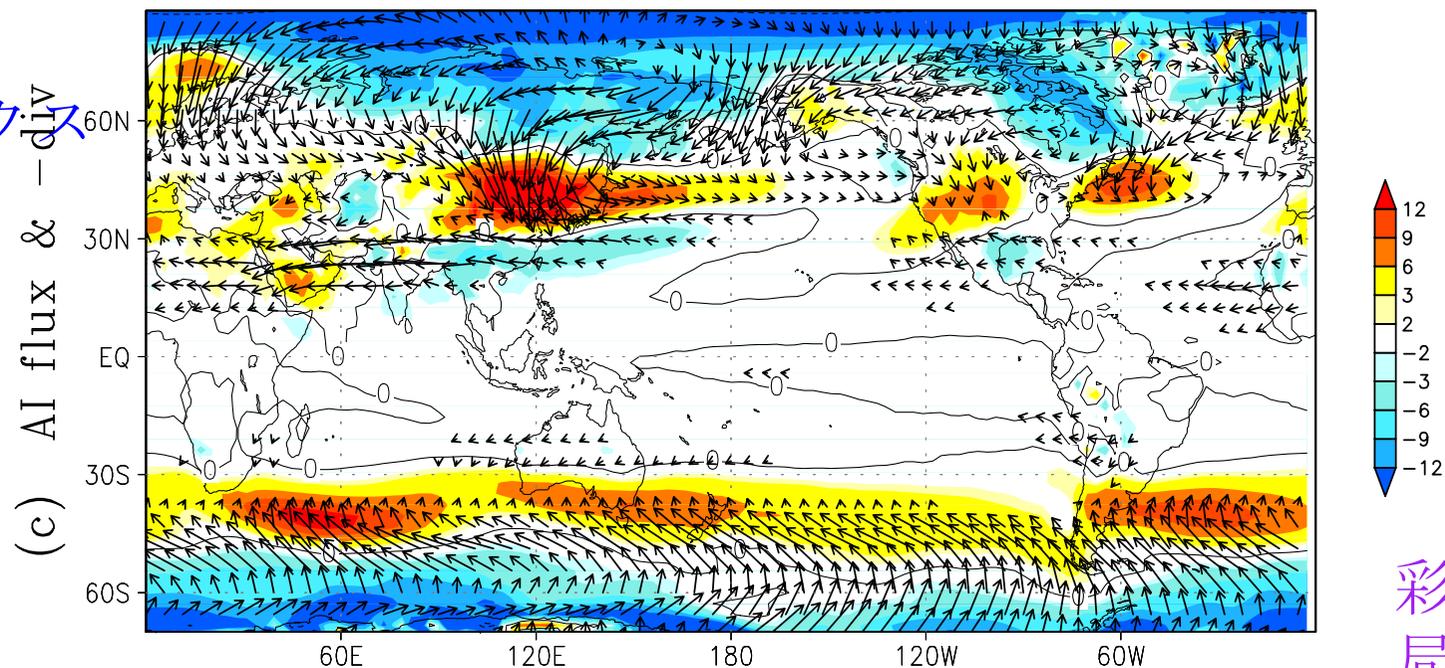
$$\frac{\partial K_M}{\partial t} + \text{div} (K_M \bar{\mathbf{u}} + \bar{\Phi} \bar{\mathbf{u}}) = -\bar{\alpha} \bar{\omega} - C(K_M, K_I) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathcal{F}}$$

$$\frac{\partial \bar{K}_T}{\partial t} + \text{div} (\bar{K}_T \bar{\mathbf{u}} + \overline{K_T \mathbf{u}'} + \overline{\Phi' \mathbf{u}'}) = -\overline{\alpha' \omega'} - C(K_T, K_I) + \overline{\mathbf{u}' \cdot \mathcal{F}'}$$

と分割できる

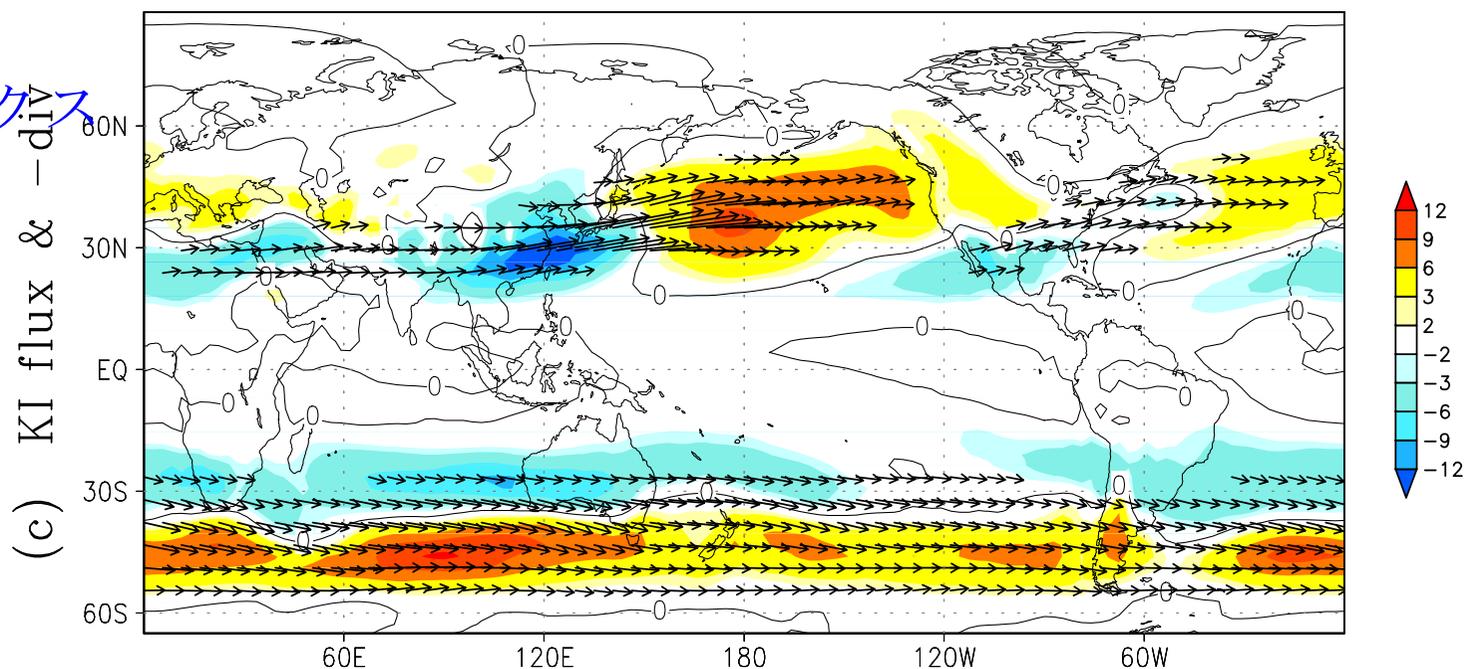
5. AI, KIのフラックスに意味はある？

傾圧変換と
AIフラックス



彩色は2つの
局所表現の差

順圧変換と
KIフラックス



6. ここまでのまとめ

エネルギーサイクルに現れる傾圧・順圧エネルギー変換項を局所的にみればそれぞれ二通りに表現することができる。

それら二通りの局所表現の空間分布は明らかに異なり、伝統的なローレンツダイアグラムでは解釈できない。

C (K I, KM) の空間分布は T r e n b e r t h (1986) の E ベクトルあるいは P l u m b (1986) の M_r の発散の空間分布と似ている (より正確にはそれらに平均場の風速を掛けたもの)。

相互作用エネルギーのフラックスの発散をとるとエネルギー変換項の2つの局所表現が現れ、これによりエネルギー方程式は自然に平均部分と擾乱部分に分割される。

ローレンツダイアグラムを拡張すれば、これらは自然に解釈できる。

疑問点

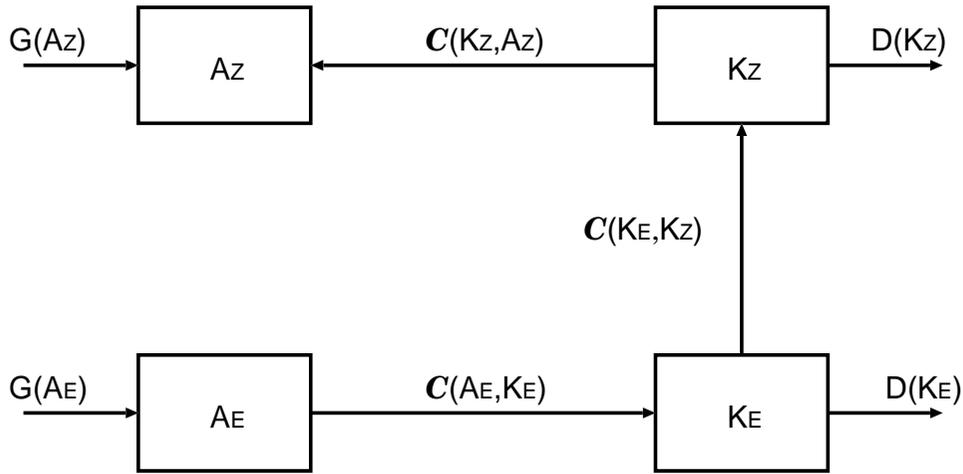
では相互作用エネルギーのフラックスといわゆる (拡張された) E P フラックスとの (理論的な) 関係は?

あるいは P l u m b (1983) の T E M エネルギーサイクルで同じ事を行えばどうなる?

7. TEMエネルギーサイクル

Plumb (1983)

のTEMエネルギーサイクル



EPフラックスの発散が陽に現れるようにエネルギー方程式を変形

傾圧変換項はEPフラックスの発散を用いて表される

QG系では傾圧変換項が消える

ただし論文全体の主張としてはエネルギーサイクルという考え方自体に否定的

Plumb自身はダイアグラムを局所的にも適用可能なものとして定式化しているが、これまでみてきたところに従えば変換項の局所表現の二面性を考慮していない点で不満

そこで、TEMダイアグラムの局所化を試みる

(見通しを良くするためQG系で考え、また平均としては時間平均をとった場合を考える)

8. QG系におけるエネルギー論 (1)

QG方程式系

$$D_g u_g - f_0 v_a - \beta y v_g = \mathcal{F}_x$$

$$D_g v_g + f_0 u_a + \beta y u_g = \mathcal{F}_y$$

$$D_g \frac{\Phi_p}{s(p)} + \omega_a = -\frac{Q}{S(p)}$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial \omega_a}{\partial p} = 0$$

エネルギー方程式

$$D_g \frac{u_g^2 + v_g^2 + \Phi_p^2/S(p)}{2} + \text{div}(\Phi \mathbf{u}_a) = -\frac{\Phi_p Q}{S(p)} + \mathbf{V}_g \cdot \mathcal{F}$$

$$\overline{D}_g \mathcal{E}_M + \text{div}(\overline{\Phi \mathbf{u}_a}) = -\nabla \overline{\psi} \cdot \overline{D'_g \tilde{\nabla} \psi'} - \frac{\overline{\Phi_p Q}}{S(p)} + \overline{\mathbf{V}_g} \cdot \overline{\mathcal{F}}$$

$$\overline{D}_g \mathcal{E}_T + \text{div}(\overline{\Phi' \mathbf{u}'_a}) + O(\varepsilon^3) = -u'_g \tilde{\nabla} \psi' \cdot \nabla \overline{v}_g + v'_g \tilde{\nabla} \psi' \cdot \nabla \overline{u}_g + \mathbf{V}'_g \cdot \mathcal{F}' - \frac{\Phi'_p Q'}{S(p)}$$

相互作用項

$$\text{div}(\overline{\mathcal{E}_I \mathbf{V}'_g}) = C(\mathcal{E}_M, \mathcal{E}_I) + \overline{C(\mathcal{E}_T, \mathcal{E}_I)}$$

$$C(\mathcal{E}_M, \mathcal{E}_I) = \overline{u}_g \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'_g u'_g}) + \overline{u}_g \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'_g u'_g}) + \overline{v}_g \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'_g v'_g}) + \overline{v}_g \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'_g v'_g})$$

$$+ \overline{\psi}_p \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_0^2 \overline{u'_g \psi'_p}}{S(p)} \right) + \overline{\psi}_p \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_0^2 \overline{v'_g \psi'_p}}{S(p)} \right)$$

$$C(\mathcal{E}_T, \mathcal{E}_I) = \frac{\partial \overline{u}_g}{\partial x} \overline{u'_g u'_g} + \frac{\partial \overline{u}_g}{\partial y} \overline{v'_g u'_g} + \frac{\partial \overline{v}_g}{\partial x} \overline{u'_g v'_g} + \frac{\partial \overline{v}_g}{\partial y} \overline{v'_g v'_g} + \frac{\partial \overline{\psi}_p}{\partial x} \frac{f_0^2 \overline{u'_g \psi'_p}}{S(p)} + \frac{\partial \overline{\psi}_p}{\partial y} \frac{f_0^2 \overline{v'_g \psi'_p}}{S(p)}$$

9. QG系におけるエネルギー論 (2)

QGPV方程式
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial f_0^2}{\partial p S(p)} \frac{\partial \psi}{\partial p} + f_0 + \beta y\right) = s$$

QGエネルギー
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \frac{f_0^2}{S(p)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \nabla \psi \cdot \tilde{\nabla} \psi$$

QGエネルギー方程式
$$D_g \mathcal{E} + \text{div}(-\psi D_g \tilde{\nabla} \psi) + \text{div}\left(-\beta \frac{\psi^2}{2} \mathbf{i}\right) = -\psi s$$

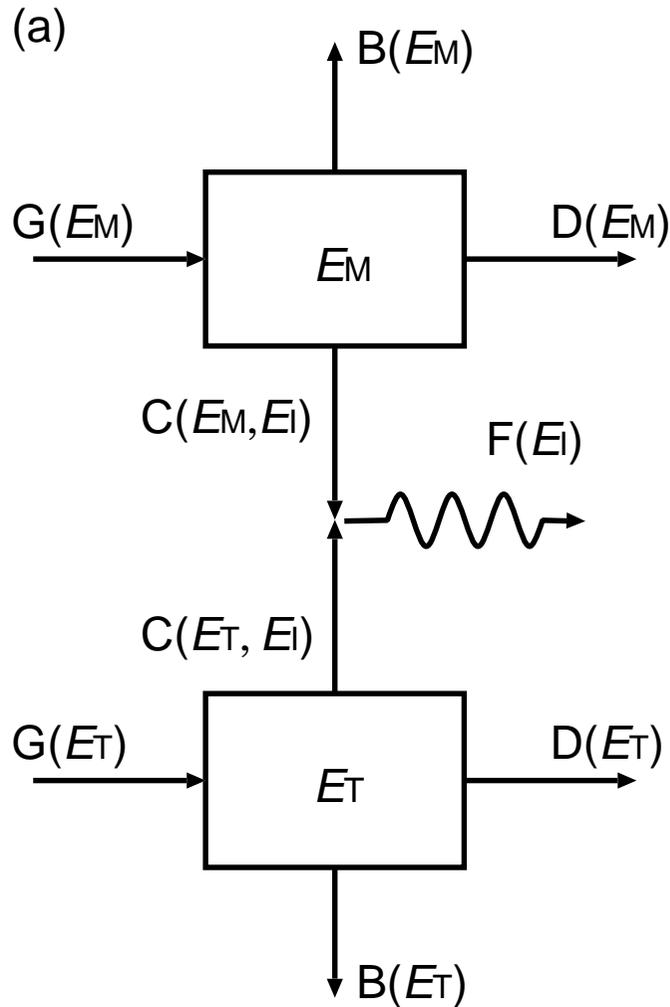
$$\bar{D}_g \mathcal{E}_M + \text{div} \left[-\bar{\psi} \bar{D}_g \tilde{\nabla} \bar{\psi} - (\beta/2) \bar{\psi}^2 \mathbf{i} - \bar{\psi} \bar{u}' q' \mathbf{i} - \bar{\psi} \bar{v}' q' \mathbf{j} \right] = -\bar{v} \bar{u}' q' + \bar{u} \bar{v}' q' - \bar{\psi} \bar{s}$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_g \mathcal{E}_T + \text{div} \left[-\bar{\psi}' \bar{D}_g \tilde{\nabla} \bar{\psi}' \right] + \text{div} \left[-\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{\bar{\psi}'^2}{2} \mathbf{i} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \frac{\bar{\psi}'^2}{2} \mathbf{j} \right] \\ + \text{div} \left[\bar{\psi}' \tilde{\nabla} \bar{\psi}' \cdot \nabla \bar{u} \mathbf{i} + \bar{\psi}' \tilde{\nabla} \bar{\psi}' \cdot \nabla \bar{v} \mathbf{j} \right] = \frac{\partial \bar{\psi}'}{\partial x} \tilde{\nabla} \bar{\psi}' \cdot \nabla \bar{u} + \frac{\partial \bar{\psi}'}{\partial y} \tilde{\nabla} \bar{\psi}' \cdot \nabla \bar{v} - \bar{\psi}' s' \end{aligned}$$

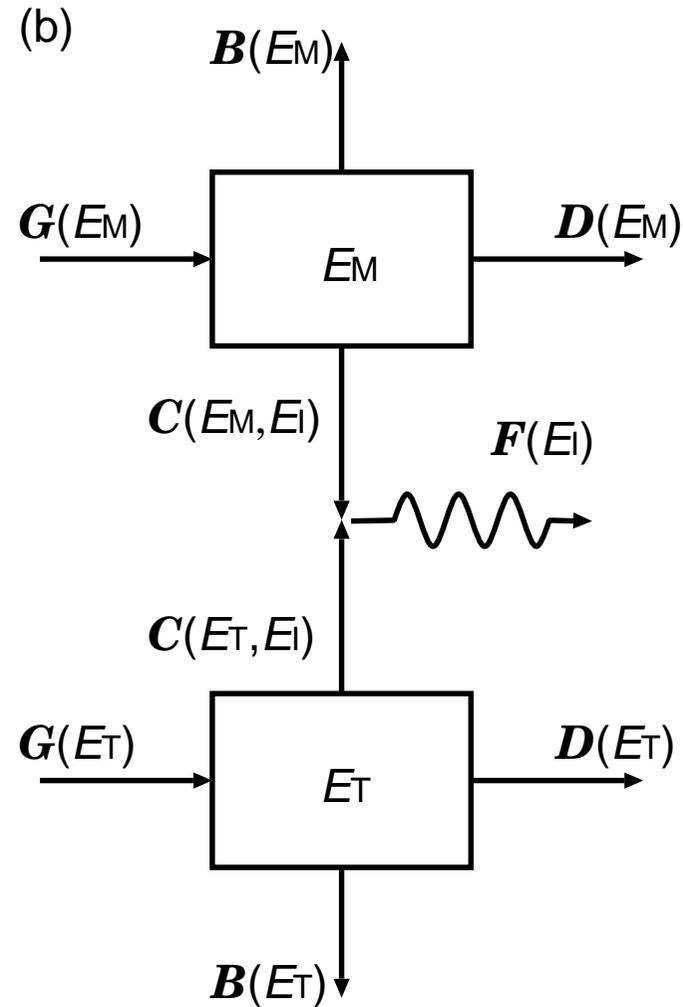
相互作用E方程式
$$-\text{div}(\bar{u}_g \bar{\mathbf{E}}_u + \bar{v}_g \bar{\mathbf{E}}_v) = \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_M, \mathcal{E}_I) + \overline{\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_T, \mathcal{E}_I)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_M, \mathcal{E}_I) &= -(\bar{u}_g \text{div} \bar{\mathbf{E}}_u + \bar{v}_g \text{div} \bar{\mathbf{E}}_v) \\ \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_T, \mathcal{E}_I) &= -(\nabla \bar{u}_g \cdot \bar{\mathbf{E}}_u + \nabla \bar{v}_g \cdot \bar{\mathbf{E}}_v) \end{aligned} \quad \mathbf{E}_u = \begin{bmatrix} v'_g v'_g - \mathcal{E}_T \\ -v'_g u'_g \\ \frac{f_0}{S(p)} v'_g \Phi'_p \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{E}_v = \begin{bmatrix} -u'_g v'_g \\ u'_g u'_g - \mathcal{E}_T \\ -\frac{f_0}{S(p)} u'_g \Phi'_p \end{bmatrix}$$

10. QG系におけるエネルギーダイアグラム



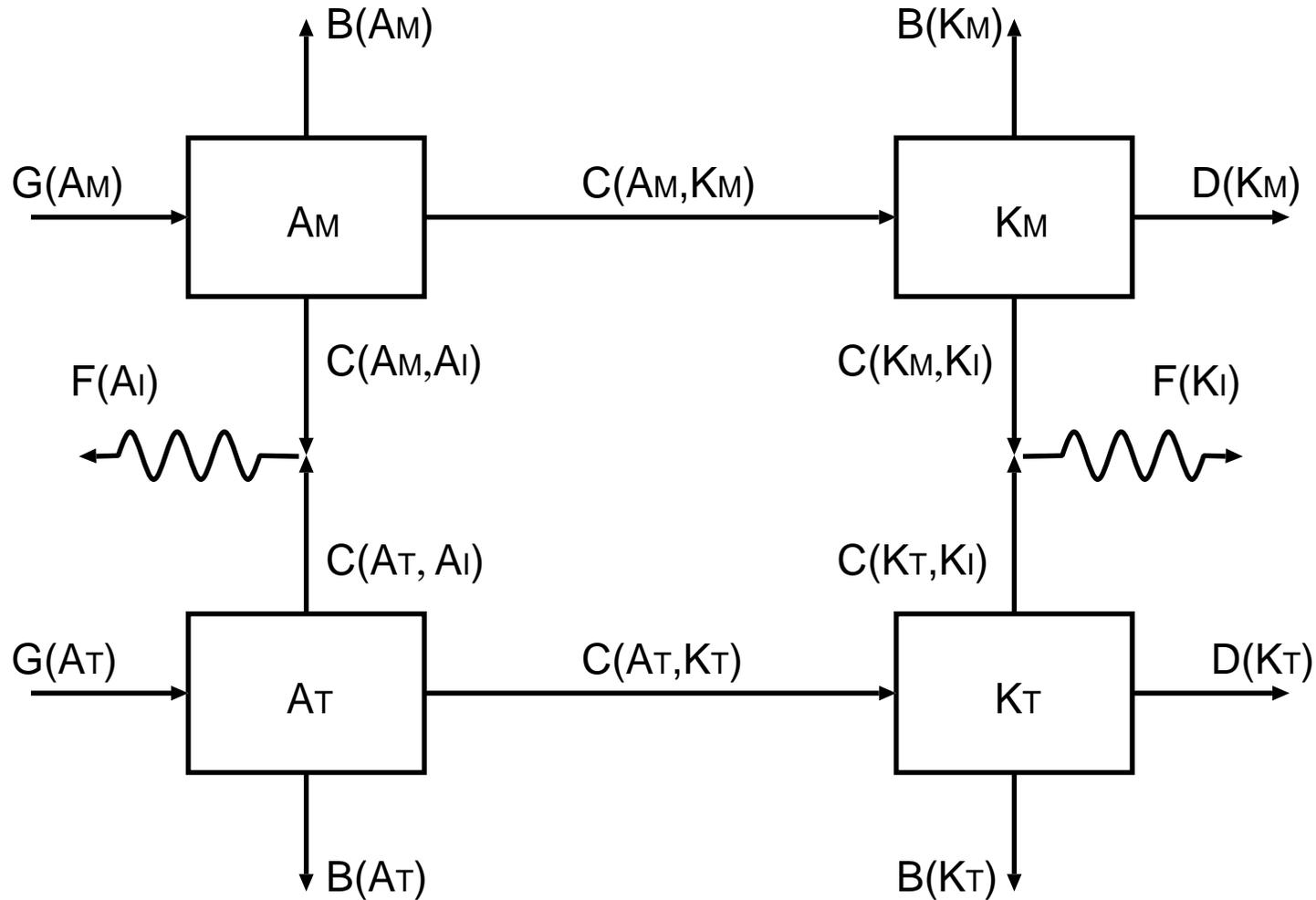
相互作用フラックスは
 $E \ I \ u'$



相互作用フラックスは
 $M \ r \ | \ V \ |$

11. 4 boxダイアグラム (QG系)

前ページのダイアグラム (a) は容易に 4 box に変形できる



(エネルギー収支方程式は省略)

1 3. 局所TEMエネルギーサイクル

$$\frac{\partial K_M}{\partial t} + \text{div}(K_M \bar{\mathbf{V}}_g) + \text{div}(\bar{\Phi} \bar{\mathbf{u}}_a^\#) = \bar{\Phi}_p \bar{\omega}_a^\# + \bar{u}_g \text{div} \bar{\mathbf{E}}_u + \bar{v}_g \text{div} \bar{\mathbf{E}}_v + \bar{\mathbf{V}}_g \cdot \bar{\mathcal{F}}$$

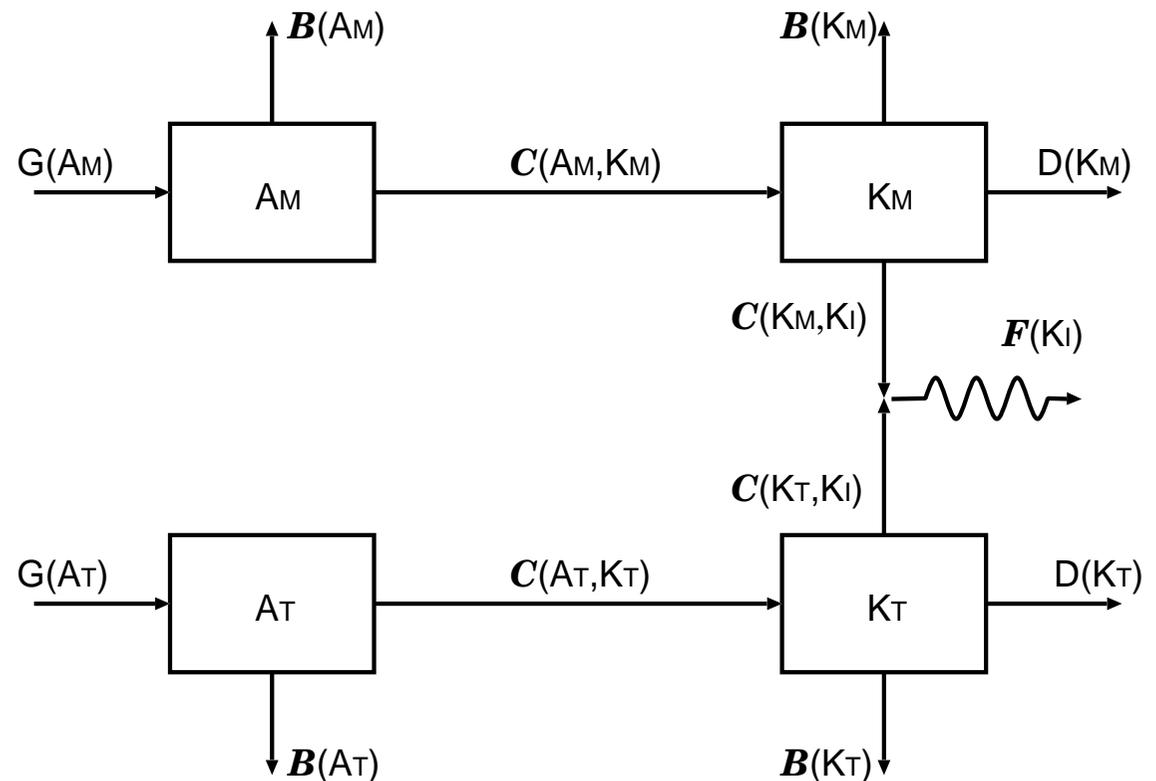
$$\frac{\partial K_T}{\partial t} + \text{div}(K_T \bar{\mathbf{V}}_g) + \text{div}(\Phi' \mathbf{u}'_a) + O(\epsilon^3) = \Phi'_p \omega_a'^\# + \nabla \bar{u}_g \cdot \mathbf{E}_u + \nabla \bar{v}_g \cdot \mathbf{E}_v + \mathbf{V}'_g \cdot \mathcal{F}'$$

$$\frac{\partial A_M}{\partial t} + \text{div}(A_M \bar{\mathbf{V}}_g) = -\bar{\Phi}_p \bar{\omega}_a^\# - \frac{\bar{\Phi}_a \bar{Q}}{S(p)}$$

$$\frac{\partial A_T}{\partial t} + \text{div}(A_T \bar{\mathbf{V}}_g) + O(\epsilon^3) = -\Phi'_p \omega_a'^\# - \frac{\Phi'_a Q'}{S(p)}$$

相互作用K I 方程式はK I フラックス
とMr の関係を与える

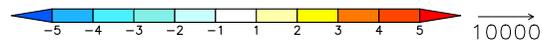
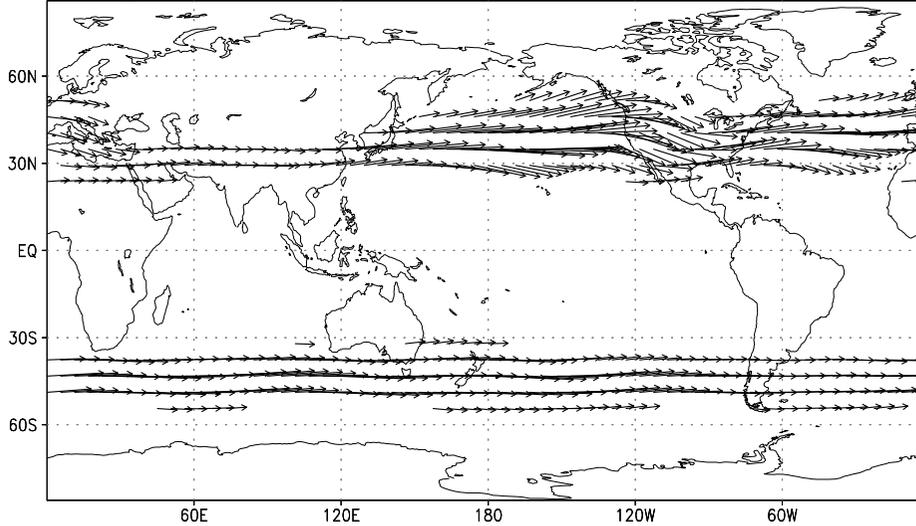
相互作用フラックスは勿論
Plumb の Mr | V |



14. KIフラックスとPlumbのMrフラックス

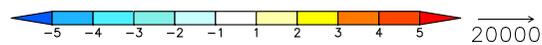
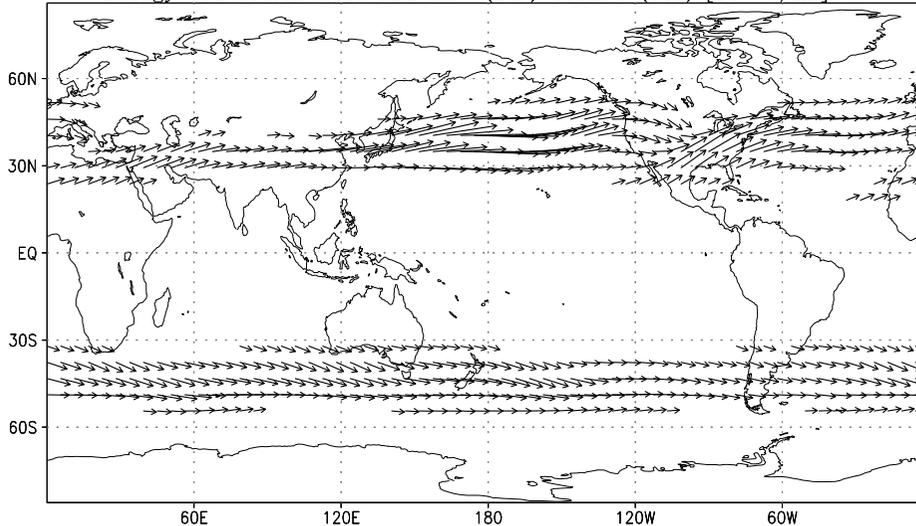
KT-ATフラックス

Energy Conversion Rate and KTF-KAF (DJF) 250hPa (CTL) [10^{-3} W/m 2]



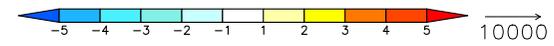
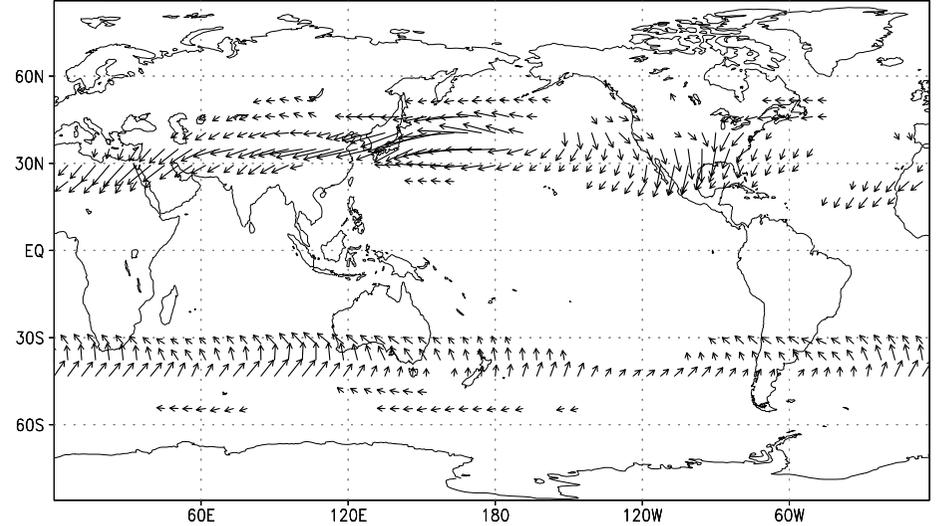
KIフラックス

Energy Conversion Rate and KIF (DJF) 250hPa (CTL) [10^{-3} W/m 2]



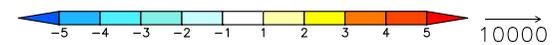
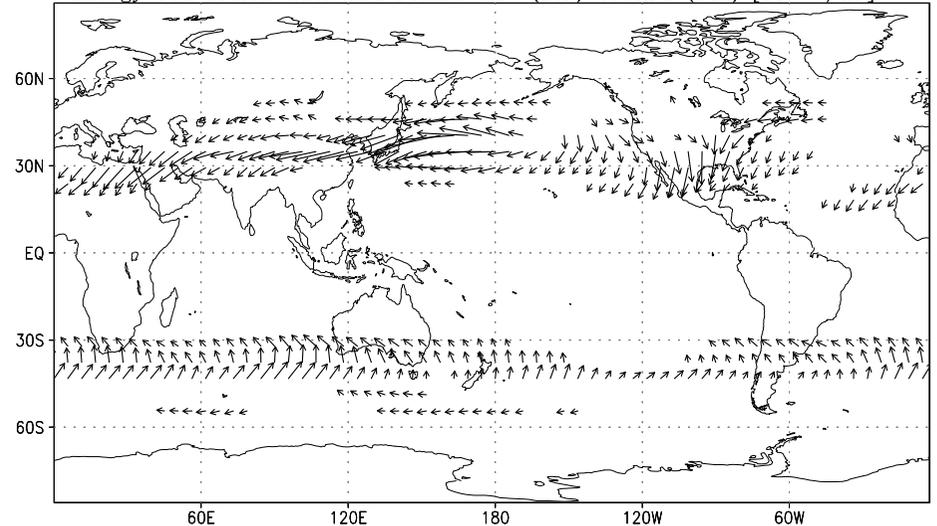
KTF-ATF-KIF

Energy Conversion Rate and KTF-KAF-KIF (DJF) 250hPa (CTL) [10^{-3} W/m 2]



Plumb (1986) Mr | V |

Energy Conversion Rate and Plumb-Mr (DJF) 250hPa (CTL) [10^{-3} W/m 2]



15. まとめ

QG系に対する局所エネルギー相互作用ダイアグラムを考察した。

非地衡風成分を含む形の方程式系からはプリミティブ方程式系の場合と同様のAIフラックスとKIフラックスが得られる。

非地衡風成分を陽に含まないQGPV方程式から出発すれば、相互作用フラックスとしてPlumb (1986) の放射フラックス M_r が自然に現れる。

TEM方程式系からは局所化されたTEMダイアグラムが得られ、この場合の相互作用エネルギー方程式は通常KIフラックスとPlumbの M_r の関係を与える。