

2011年GFDセミナー

大気境界層乱流の数値モデリング

北村 祐二 (気象研究所・物理気象研究部)

kitamura@mri-jma.go.jp

Agenda

0. はじめに

1. Monin-Obukhovの相似則とその利用

2. クロージャ問題とそのモデリング

3. 安定成層でのFlux Richardson数と乱流Prandtl数の同定

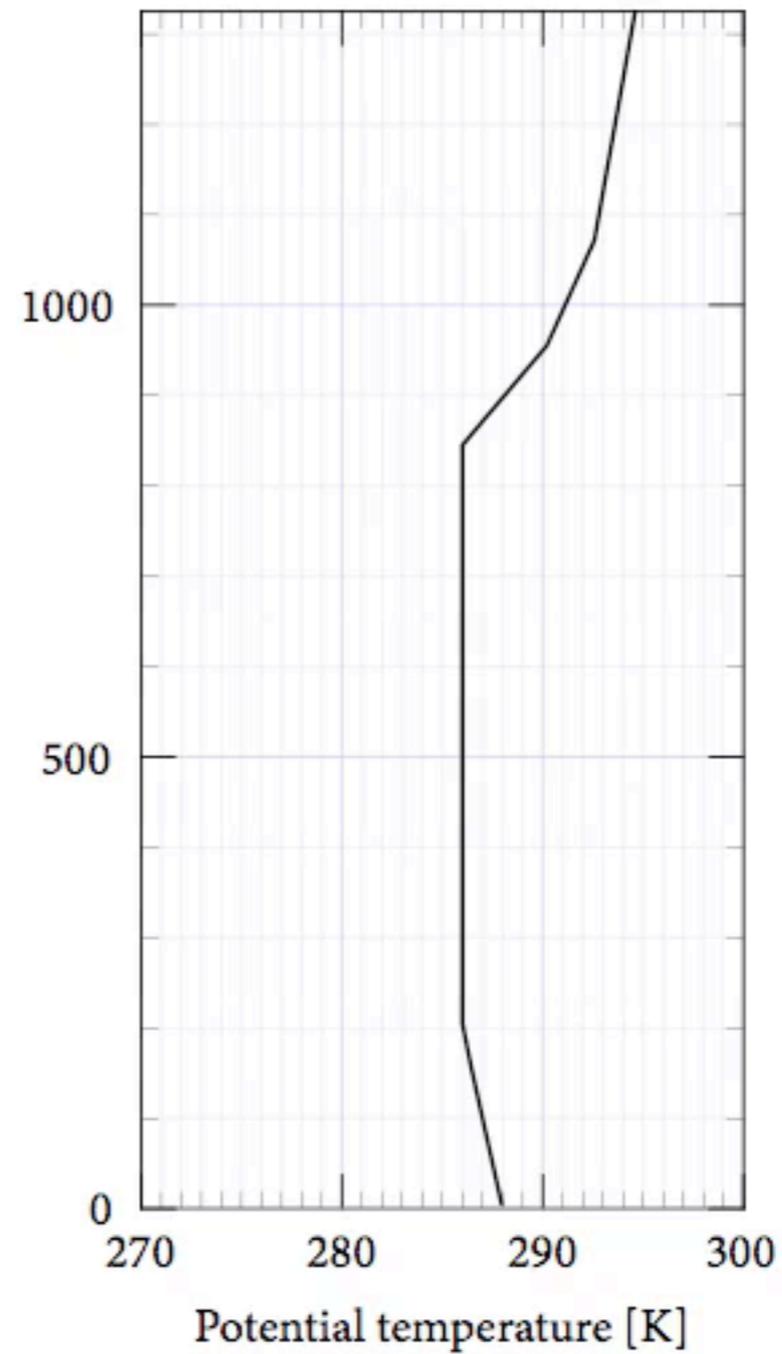
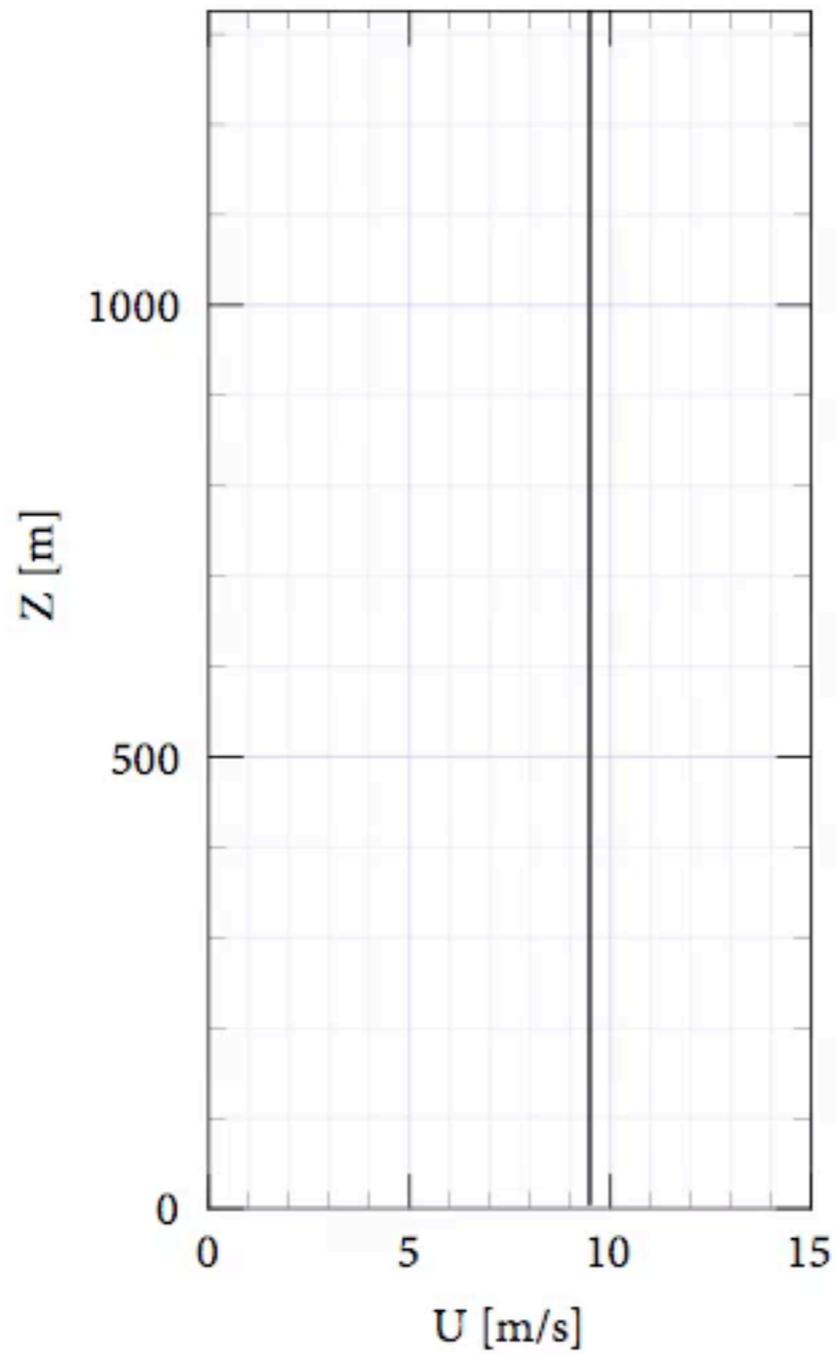
0. はじめに

数値計算の一例

- どんなことができればよいかの一例
 - GABLS2 test caseの計算
 - GEWEXのサブグループによって提案された大気境界層の相互比較プロジェクト
(<http://people.su.se/~gsven/gabls/>)
 - 大気境界層の日変化の鉛直1次元モデルによるシミュレーション.
 - ベンチマークの一つとして有効.

GABLS2 test case

Time = 16:00



大気境界層の数値計算

なにが必要？

比較的はっきりしている。

どうしたらいいか？

あまりよく分かっていない。

なにが必要か？

- 数値計算では有限のものしか扱えない.
 - 離散化が必要.
 - 離散化によって、**扱えるものと扱えないもの**が出てくる.
 - 扱えないものが、とるに足らないものなら無視しても良い近似となりえるが...

支配方程式

- 非圧縮・Boussinesq系:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{g\theta}{\theta_0} \delta_{i3} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right),$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

(NB) p, θ は静水圧平衡からのずれ.

- 扱えるものと扱えないものを明確にするため, 従属変数の粗視化(なんらかの平均操作)を施す.

支配方程式

- 粗視化をすると,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{g \bar{\theta}}{\theta_0} \delta_{i3} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right),$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tau_{\theta j}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right),$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0,$$

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j, \quad \tau_{\theta j} = \overline{\theta u_j} - \bar{\theta} \bar{u}_j.$$

分子粘性・熱拡散項

粗視化によって加わった項

粗視化によって生じた項

- この寄与を無視できるか?
 - 粗視化の空間スケールに依存する.
 - 流体運動をどれだけ解像できているか?
- 流体運動の空間スケールの下限値なるものは存在するのか?
 - 答えはYes.
 - 分子粘性が存在するため.

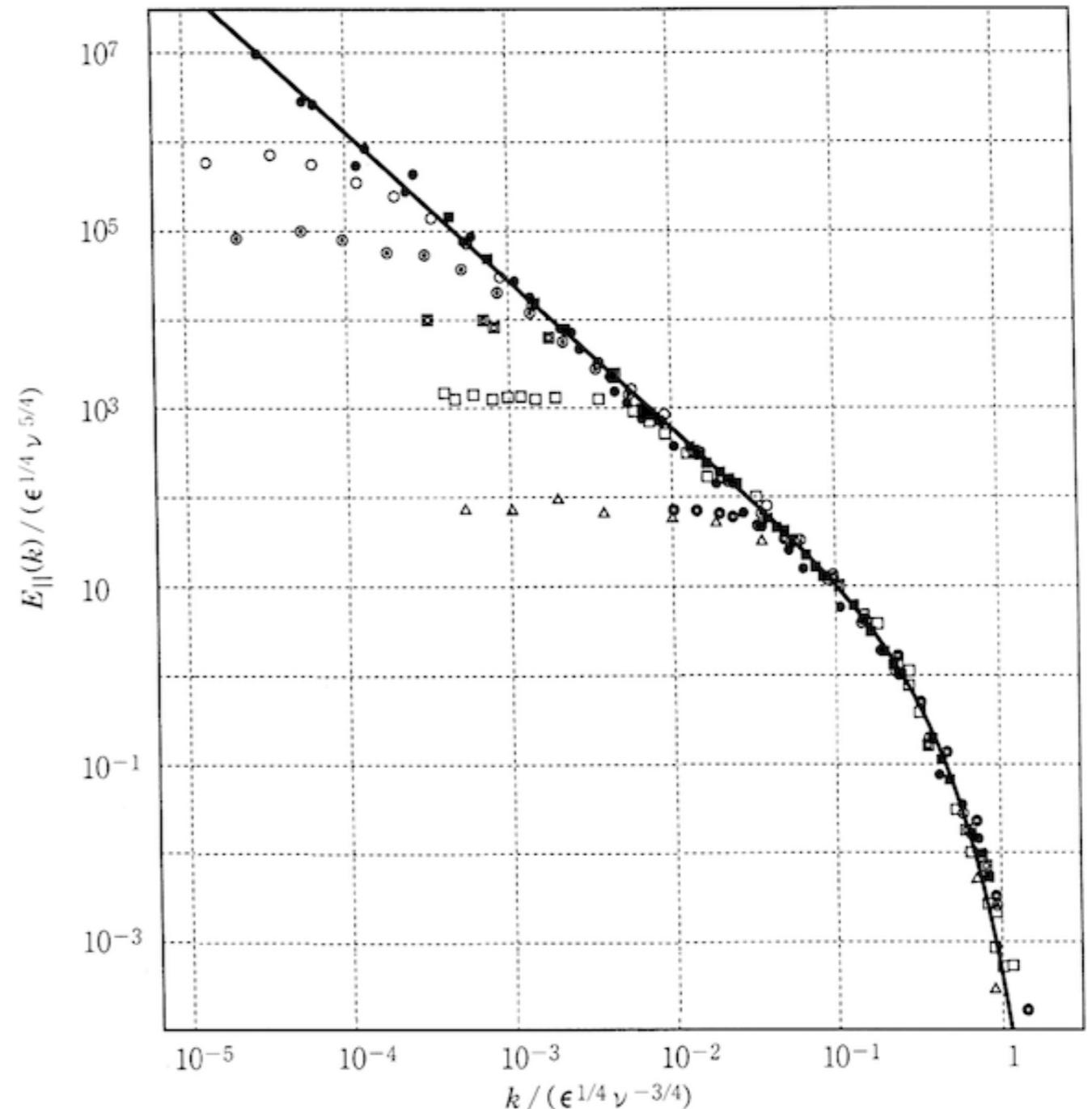
The Kolmogorov length

- 流体運動の空間スケール
の下限:
Kolmogorov length =
 $(\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \sim O(10^{-3}\text{m})$

$$\nu = 1.4 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

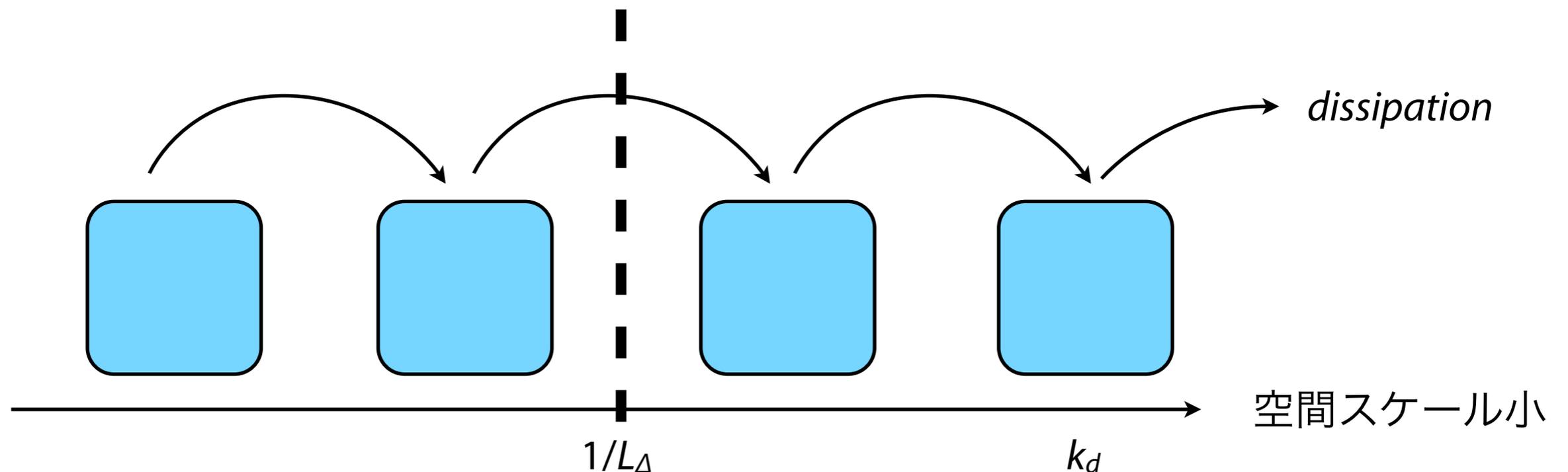
$$\varepsilon \sim O(10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-3})$$

(Lilly et al. 1974)



エネルギーカスケード

- スケール間の相互作用は、エネルギーをより小さいスケールに輸送。
- $\tau_{ij}, \tau_{\theta j}$ は格子スケールから格子内スケールへのエネルギー輸送を担う。



粗視化によって生じた項

- 分子粘性が本質的な役割を果たす空間スケールを解像できない限り, 粗視化の影響は無視できない.
 - $\tau_{ij}, \tau_{\theta j}$ は格子スケールから格子内スケールへのエネルギー輸送を担う.
- $\tau_{ij}, \tau_{\theta j}$ は未知の変数であることに注意.
 - これらを「解く」という作業が必要.
 - クロージャ問題

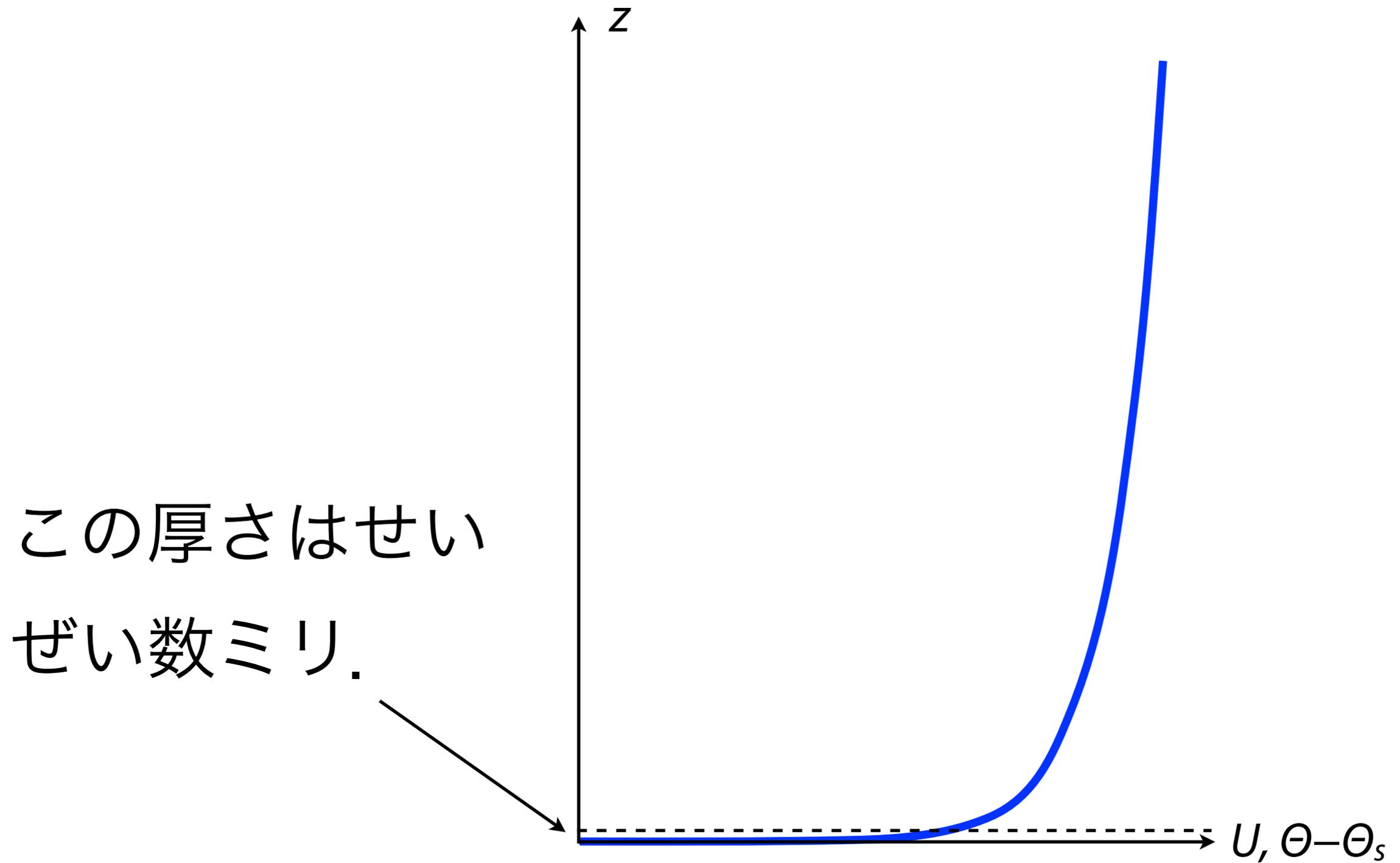
分子粘性・分子熱拡散

- 分子粘性・分子熱拡散は、空間スケールが小さくない限り、直接的にはほとんど寄与しない。
- では、 τ_{ij} , $\tau_{\theta j}$ を考慮しさえすれば、分子粘性・分子熱拡散項を完全に無視しても良いのか？
- 地表面との運動量・熱の交換は、分子粘性・分子熱拡散項のみを通じてなされるので、やはり無視できない。
 - τ_{ij} , $\tau_{\theta j}$ は地表面ではゼロになることに注意。

分子粘性・分子熱拡散

- 分子粘性が重要となる空間スケール $\delta \sim O(10^{-3}\text{m})$
 - 地表面からこの空間スケールの範囲でのみ，風速・温度の鉛直勾配が大きくなる。
- 気象の数値モデルでは，格子間隔 Δz はせいぜい $O(1\text{m}) \sim O(10\text{m})$
- (問) $\delta/\Delta z \ll 1$ のときに分子粘性を差分で評価するとどういう誤謬をもたらすか？

鉛直プロファイルのイメージ



分子粘性・分子熱拡散

- 分子粘性・分子熱拡散をそのまま数値的に評価するのは、気象モデルでは非現実的。
 - $\delta/\Delta z \ll 1$ では、実質的に評価できない。
 - 地表面は、植生などを考えると境界条件が非常に複雑なうえ、そもそも解像できない。
- 別の方法で地表面との運動量・熱の交換を表現する必要がある。
 - Monin-Obukhovの相似則

なにが必要か?の答え

- 地表面状態が与えられたときに,
 - 地表面との運動量・熱の交換を評価すること.
 - 粗視化によって生じた未知の変数 τ_{ij} , $\tau_{\theta j}$ を評価すること.
- いずれも, 支配方程式に加えて**何らかの仮定**が必要.
 - 気象モデルではKolmogorov lengthよりも数値モデルの空間分解能がはるかに荒いため.

少しだけコメント

- 境界層の数値モデリングの話は分かりづらい, とよく言われます.
 - 「説明が悪い」というのもありますが,
 - 自明でない仮定が必要.
 - どのように扱うか(個々の計算スキーム)の話は知っていても, それが何の目的で何をしてるのか?
- (Mellor and Yamadaモデルの)山田先生のお言葉.

“Science and Art”

1. Monin-Obukhovの相似則とその利用

はじめに

- Monin-Obukhovの相似則について議論する.
- Buckinghamの Π 定理が基礎となる.
 - Buckingham, E., 1914: On physically similar systems: illustrations of the use of dimensional equations. *Phys. Rev.*, 4, 345-376.
 - 原論文はGeoff Vallisのwebページから入手可能:
(<http://aos.princeton.edu/WWWPUBLIC/gkv/history/general.html>)

The Buckingham pi Theorem

- n 個の物理量 q_1, \dots, q_n , k 個の単位で記述される系

- 物理量の関係が

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

で表されるとき, $p = n - k$ 個の独立な無次元量 π_1, \dots, π_p

が q_1, \dots, q_n が構成できて,

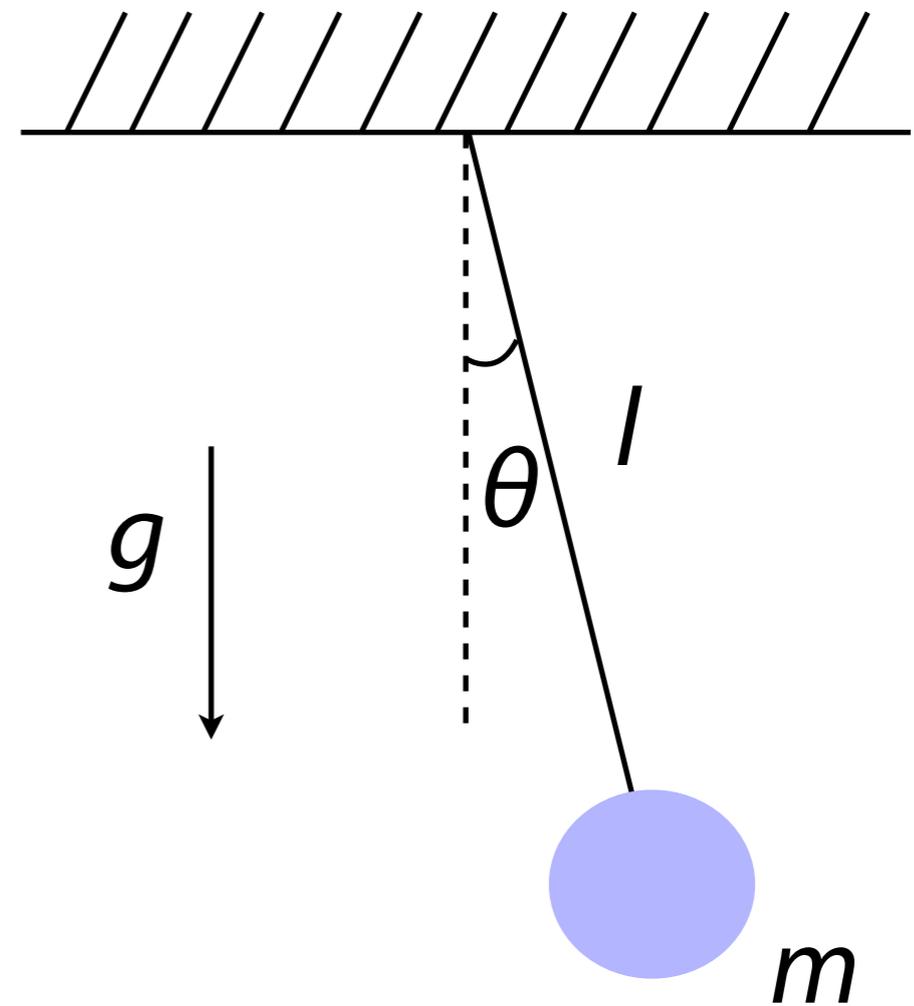
$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p) = 0$$

の形で記述することができる.

- 無次元量 π_1, \dots, π_p の選び方は一意とは限らないことに注意.

相似則の簡単な例

- 振り子の周期は?
- 紐の長さ l [m], おもりの質量 m [kg], 重力加速度 g [ms^{-2}].
- 周期 T の単位は「時間」.
- 時間の単位を作るには, $(l/g)^{1/2}$ とすれば良い.
- したがって, $T \propto \sqrt{l/g}$.
- 運動方程式を解かずに評価していることが重要.



中立成層の時の相似則

- 密度 ρ の流体が地面から受ける応力を σ とする.
- 粘性を直接受ける領域より上側では, 速度分布は粘性係数ではなくて, むしろ σ で特徴づけられる.
- $U(z)$ の分布が ρ, σ, z のみで特徴づけられるとすると, 次元解析から,

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z}, \quad u_* := \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}.$$

が得られる. u_* は摩擦速度, κ はカルマン定数(0.4程度の値).

対数速度分布

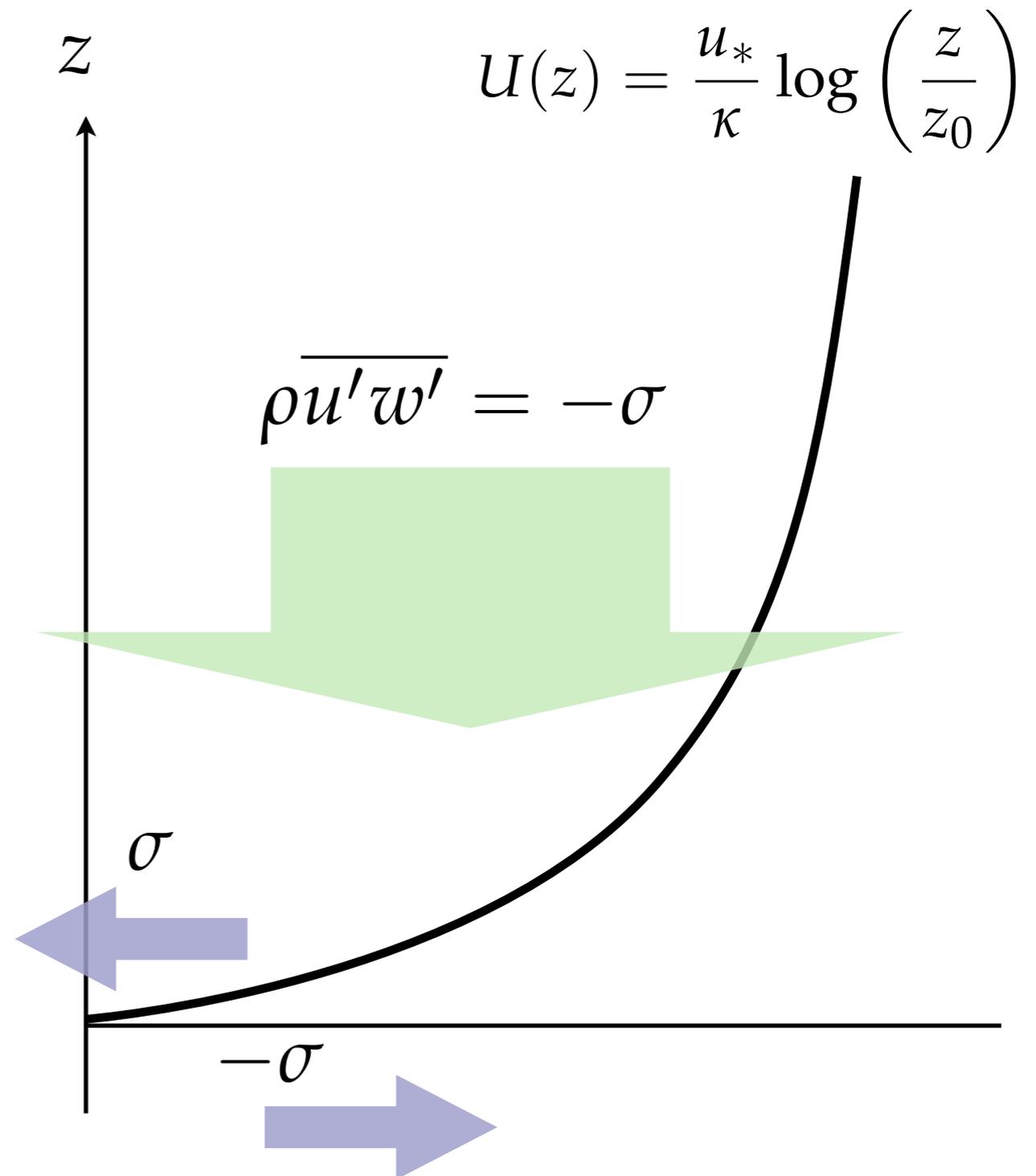
- 鉛直方向に積分すると,

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \log \left(\frac{z}{z_0} \right).$$

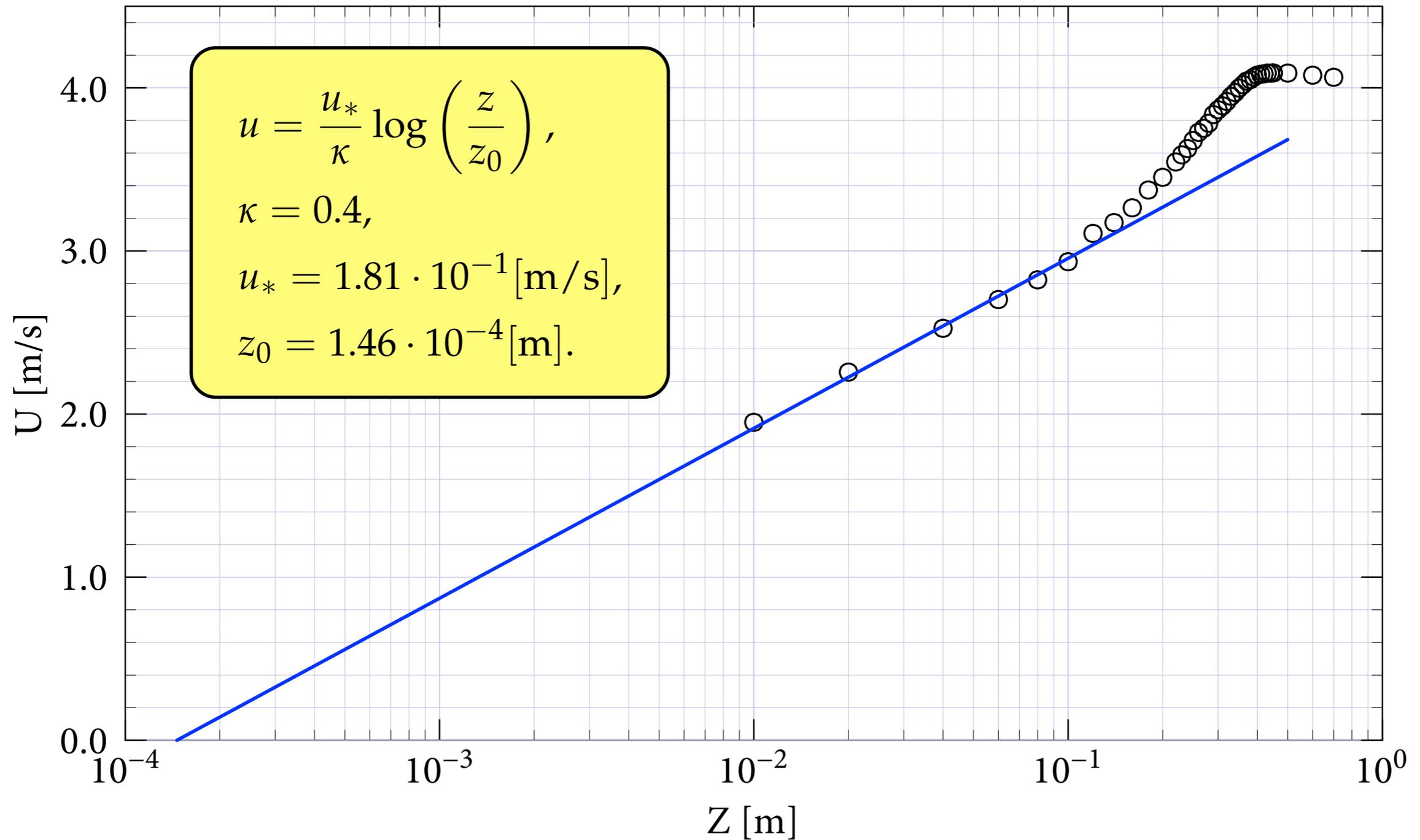
z_0 は(空気力学的)粗度.

- 定常状態となるためには, 乱流によって運動量が下向きに輸送される必要がある:

$$\overline{u'w'} = -\frac{\sigma}{\rho} = -u_*^2.$$



対数速度分布の一例



代表的な地表面の粗度

地表面	粗度(m)
水(広くて静かな面)	10^{-6} — 10^{-4}
氷(滑らかな面)	10^{-5}
雪	5.0×10^{-5} — 10^{-3}
砂・砂漠	3.0×10^{-4}
土	0.001 — 0.01
草(草丈0.02 — 0.1m)	0.003 — 0.01
(草丈0.25 — 1.0m)	0.04 — 0.10
農地	0.04 — 0.20
果樹園	0.5 — 1.0
森林	1.0 — 6.0
大都市	2.0

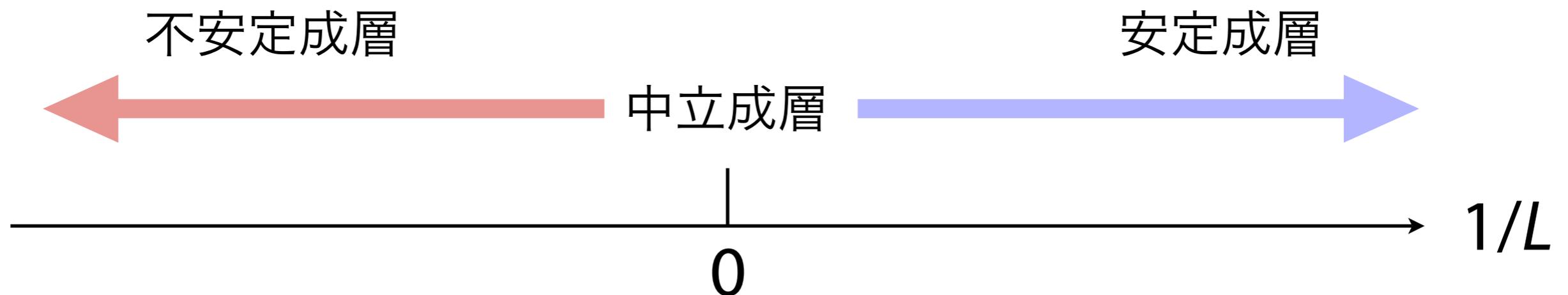
Monin-Obukhovの相似則

- 密度成層を含む場合にどう修正されるべきか?
—————→ Monin-Obukhov(モニン・オブコフ)の相似則
- 平均量は、密度 ρ 、摩擦応力 σ 、温度フラックス Q_0 、浮力パラメータ $-g/\theta_0$ 、高さ z のみで特徴づけられる。
- 温度、速度、長さを代表する量は、

速度	摩擦速度	$u_* := \sqrt{\sigma/\rho}$
温度	摩擦温度	$\theta_* := -Q_0/u_*$
長さ	Monin-Obukhov長	$L := -u_*^3 \Theta_0 / (\kappa g Q_0)$

Monin-Obukhov長について

- Monin-Obukhov長は長さのスケールを持っているが、その物理的意味は**大気の安定度**
 - 熱フラックスの符号によってMonin-Obukhov長は負の値になることもある。
 - $Q_0 > 0$: 地面から大気に熱が輸送
 - $Q_0 < 0$: 大気から地面に熱が輸送



Monin-Obukhovの相似則

- 変数 F について、先の代表的なスケールを用いて次元解析から F と同じ次元の量 F_* を構成する。
- F を F_* によってスケーリングした量は、無次元化した高さ $\zeta = z/L$ の関数で書き表されると仮定する。

$$\frac{F}{F_*} = g_F(\zeta)$$

$g_F(\zeta)$ は普遍関数と呼ばれる。

Monin-Obukhovの相似則

- 平均速度・温度にMonin-Obukhov則を適用すると,

$$\frac{\partial U / \partial z}{u_* / L} = g_m(\zeta), \quad \frac{\partial \Theta / \partial z}{\theta_* / L} = g_h(\zeta).$$

- これら是对数速度分布と対応づける目的で, 通常は以下のように表される:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} \phi_m(\zeta), \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\theta_*}{\kappa z} \phi_h(\zeta),$$

$$\phi_m(\zeta) := \kappa \zeta g_m(\zeta), \quad \phi_h(\zeta) := \kappa \zeta g_h(\zeta).$$

- 普遍関数 $\phi_m(\zeta)$, $\phi_h(\zeta)$ はシア関数とも呼ばれ, $\phi_m(\zeta)$ は中立時に1となる.

シア関数

- (数値モデルで重要な) $|\zeta| < 1$ の関数形は観測から求めた経験式が用いられる。
- ある ζ について、観測から得られるシア関数の値にばらつきは少ない。

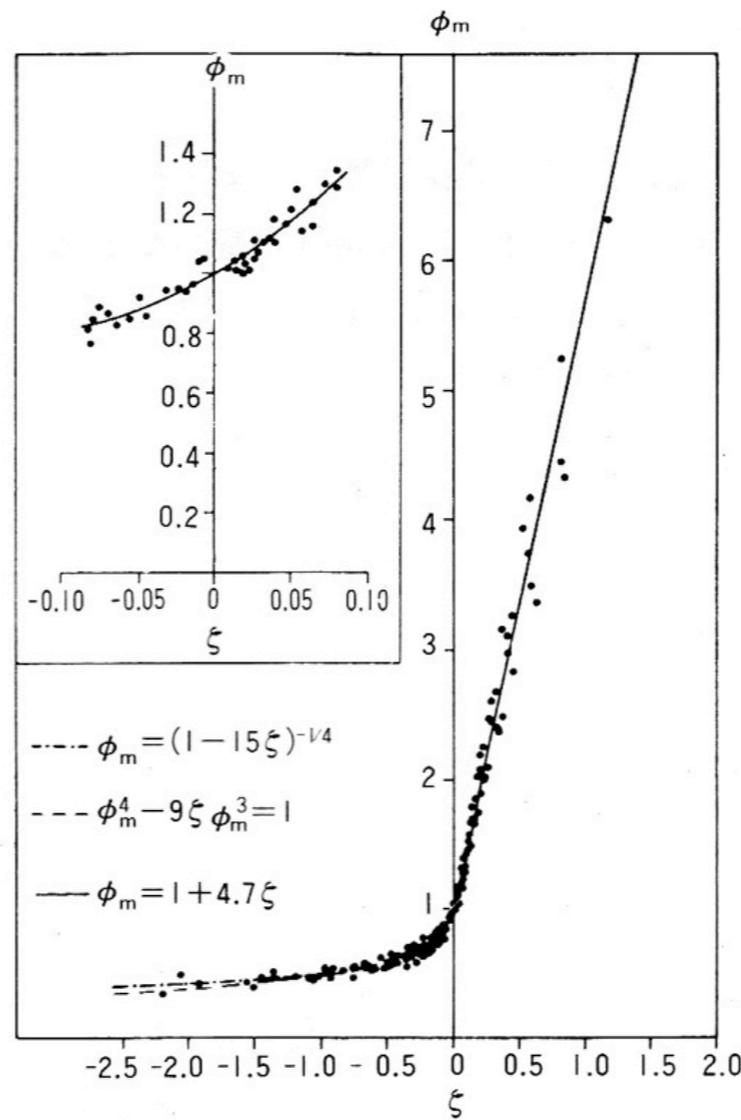


図 1.8 普遍関数 $\phi_m(\zeta)$ の観測値 (Businger *et al.*, 1971).
 $\kappa = 0.35$.

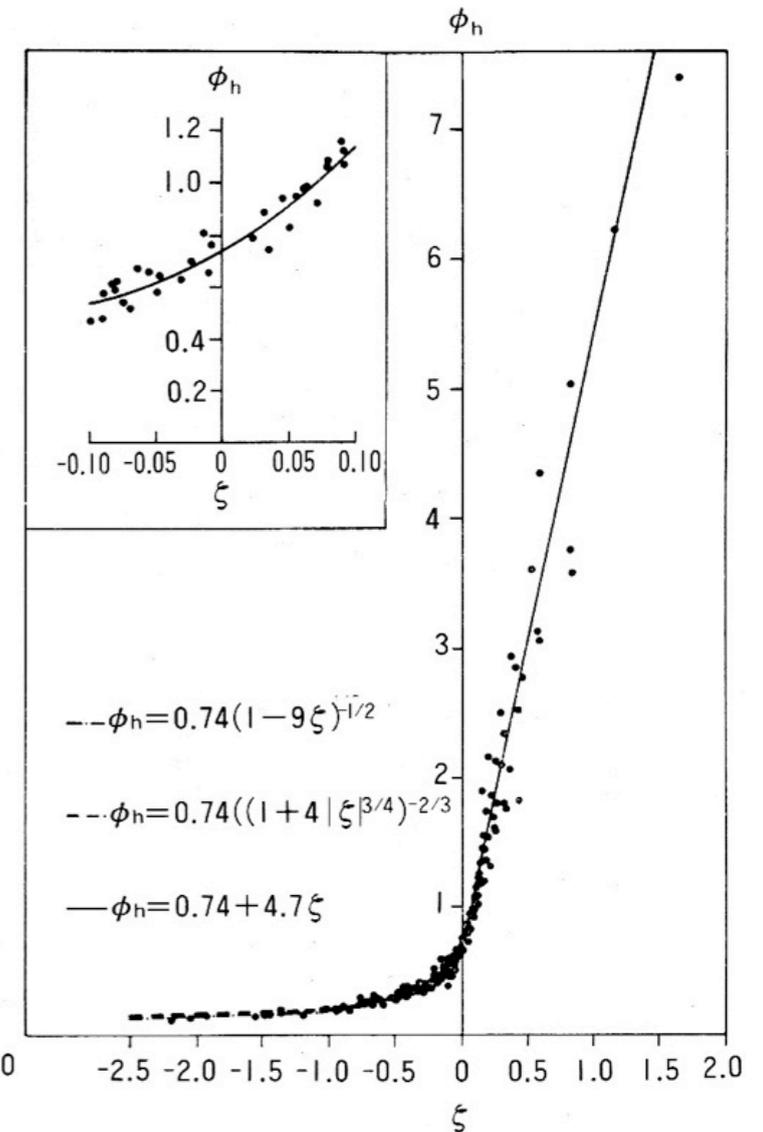


図 1.9 普遍関数 $\phi_h(\zeta)$ の観測値 (Businger *et al.*, 1971).
 $\kappa = 0.35$.

速度・温度の鉛直分布

- $U(z), \Theta(z)$ は積分を実行することで得られる.

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \left[\log \left(\frac{z}{z_{0m}} \right) - \psi_m(\zeta) \right],$$

$$\Theta(z) = \frac{\theta_*}{\kappa} \left[\log \left(\frac{z}{z_{0h}} \right) - \psi_h(\zeta) \right] + \Theta_s.$$

- $\psi_m(\zeta), \psi_h(\zeta)$ は対数速度分布からの**ずれ**

$$\psi_m(\zeta) := \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{1 - \phi_m(\zeta')}{\zeta'} d\zeta',$$

$$\psi_h(\zeta) := \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{1 - \phi_h(\zeta')}{\zeta'} d\zeta'.$$

- 上は u_*, θ_* から $U(z), \Theta(z)$ を求める式.

普遍関数の例

様々な関数形が提案されているが、代表的なもの

- Businger (1971)

$$\psi_m(\zeta) = \begin{cases} -4.7\zeta, & (\zeta \geq 0), \\ \log[(1 + \xi(\zeta))^2(1 + \xi(\zeta)^2)/8] - 2 \tan^{-1} \xi(\zeta) + \pi/2, & (\zeta < 0), \end{cases}$$

$$\psi_h(\zeta) = \begin{cases} -4.7\zeta, & (\zeta \geq 0), \\ 2 \log[(1 + \eta(\zeta))/2], & (\zeta < 0), \end{cases}$$

$$\xi(\zeta) = (1 - 15\zeta)^{1/4}, \quad \eta(\zeta) = (1 - 9\zeta)^{1/2}.$$

- Beljaas and Holtslag (1991)

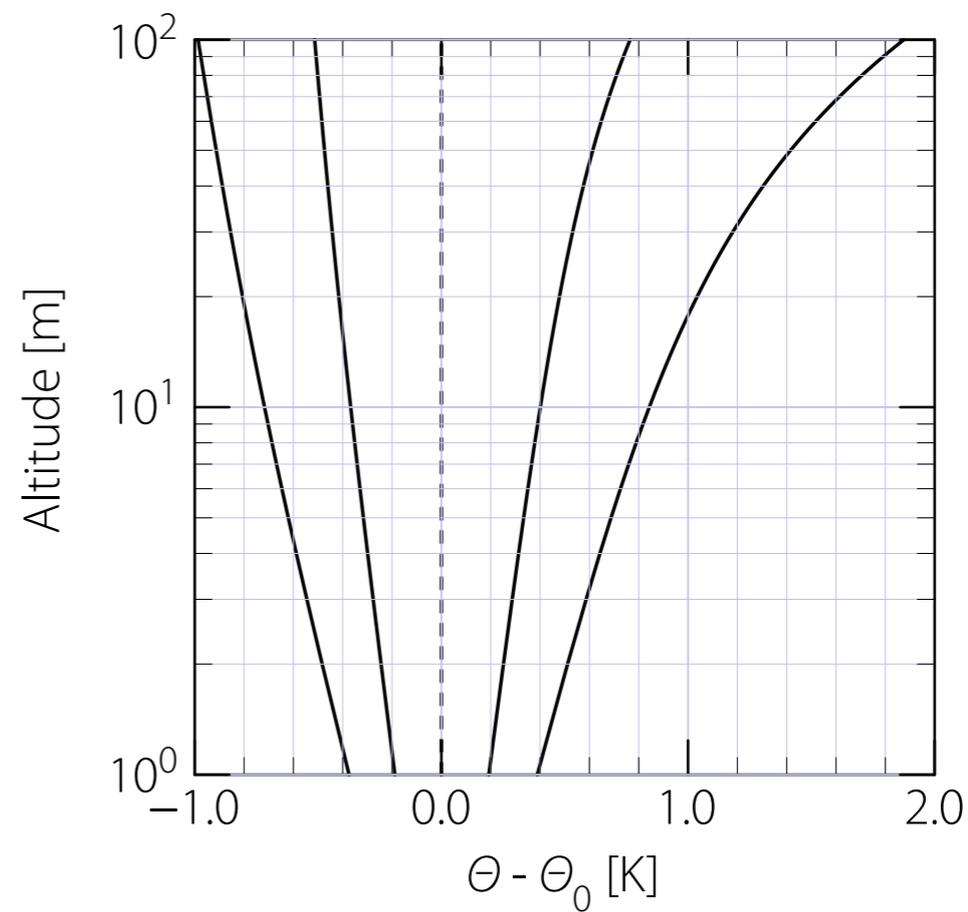
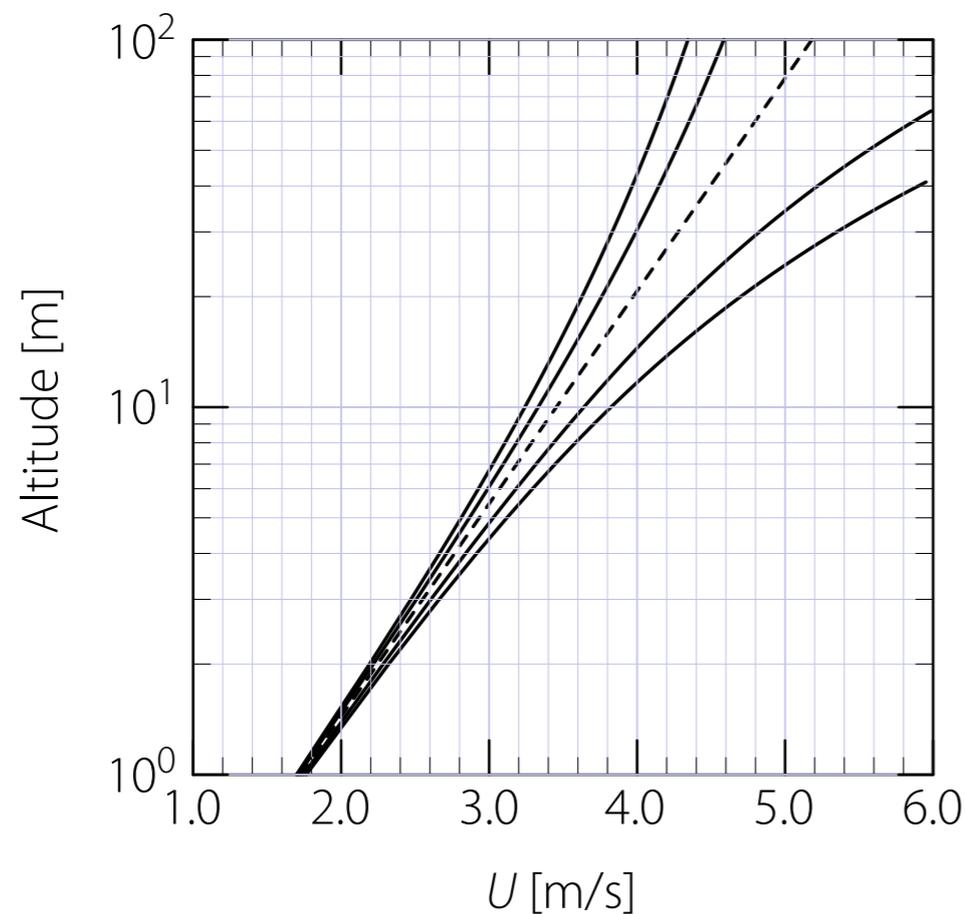
$$\psi_m(\zeta) = \begin{cases} -b(\zeta - c/d) \exp(-d\zeta) - a\zeta - bc/d & (\zeta \geq 0), \\ \log[(1 + \xi(\zeta))^2(1 + \xi(\zeta)^2)/8] - 2 \tan^{-1} \xi(\zeta) + \pi/2, & (\zeta < 0), \end{cases}$$

$$\psi_h(\zeta) = \begin{cases} -b(\zeta - c/d) \exp(-d\zeta) - (1 + 2a\zeta/3)^{3/2} - bc/d + 1, & (\zeta \geq 0), \\ 2 \log[(1 + \xi(\zeta)^2)/2], & (\zeta < 0), \end{cases}$$

$$a = 1, b = 2/3, c = 5, d = 0.35, \xi(\zeta) = (1 - 16\zeta)^{1/4}.$$

速度・温度の鉛直分布の例

- $z_0 = 0.1$ [m], $u^* = 0.3$ [m/s], $\Theta_0 = 288$ [K]として, $L = -100, -200, 100, 200$ [m]と変化させたときの分布
- (問) それぞれの曲線がどの場合に対応するか?(定性的に考えてみてください)



数値モデルの話に移ります

- ここまでの視点:
 - 地表面フラックスが与えられたときに，鉛直プロファイルが成層にどう依存するか?
 - Monin-Obukhov則は，歴史的には**成層がある場合にlog-profileからどうずれるのかが**主な関心事項
- 数値モデル側の要請:
 - 大気側の変数から地表面フラックスを診断したい
 - **逆に解く.**

運動量・温度フラックスの診断

- 地表の運動量 (u_*^2)・温度フラックス ($u_*\theta_*$)を診断するには, $U(z), \Theta(z)$ から u_*, θ_* を求める必要あり.

$$\sigma/\rho = -u_*^2 = -C_m U^2,$$

$$Q_0 = -u_*\theta_* = -C_h |U| (\Theta - \Theta_s),$$

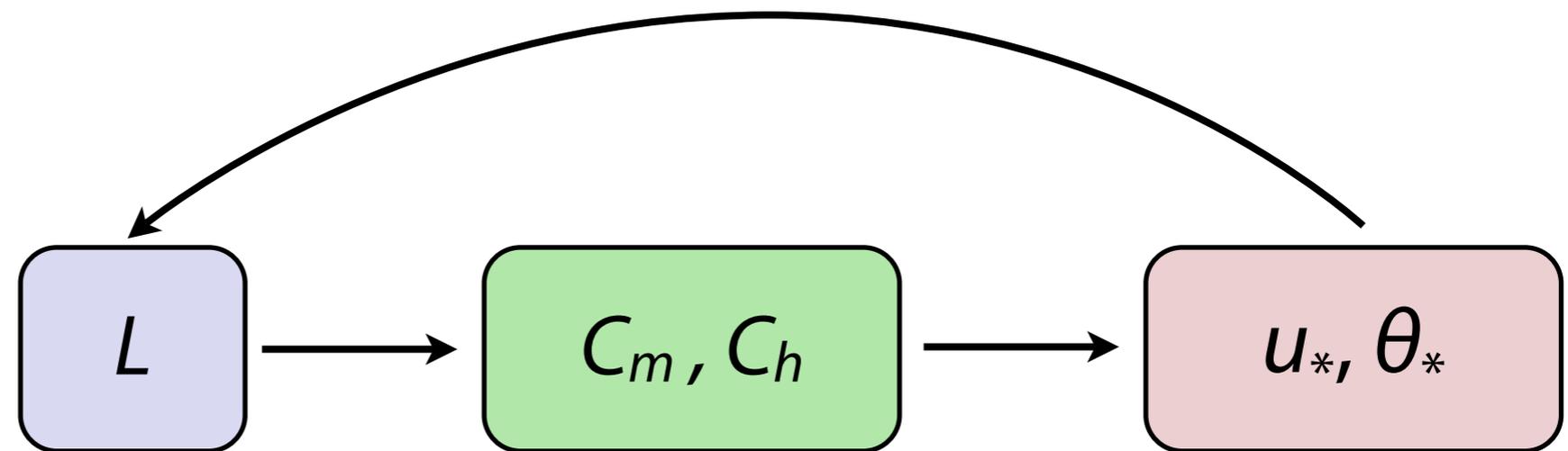
$$C_m = \frac{\kappa^2}{\left[\log \left(\frac{z}{z_{0m}} \right) - \psi_m \left(\frac{z}{L} \right) \right]^2},$$

$$C_h = \frac{\kappa^2}{\left[\log \left(\frac{z}{z_{0m}} \right) - \psi_m \left(\frac{z}{L} \right) \right] \left[\log \left(\frac{z}{z_{0h}} \right) - \psi_h \left(\frac{z}{L} \right) \right]}.$$

- 解くのは簡単?

運動量・温度フラックスの診断

- 答えはNo. 意外と大変.
- バルク係数 C_m, C_h は L の関数.
- L は u_*, θ_* の関数.
- イテレーション(反復)して求める必要あり.

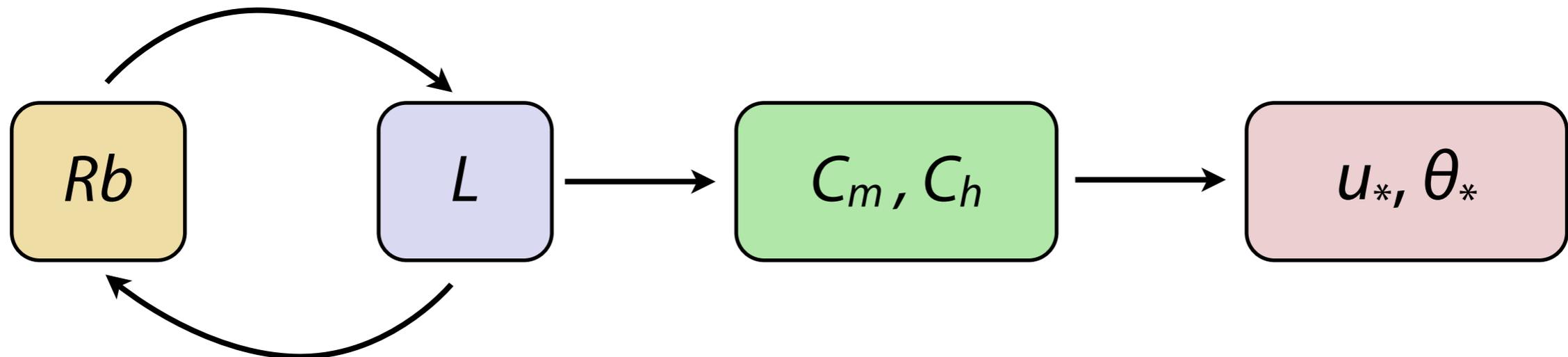


運動量・温度フラックスの診断

- バルクRichardson数を導入するとかなり見通しが良くなる.

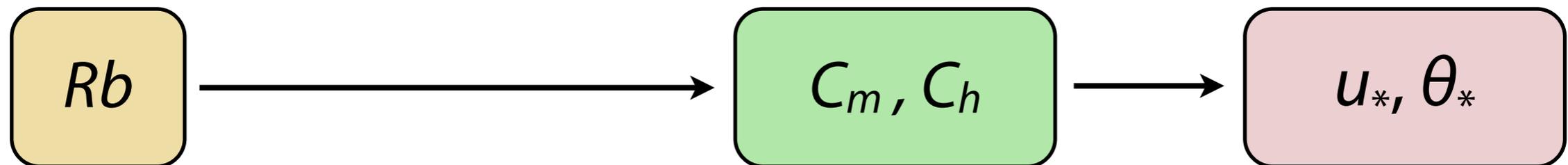
$$Rb := \frac{gz\Theta'}{\Theta_0 U^2} = \frac{z}{L} \frac{\left[\log\left(\frac{z}{z_{0h}}\right) - \psi_h\left(\frac{z}{L}\right) \right]}{\left[\log\left(\frac{z}{z_{0m}}\right) - \psi_m\left(\frac{z}{L}\right) \right]^2}.$$

- バルクRichardsonは直接診断可能な量であることがポイント.



運動量・温度フラックスの診断

- バルク係数をバルクRichardson数の関数として定義できたら...
- イテレーションは不要.
- 経験的につじつまが合うように関係式を求めておけばよい. (Louis 1979, Louis et al. 1982)



Louis (1979)の診断方法

- Businger(1971)の普遍関数がりファレンス.

$$u_*^2 = a_m^2 U^2 F_m(z/z_{0m}, Rb), \quad u_* \theta_* = a_m a_h |U| \Theta' F_h(z/z_{0m}, z/z_{0h}, Rb),$$
$$a_m := \kappa / [\log(z/z_{0m})], \quad a_h := \kappa / [\log(z/z_{0h})],$$

$$F_m \left(\frac{z}{z_{0m}}, Rb \right) = \begin{cases} 1 - \frac{bRb}{1+c_m|Rb|^{1/2}} & Rb < 0 \\ \frac{1}{(1+b'Rb)^2} & Rb \geq 0 \end{cases}$$

$$F_h \left(\frac{z}{z_{0m}}, \frac{z}{z_{0h}}, Rb \right) = \begin{cases} 1 - \frac{bRb}{1+c_h|Rb|^{1/2}} & Rb < 0 \\ \frac{1}{(1+b'Rb)^2} & Rb \geq 0 \end{cases}$$

$$b = 2b' = 9.4, \quad c_m = 7.4a_m^2 b \left(\frac{z}{z_{0m}} \right)^{1/2}, \quad c_h = 5.3a_m a_h b \left(\frac{z}{z_{0h}} \right)^{1/2}.$$

Louis et al. (1982)

- 安定成層で $F_m \neq F_h$ となっていることに注意.

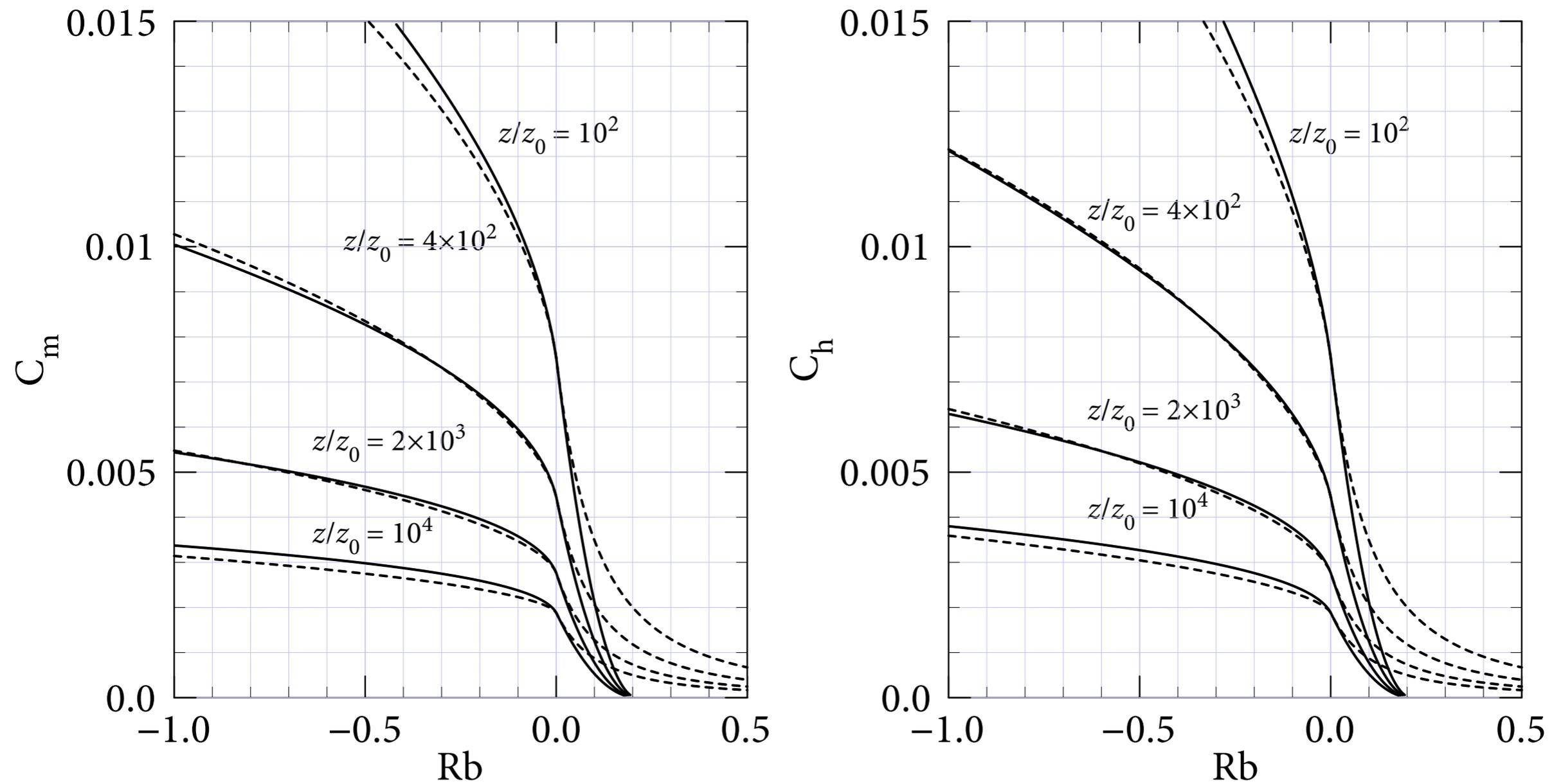
$$u_*^2 = a_m^2 U^2 F_m(z/z_{0m}, \text{Rb}), \quad u_* \theta_* = a_m a_h |U| \Theta' F_h(z/z_{0m}, z/z_{0h}, \text{Rb}),$$
$$a_m := \kappa / [\log(z/z_{0m})], \quad a_h := \kappa / [\log(z/z_{0h})],$$

$$F_m \left(\frac{z}{z_{0m}}, \text{Rb} \right) = \begin{cases} 1 - \frac{2b\text{Rb}}{1+c_m|\text{Rb}|^{1/2}} & \text{Rb} < 0 \\ \left(1 + \frac{2b\text{Rb}}{\sqrt{1+f\text{Rb}}} \right)^{-1} & \text{Rb} \geq 0 \end{cases}$$

$$F_h \left(\frac{z}{z_{0m}}, \frac{z}{z_{0h}}, \text{Rb} \right) = \begin{cases} 1 - \frac{3b\text{Rb}}{1+c_h|\text{Rb}|^{1/2}} & \text{Rb} < 0 \\ (1 + 3b\text{Rb} \sqrt{1+f\text{Rb}})^{-1} & \text{Rb} \geq 0 \end{cases}$$

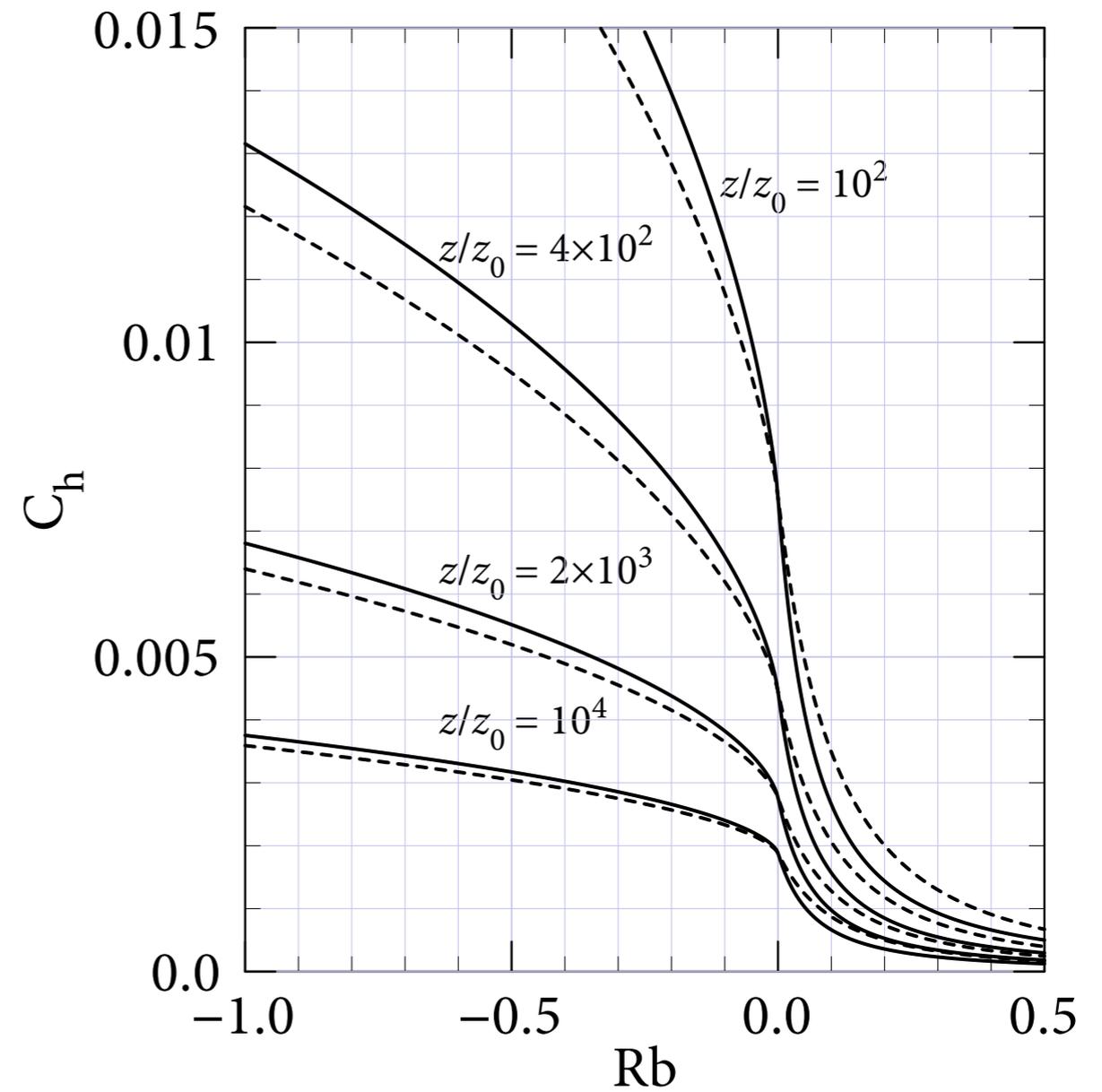
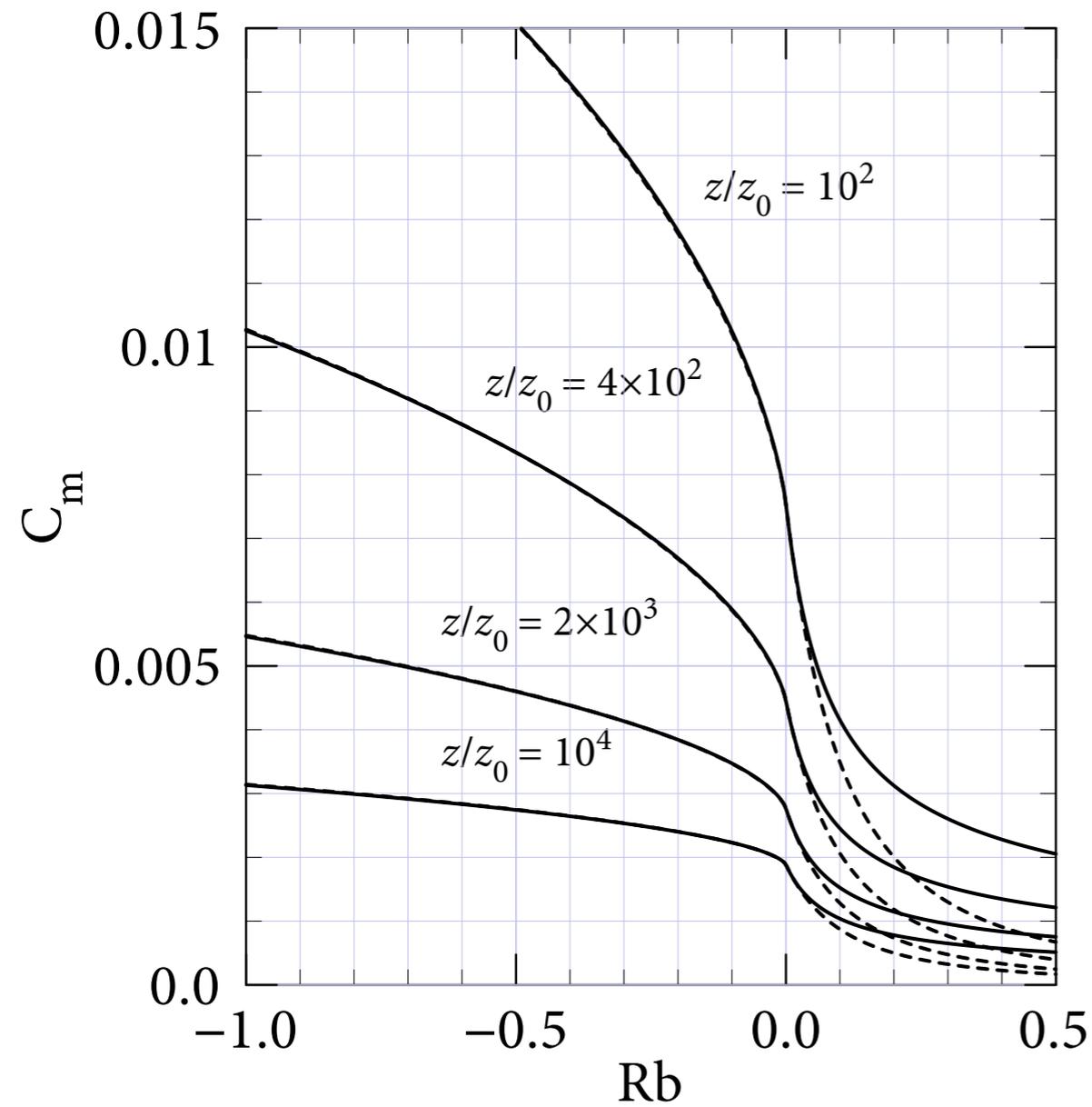
$$b = c = f = 5, \quad c_m = 3ba_m^2 c \left(\frac{z}{z_{0m}} \right)^{1/2}, \quad c_h = 3ba_m a_h c \left(\frac{z}{z_{0h}} \right)^{1/2}.$$

バルク係数の比較



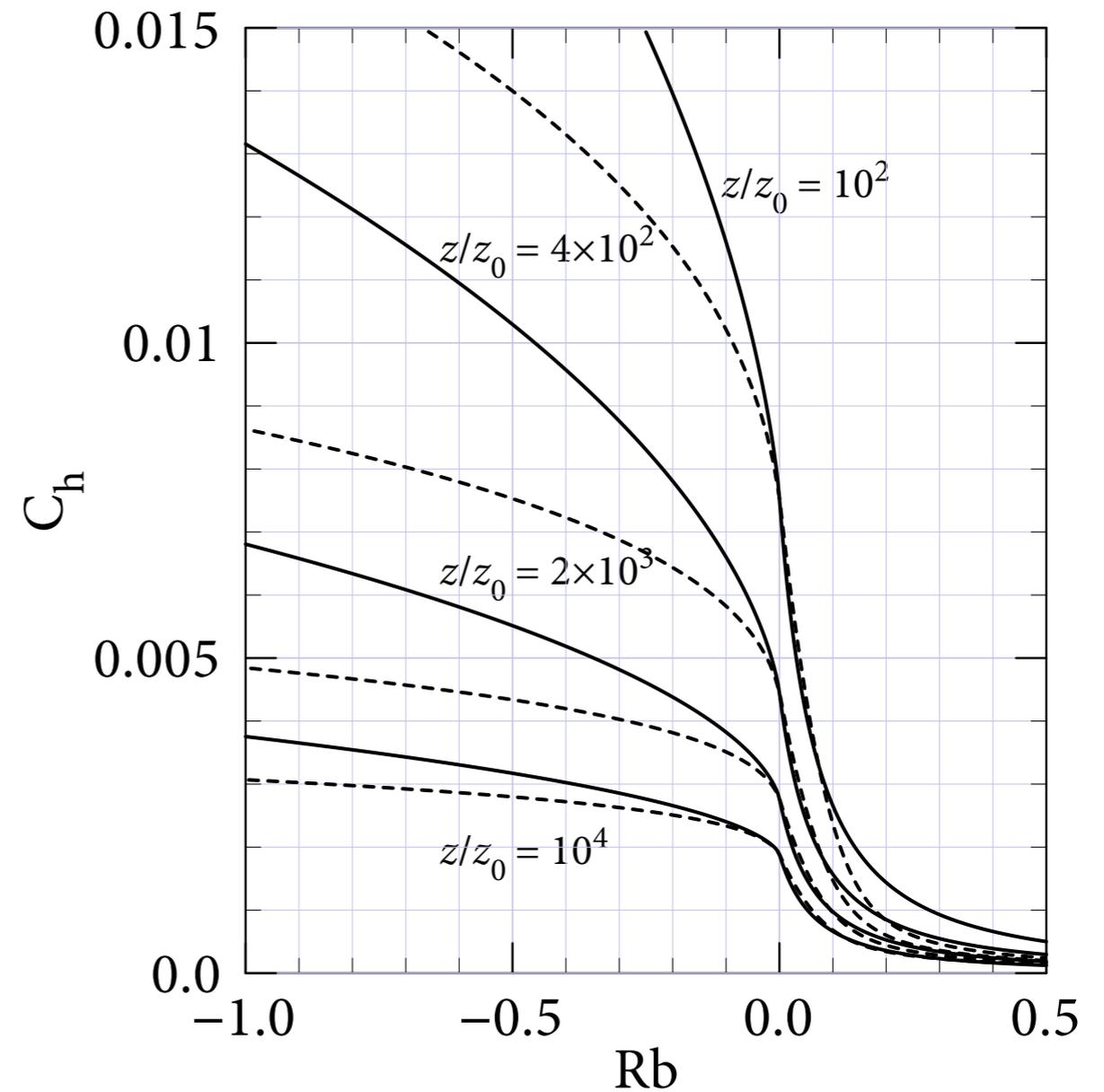
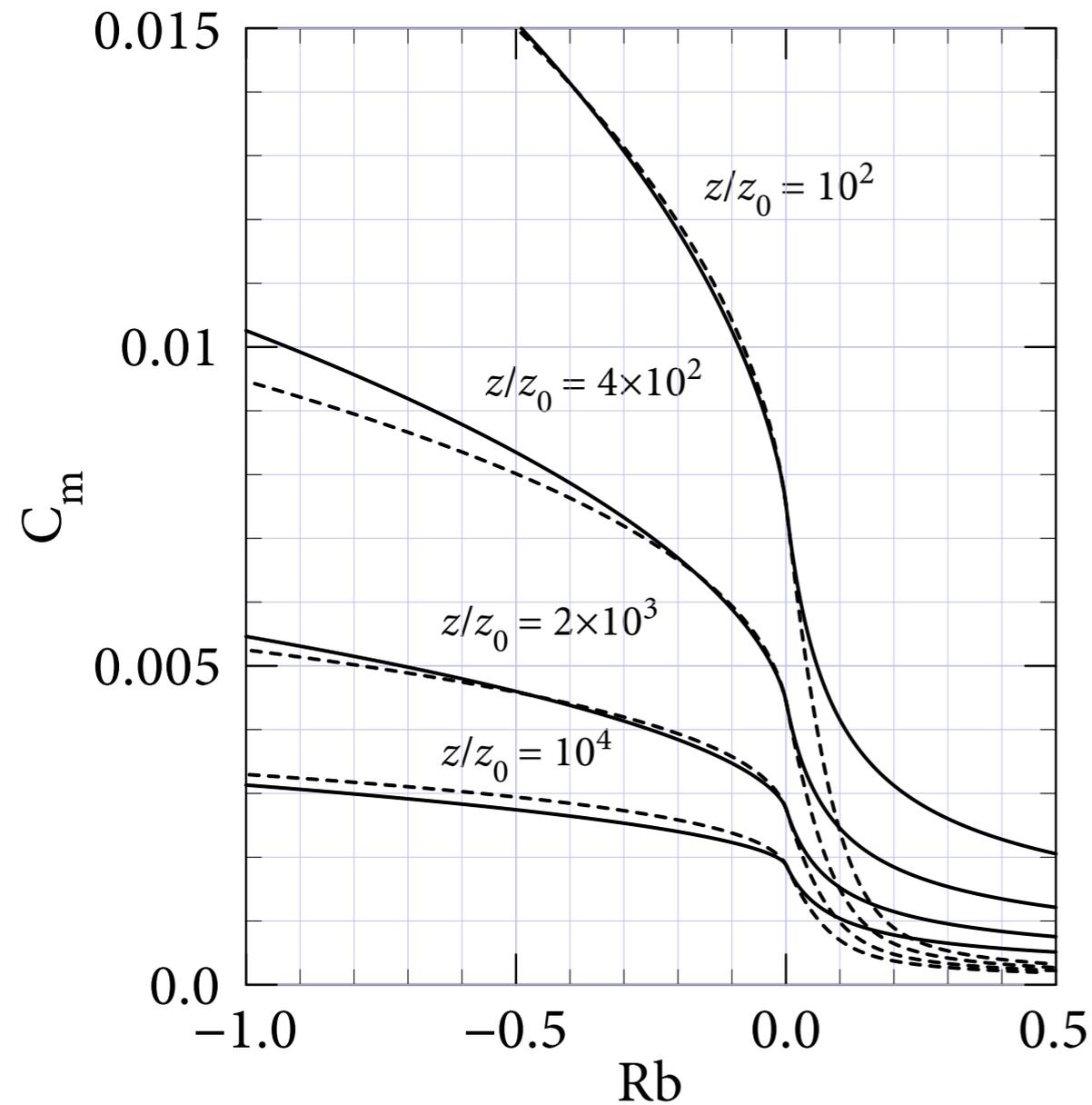
———— Businger (1971) - - - - - Louis (1979)

バルク係数の比較



———— Louis et al. (1982) - - - - - Louis (1979)

バルク係数の比較



————— Louis et al. (1982) - - - - - Beljaas and Holtslag (1991)

各種スキームの違いについて

- 論点は主に2つ.
 - 臨界Richardson数が存在するか?
 - 安定成層で運動量と熱のバルク係数が等しくなるか?

臨界Richardson数の有無

- 臨界Richardson数が存在する場合，強安定時に地表面との相互作用がゼロになる。
 - 接地境界層でのフラックスは地表面からのフラックスに等しいと考えるので，層流では地表面からのフラックスがゼロになる。
 - 非現実的と考えられている。
 - 数値計算上も非常に困る。
- 臨界Richardson数の存在は， $\zeta \rightarrow \infty$ ($1/L \rightarrow \infty$)でRbが有限の値に収束するかを調べればよい。

臨界Richardson数の有無

- Businger (1971):

$$\psi_m(\zeta) = \psi_h(\zeta) = -4.7\zeta,$$

$$\text{Rb} = \zeta \frac{[\log(z/z_{0h}) - \psi_h(\zeta)]}{[\log(z/z_{0m}) - \psi_m(\zeta)]^2}$$
$$\rightarrow \frac{4.7\zeta^2}{4.7^2\zeta^2} = \frac{1}{4.7}, \quad (\zeta \rightarrow \infty)$$

- Beljaas and Holtslag (1991):

$$\text{Rb} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}\zeta^{5/2}}{3\sqrt{3a}\zeta^2} = \infty, \quad (\zeta \rightarrow \infty)$$

安定下の運動量・熱のバルク係数

- Businger (1971), Louis (1979)では同じ.
- Beljaas and Holtslag (1991), Louis et al. (1982)では, 安定度が大きくなるほど運動量の方が熱よりも効率的に輸送される.
- 観測では後者の方が現実的と考えられている.
- ψ_m, ψ_h がどういうべき則に従うかが重要.

$$\frac{C_h}{C_m} = \frac{\log(z/z_{0m}) - \psi_m(\zeta)}{\log(z/z_{0h}) - \psi_h(\zeta)}$$

Ri, Rf, Prの導入

- 同様の議論は, Richardson数, flux Richardson数, 乱流Prandtl数を用いても可能.

- クロージャモデルの議論ではこちらが用いられることが多い.

- Gradient Richardson number

$$Ri := \frac{\frac{g}{\theta_0} \frac{d\bar{\theta}}{dz}}{\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2}$$

- Flux Richardson number

$$Rf := \frac{\frac{g}{\theta_0} \overline{\theta' w'}}{\overline{u' w'} \frac{d\bar{u}}{dz}}$$

- Turbulent Prandtl number

$$Pr := \frac{K_m}{K_h} = \frac{Ri}{Rf}$$

Ri, Rf, Prの導入

- Ri, Rf, Prは普遍関数 $\phi_m(\zeta)$, $\phi_h(\zeta)$ と以下の関係がある:

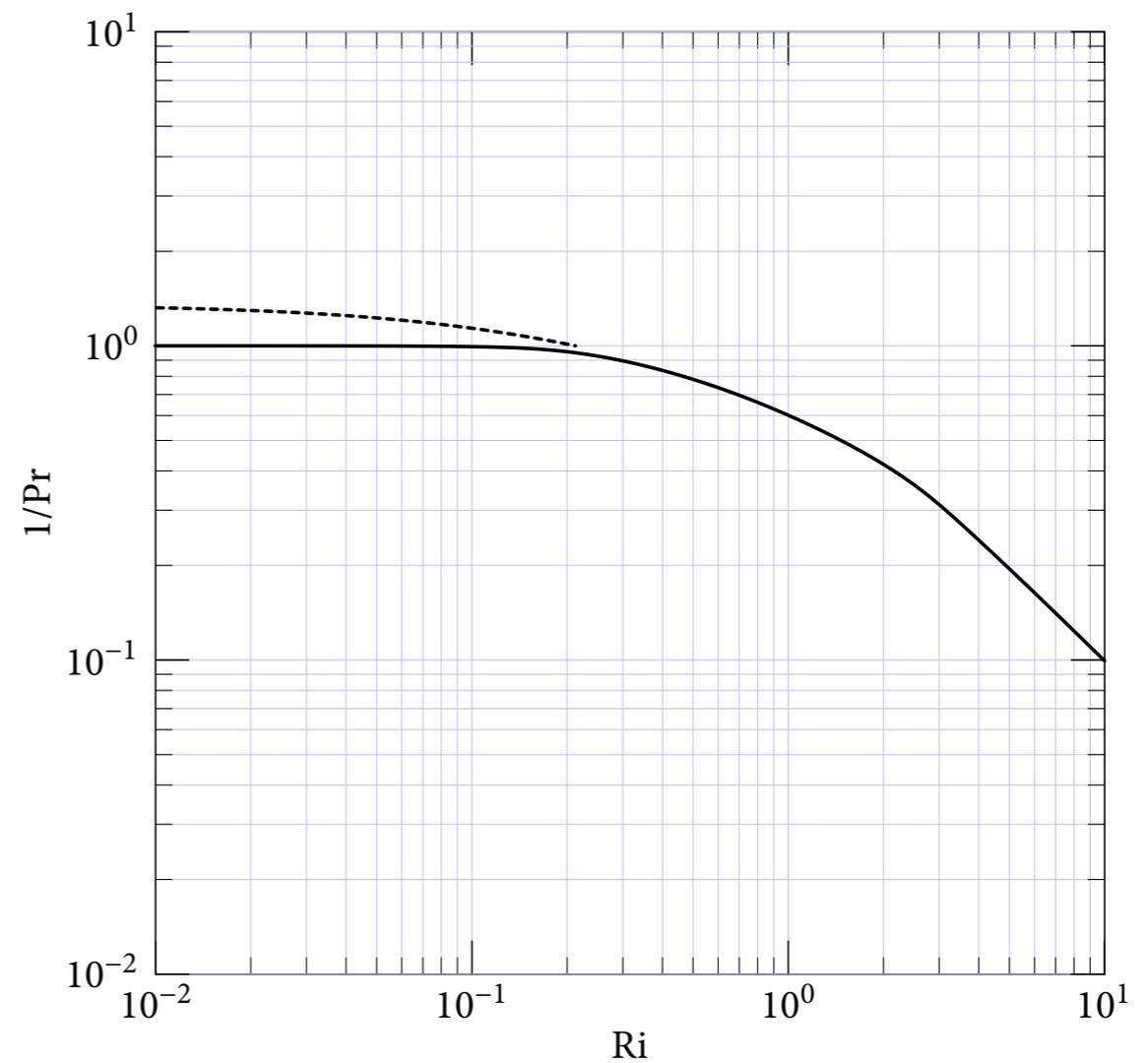
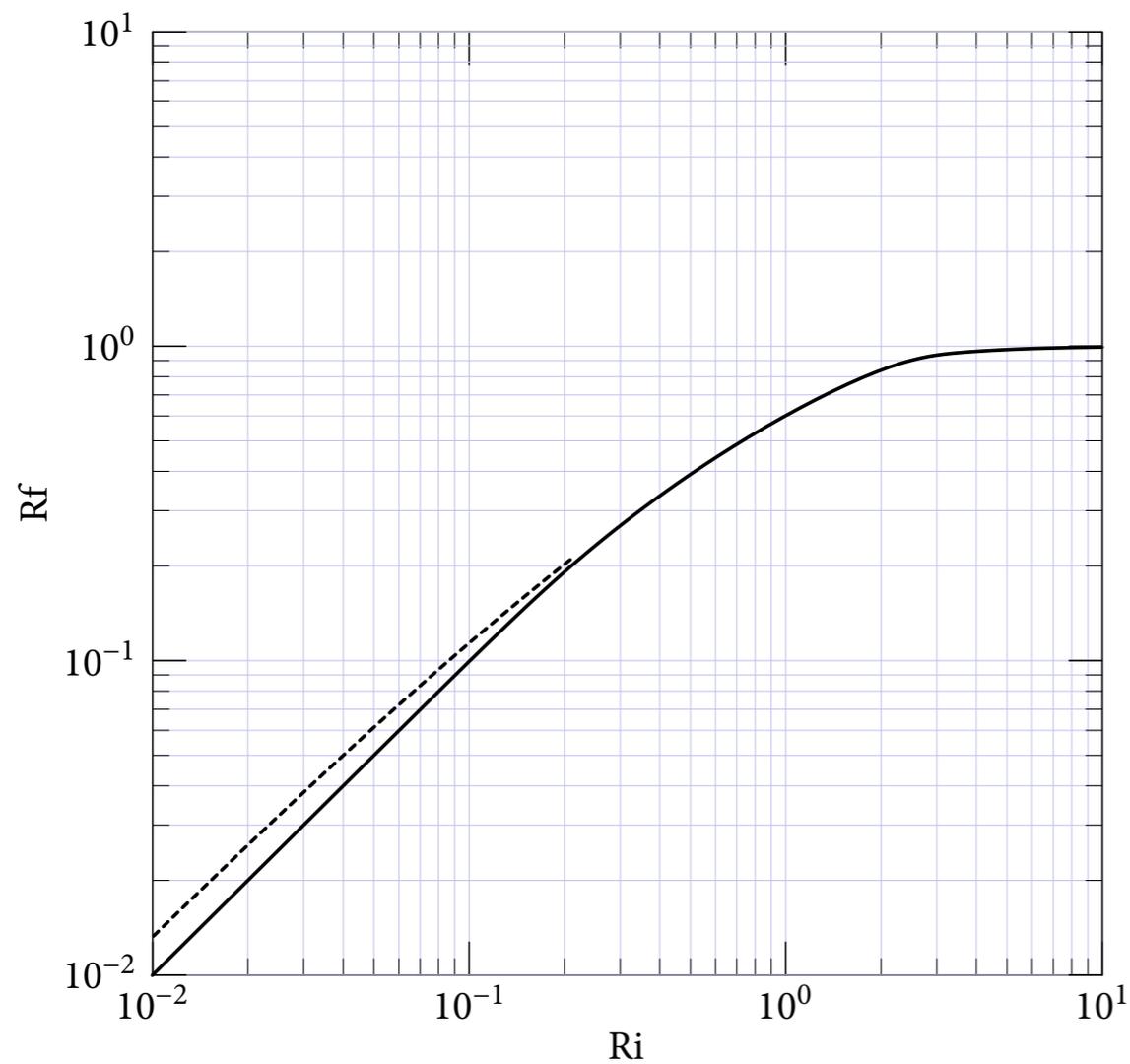
$$\overline{u'w'} = u_*^2, \quad \overline{\theta'w'} = u_*\theta_*, \quad L = \frac{u_*^2}{\kappa g / \Theta_0 \theta_*},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} \phi_m(\zeta), \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\theta_*}{\kappa z} \phi_h(\zeta),$$

$$\text{Ri} = \frac{\zeta \phi_h(\zeta)}{\phi_m^2(\zeta)}, \quad \text{Rf} = \frac{\zeta}{\phi_m(\zeta)}, \quad \text{Pr}^{-1} = \frac{\phi_m(\zeta)}{\phi_h(\zeta)}.$$

- 臨界Richardson数 Ri_c が存在するか?
- 運動量・熱輸送の効率の違い = Prの振る舞い
 - Rfの振る舞いと深い関係がある.

Rf(Ri) and Pr⁻¹(Ri)



———— Beljaas and Holtslag (1991) - - - - - Businger (1971)

まとめ

- 診断されるバルク係数について, Businger (1971), Beljaas and Holtslag (1991), Louis (1979), Louis et al. (1982)について比較, 議論.
- Businger (1971)の普遍関数では, 臨界Richardson数が存在.
- Beljaas and Holtslag (1991), Louis et al. (1982)では, 安定度が大きくなるほど運動量の方が熱よりも効率的に輸送される.
- R_i , R_f , P_r を用いた議論も可能.
 - クロージャモデル設計の観点からすると, こちらの方がよく用いられるため, クロージャモデルとの整合性を調べるには有効.

2. クロージャ問題とそのモデリング

クロージャ問題

- 支配方程式(密度一定・非圧縮):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

- 系の粗視化のために、平均操作を行う。
 - **RANS (レイノルズ平均モデル):** アンサンブル平均をとる.
 - **LES (Large-eddy Simulation):** (局所的な)空間平均をとる.

RANSとLES

- RANSの平均操作は**アンサンブル平均**で定義される。

$$\overline{F(\mathbf{x}, t)} := \int F(\mathbf{x}, t) P(F; \mathbf{x}, t) dF.$$

$P(F; \mathbf{x}, t)$ は $F(\mathbf{x}, t)$ となる確率密度。

- LESでは**フィルタ関数** $G(x)$ によって平均を定義。

$$\overline{F(\mathbf{x}, t)} := \int F(\mathbf{x}', t) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

- フィルタ関数によってグリッドスケール(GS)以下の変動を落とす。
- RANSとは異なり、グリッドスケール以上の変動は陽に扱う。

RANSとLES — 注意点

- 気象モデルに適用する場合には、どちらの手法も仮定が厳密に成り立つわけではない。

RANS: アンサンブル平均した場を扱うが、アンサンブル平均は仮想的なもの。

LES: クロージャ手法を考えるとときに、乱流が一様等方であること、乱流の大部分を陽に解像できることを仮定する。

- モデル解像度(数km—数十km)と一様等方乱流の仮定が妥当なスケール(数m)に相当のギャップがある。
- どちらがより近似として妥当かは、扱う問題に依存する。

クロージャ問題

- 従属変数をアンサンブル平均と偏差に分割する.

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i$$

- 平均成分についての支配方程式:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} + \nu \Delta \bar{u}_i,$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0.$$

- 平均操作によって、**新たな方程式**が加わることなく
新たな変数($\overline{u'_i u'_j}$)が加わる.
 - 方程式系が閉じなくなる.

クロージャ問題

- 2次の変数の方程式を誘導こともできるが...
 - $\overline{u'_i u'_j}$ の式には $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ が現れる.
 - $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ の式には $\overline{u'_i u'_j u'_k u'_l}$ が現れる.
- 高次のモーメントの式を構成しても閉じた方程式系にはならない.

—————→ クロージャ問題

- 閉じた方程式系を構成するには別の仮定(高次モーメントを低次モーメントで表現する)が必要.

2次モーメントの支配方程式

- 圧力相関・3次モーメント・粘性散逸の各項によって、式が閉じなくなる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[U_k \overline{u_i u_j} + \overline{u_k u_i u_j} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p u_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p u_j} + f_k (\epsilon_{ikl} \overline{u_i u_l} + \epsilon_{jkl} \overline{u_j u_l}) \\
 & = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \beta (g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta}) + p \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial u_k} \frac{\partial u_j}{\partial u_k}, \\
 & \frac{\partial \overline{u_j \theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[U_k \overline{u_j \theta} + \overline{u_j u_k \theta} - \nu \theta \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \alpha u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p \theta} + \epsilon_{jkl} f_k \overline{u_l \theta} \\
 & = -\overline{u_j u_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \beta g_j \overline{\theta^2} + p \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - (\alpha + \nu) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}, \\
 & \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[U_k \overline{\theta^2} + \overline{u_k \theta^2} - \alpha \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right] = -2\overline{u_k \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - 2\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}.
 \end{aligned}$$

クロージャの仮定について

- クロージャの仮定は, 「手持ちの情報」で「未知の情報」を推定することに相当.
 - 適切な方法がどのようなものかは(存在するかも)分からない.
 - 実用上は, 答えが存在するかどうかにかかわらず, 適当な仮定をおかざるを得ない(ここに, アートとしての側面がある).

渦粘性の仮定

- クロージャの仮定として最もよく使われる。
- レイノルズ応力に対して、分子粘性と同様のアナロジー(応力とひずみの線形関係)を用いる (Boussinesq 1877):

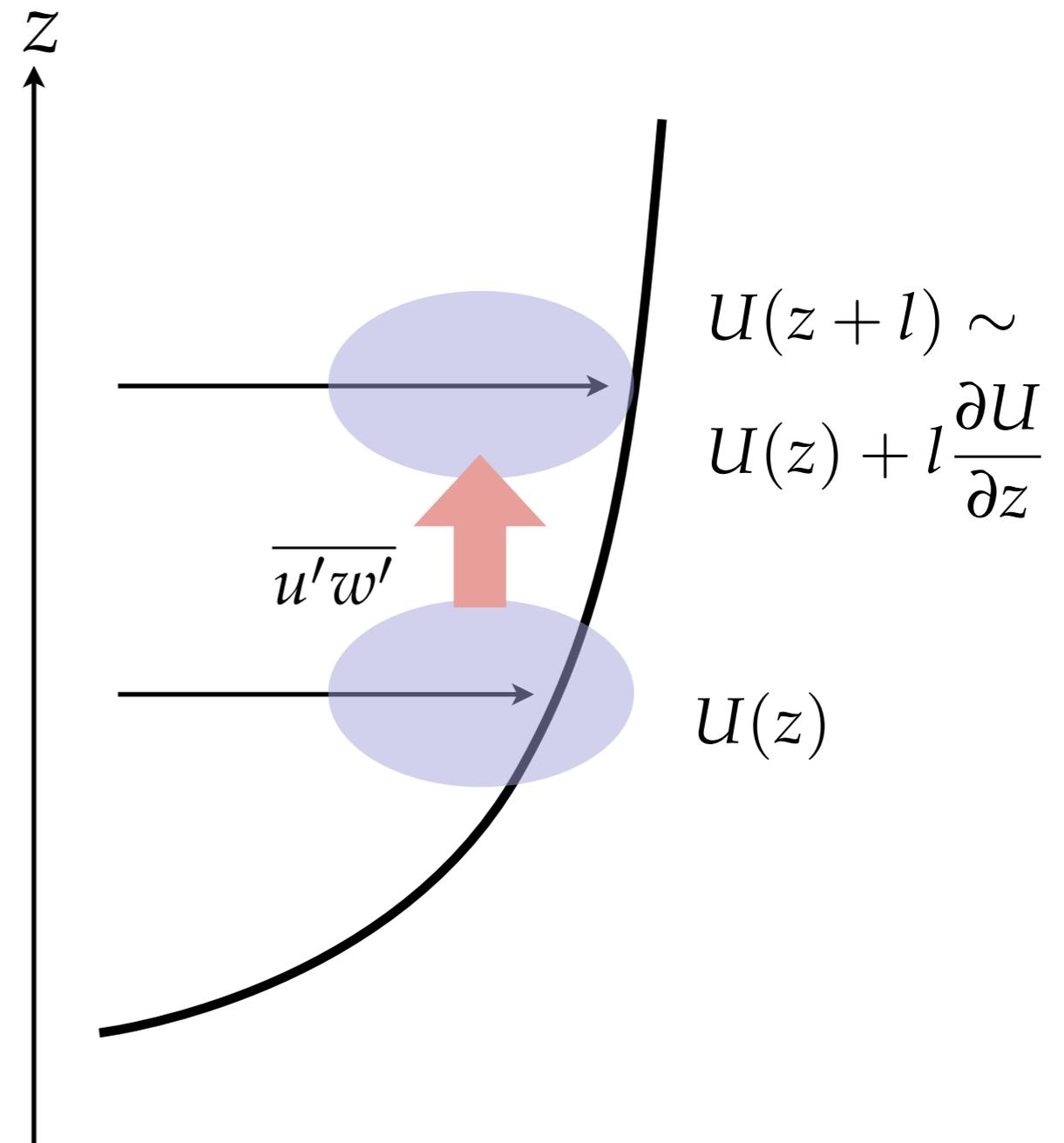
$$\overline{u'_i u'_j} = -\nu_T \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_k u'_k}$$
$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right).$$

- 渦粘性係数 ν_T はどうやって決められるべき?

Prandtl (1925)の混合距離理論

- 平均流 U は鉛直方向のみに変化するとする。
- 流体要素は乱流によって距離 l だけ鉛直方向に輸送されたのちに混合が起こると考える。
- 変動成分の速度のオーダーは,

$$u' \sim l \frac{\partial U}{\partial z}.$$



Prandtlの混合距離理論

- (等方性の仮定から)擾乱の鉛直速度 w' も u' と同程度と考えると、乱流による鉛直方向の運動量輸送 $\overline{u'w'}$ は、

$$\overline{u'w'} = -l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| \frac{\partial U}{\partial z}.$$

l はPrandtl(プラントル)の混合距離と呼ばれる。

- 渦粘性係数との関係は、

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right|.$$

- (問) 対数速度分布に対応する混合距離はどのようなものか?

Prandtlの混合距離理論

- 渦粘性係数は以下のように表現する場合もあり.

$$\nu_T = l v$$

- l は混合距離, v は乱流の代表的速度.
- 分子粘性のアナロジーとの対応づけは,

ν	l	v
分子粘性	平均自由行程	分子の平均速度
渦粘性	混合距離	乱流の代表的速度

気象モデルのクロージャ手法

- 各論の話は今日はしないが、基本的にはこれまでに説明した概念でほとんどのものは理解できるはず。

- 渦粘性係数に成層度の依存性を陽に含めることも多い。例えばMellor-Yamadaモデルなら、

$$K_m = lqS_m, \quad K_h = lqS_h.$$

q は乱流運動の代表的速度, S_m, S_h は成層度に依存して診断される無次元量

- l, q, S_m, S_h をそれぞれどう決定するか, の議論に集約される。

参考文献

- Anderson, P. S., 2009: Measurement of Prandtl Number as a Function of Richardson Number Avoiding Self-Correlation, *Bound.-Layer Meteorol.*, **131**, 345-362.
- Balarac G., H. Pitsch, and V. Raman, 2008: Modeling of the subfilter scalar dissipation rate using the concept Modeling of the subfilter scalar dissipation rate using the concept of optimal estimators, *Phys. Fluids*, **29**, 091701.
- Beljaas, A. C. M., and A. A. M. Holtslag, 1991: Flux parameterization over land surfaces for atmospheric models, *J. Appl. Meteor.*, **30**, 327-341.
- Boussinesq, 1877: Essai sur la théorie des eaux courantes, *Mém. prés. par div. savants à l'Acad. Sci.*, **23**, 1-680.
- Buckingham, E., 1914: On physically similar systems: illustrations of the use of dimensional equations, *Phys. Rev.*, **4**, 345-376.
- Businger, J. A., J. C. Wungaard, Y. Izumi, and E. F. Bradley, 1971: Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer, *J. Atmos. Sci.*, **28**, 181-189.
- Canuto, V. M., Y. Cheng, A. M. Howard, and I. N. Esau, 2008: Stably Stratified Flows: A Model with No $Ri(cr)$, *J. Atmos. Sci.*, **65**, 2437-2447.
- Cheng, Y., V. M. Canuto, and A. M. Howard, 2002: An Improved Model for the Turbulent PBL, *J. Atmos. Sci.*, **59**, 1550-1565.

参考文献

- Galperin, B., S. Sukoriansky, and P. S. Anderson, 2007: On the critical Richardson number in stably stratified turbulence. *Atmos. Sci. Lett.*, **8**, 65-69.
- Honnert, R., V. Masson, and F. Couvreur, 2011: A Diagnostic for evaluating the Representation of Turbulence in Atmospheric Models at the Kilometric Scale, *J. Atmos. Sci.*, in press.
- 木田重雄, 柳瀬眞一郎, 1999: 乱流力学, 朝倉書店.
- Kitamura, Y., 2010: Modifications to the Mellor-Yamada-Nakanishi-Niino (MYNN) Model for the Stable Stratification Case, *J. Meteor. Soc. Japan*, **88**, 857-864.
- Langford, J. A., and Robert D. Moser, 1999: Optimal LES formulations for isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, **398**, 321-346.
- Lilly, D., D. E. Waco, and S. I. Adelfang, 1974: Stratospheric mixing estimated from high-altitude turbulence measurements., *J. Appl. Meteor.*, **13**, 488-493.
- Louis, J. F., 1979: A parametric model of vertical eddy fluxes in the atmosphere, *Bound.-Layer Meteorol.*, **17**, 187-202.
- Louis, J. F., M. Tiedtke, and J. F. Geleyn, 1982: A short history of the Operational PBL - parameterization at ECMWF, *Proc. Workshop on Planetary Boundary Layer Parameterization*, 59-79.

参考文献

- Mauristen, T., G. Svensson, S. S. Zilitinkevich, I. Esau, L. Enger, and B. Grisogono, 2007: A total turbulent energy closure model for neutrally and stably stratified atmospheric boundary layers, *J. Atmos. Sci.*, **64**, 4113-4126.
- Mellor, G. L., and T. Yamada, 1982: Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems, *Rev. Geophys. and Space Phys.*, **20**, 851-875.
- Moreau A., O. Teytaud, and J. P. Bertoglio, 2006: Optimal estimation for large-eddy simulation of turbulence and application to the analysis of subgrid models, *Phys. Fluids*, **18**, 105101.
- Nakanishi, M., 2001: Improvement of Mellor-Yamada turbulence closure model based on large-eddy simulation data, *Bound.-Layer Meteor.*, **99**, 349-378.
- Nakanishi, M., and H. Niino, 2004: An improved Mellor-Yamada level-3 model with condensation physics: its design and verification, *Bound.-Layer Meteor.*, **112**, 1-31.
- Nakanishi, M., and H. Niino, 2006: An improved Mellor-Yamada level-3 model: its numerical stability and application to a regional prediction of advection fog, *Bound.-Layer Meteor.*, **119**, 397-407.
- Nakanishi, M., and H. Niino, 2009: Development of an improved turbulence closure model for the atmospheric boundary layer, *J. Meteor. Soc. Japan*, **87**, 895-912.

参考文献

- Prandtl, L., 1925: Bericht über die ausgebildete Turbulenz, *Zs. angew. Math. Mech.*, **5**, 136-139.
- Sukoriansky, S., B. Galperin, and I. Staroselsky, 2005: A quasinormal scale elimination model of turbulent flows with stable stratification, *Phys. Fluids*, **17**, 085107.
- 竹内清秀, 近藤純正, 1981: 大気科学講座 1. 地表に近い大気, 岸保勘三郎, 浅井富雄編, 東京大学出版会.
- Wyngaard, J. C., 2004: Toward Numerical Modeling in the "Terra Incognita", *J. Atmos. Sci.*, **61**, 1816-1826.
- Zilitinkevich, S. S., T. Elperin, N. Kleeorin, and I. Rogachevskii, 2007: Energy- and flux-budget (EFB) turbulence closure model for stably stratified flow. Part I: steady-state, homogeneous regimes, *Bound.-Layer Meteor.*, **125**, 167-191.