

# Contents

<b>1</b>	<b>風成循環: 順圧海洋の渦度バランス</b>	<b>1</b>
1.1	基礎方程式系	1
1.2	線型定常解	1
1.3	慣性境界層	2
1.4	非線型が存在する場合の定常解と渦度収支	3
1.5	理想化条件での数値計算例	4
	参考文献	6
<b>2</b>	<b>熱塩循環: 成層海洋のエネルギー収支</b>	<b>9</b>
2.1	2次元非回転系の水平熱対流	9
2.1.1	基礎方程式系	9
2.1.2	問題設定と境界条件	10
2.1.3	定常解の数値計算例 (パラメータ依存性)	11
2.1.4	熱収支	11
2.1.5	エネルギー収支	14
2.2	3次元回転系水平熱対流の鉛直拡散係数依存性	15
	参考文献	18
<b>3</b>	<b>海洋大循環モデル</b>	<b>19</b>
3.1	基礎方程式系	19
3.2	拡散・粘性項	20
3.3	モード分離	21

3.4	水平格子系の設定と計量の求め方	22
	参考文献	23
<b>4</b>	<b>パラメタリゼーション</b>	<b>25</b>
4.1	海面混合層	25
4.1.1	バルクモデル	25
4.1.2	乱流クロージャー	27
4.2	海底境界層	29
4.2.1	海底に沿う流れの表現	29
4.2.2	エントレインメント	30
4.3	水平粘性	31
4.3.1	Smagorinsky 粘性	31
4.3.2	非等方粘性	32
4.4	渦によるトレーサー輸送: 断熱的輸送	33
4.4.1	層厚拡散に基づく擬速度	33
4.4.2	鉛直粘性による渦位一様化	35
4.4.3	層厚拡散係数	36
4.4.4	層厚拡散係数の制限	36
4.5	渦によるトレーサー輸送: 非断熱的輸送	37
4.6	渦によるトレーサー輸送: サブメソスケール渦の効果	37
4.7	深層内部領域の乱流混合	37
	参考文献	37

# Chapter 1

## 風成循環：順圧海洋の渦度バランス

### 1.1 基礎方程式系

密度一様 ( $\rho_0$ )、非圧縮、海底平坦、海底摩擦なしの海洋の運動方程式 (海面 Ekman 層より下の領域):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + A_H \nabla_H^2 u \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + A_H \nabla_H^2 v \quad (1.2)$$

風応力  $\tau$  による海面 Ekman 層下端での Ekman upwelling:

$$w_E = \frac{1}{\rho_0} \text{curl} \frac{\tau}{f} \quad (1.3)$$

連続の式:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{w_E}{H} \quad (1.4)$$

準地衡流水平輸送流線函数  $\psi$ :

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.5)$$

渦度方程式 ( $\zeta = \nabla_H^2 \psi, |\zeta| \ll |f|$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi + J(\psi, \nabla_H^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} - A_H \nabla_H^4 \psi = \frac{f w_E}{H} \quad (1.6)$$

$$J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial y} \quad (1.7)$$

### 1.2 線型定常解

Sverdrup balance (Sverdrup, 1947) (1.6) における、外力 (右辺) と Coriolis 項のバランス

$$\beta \frac{\partial \psi_S}{\partial x} = \frac{f w_E}{H} \quad \left( \beta v = \frac{\text{curl} \tau}{\rho_0 H} \right) \quad (1.8)$$

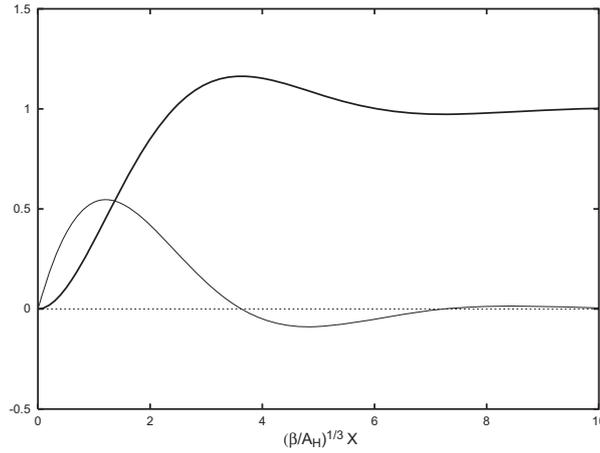


Figure 1.1:  $\psi_M$  (太線) およびそれから得られる  $V$  (細線) の函数形

Munk (1950) の解 (1.6) における、 $A_H$  が大きい極限 (非線型項を無視)

$$\psi = \psi_S + \psi_M \quad (1.9)$$

側壁境界条件:

$$\psi = \text{const.}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (1.10)$$

境界付近では  $|\text{grad } \psi_M| \gg |\text{grad } \psi_S|$

$$\beta \frac{\partial \psi_M}{\partial x} - A_H \nabla_H^4 \psi_M = 0 \quad (1.11)$$

$|\partial \psi_M / \partial x| \gg |\partial \psi_M / \partial y|$  (境界層は  $x$  方向にのみ形成)

$$\beta \frac{d\psi_M}{dx} - A_H \frac{d^4 \psi_M}{dx^4} = 0 \quad (1.12)$$

$$\psi_M \propto 1 - e^{-\xi/2} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \xi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \xi \right) \quad (1.13)$$

$$\xi = \left( \frac{\beta}{A_H} \right)^{1/3} x \quad (1.14)$$

粘性境界層 (Munk layer) の幅

$$\Delta \xi = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \quad \Delta x = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left( \frac{A_H}{\beta} \right)^{1/3} \quad (1.15)$$

### 1.3 慣性境界層

(1.6) における、 $A_H$  が小さい極限 ( $x$  方向の側壁境界付近に存在する境界層に対する境界層近似のもと  $|\partial \psi_I / \partial x| \gg |\partial \psi_I / \partial y|$ )

$$\psi = \psi_S + \psi_I \quad (1.16)$$

$$J \left( \psi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta y \right) = 0 \quad (1.17)$$

$\psi_I$  のみを従属変数とする任意の函数  $Q$  を用いた一般解

$$\frac{\partial^2 \psi_I}{\partial x^2} + \beta y = Q(\psi_I) \quad (1.18)$$

内部領域に一樣な東西流  $U$  を仮定

$$\psi_{int} = Uy \quad (1.19)$$

境界層入口において  $\psi$  の値はこの一樣流によって決められる場合

$$Q(\psi_I) = \frac{\beta}{U} \psi_I \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_I}{\partial x^2} = \frac{\beta}{U} (\psi_I - \psi_{int}) \quad (1.21)$$

一般解

$$\psi_I - \psi_{int} = c_1 e^{x/\delta_I} + c_2 e^{-x/\delta_I} \quad (1.22)$$

$$\delta_I = \sqrt{\frac{U}{\beta}} \quad (1.23)$$

定数  $c_1, c_2$  のかかる各項は、それぞれ東岸・西岸に形成される境界層に対応。いずれも西向き流の場合のみ存在可能。 $\delta_I$ : 慣性境界層の幅。

## 1.4 非線型が存在する場合の定常解と渦度収支

渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta v - A_H \nabla_H^2 \zeta = \frac{f w_E}{H} \quad (1.24)$$

無次元化

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \delta_I^2 \left( u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \delta_M^3 \nabla_H^2 \zeta + v = w_E \quad (1.25)$$

規格化パラメータ

$$\begin{aligned} x, y : & L \quad (\text{海盆の水平スケール}) \\ w_E : & W \quad (\text{その代表的大きさ}) \\ t : & 1/\beta L \\ \psi : & fWL/\beta H \quad (\text{Sverdrup balance}) \end{aligned}$$

無次元化された境界層幅

$$\delta_I^2 = \frac{fW}{\beta^2 HL^2}, \quad \delta_M^3 = \frac{A_H}{\beta L^3} \quad (1.26)$$

連続の式を用いてフラックス形式で表現:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \text{div} (\delta_I^2 \mathbf{u} \zeta - \delta_M^3 \text{grad} \zeta + \mathbf{e}_x \psi) = w_E \quad (1.27)$$

時間平均  $\bar{\quad}$ , 時間平均からのずれ  $\prime$

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \text{div} (\delta_I^2 \bar{\mathbf{u}} \bar{\zeta} + \delta_I^2 \overline{\mathbf{u}' \zeta'} - \delta_M^3 \text{grad} \bar{\zeta} + \mathbf{e}_x \bar{\psi}) = \bar{w}_E \quad (1.28)$$

$\bar{\psi} = \psi_C$  の流線によって囲まれる領域  $C$  にわたる (1.28) の面積積分 ( $\partial C$  は領域  $C$  の境界、 $\mathbf{n}$  はその積分経路上の線素に直交する向きの単位ベクトル)

$$\int_C \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} dS + \oint_{\partial C} (\delta_I^2 \bar{\mathbf{u}} \bar{\zeta} + \delta_I^2 \overline{\mathbf{u}' \zeta'} - \delta_M^3 \text{grad} \bar{\zeta} + \mathbf{e}_x \bar{\psi}) \cdot \mathbf{n} dl = \int_C \overline{w_E} dS \quad (1.29)$$

速度  $\bar{\mathbf{u}}$  は流線に平行:

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.30)$$

$\bar{\psi}$  は積分経路上で一定であるため、閉じた経路に対して:

$$\oint_{\partial C} \bar{\psi} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dl = \psi_C \oint_{\partial C} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dl = 0 \quad (1.31)$$

したがって

$$\int_C \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} dS + \oint_{\partial C} (\delta_I^2 \overline{\mathbf{u}' \zeta'} - \delta_M^3 \text{grad} \bar{\zeta}) \cdot \mathbf{n} dl = \int_C \overline{w_E} dS \quad (1.32)$$

定常状態が実現されるとき

ある時間平均流線  $\bar{\psi} = \psi_C$  で囲まれた領域について考えると、(1.32) の右辺で表される風応力による渦度の net input は、粘性もしくは渦運動によって領域境界から外に運ばれる渦度とバランスしていなければならない。

海盆全体について考え、海盆の境界と一致する流線について考えると、境界上で  $\mathbf{u}' = 0$  であるので、風応力による海盆への渦度の net input は海盆境界における粘性消散とバランスしていなければならない。

$\delta_M > \delta_I$ : 境界流形成において粘性の効果が卓越し、Munk の解が定常解として実現。全ての流線は西岸付近の粘性境界層を通り、そこで風応力から受け取った渦度を消散させる。

$\delta_M < \delta_I$ : 流線のうちのある部分は西岸から  $\delta_M$  の幅にある粘性境界層を通ることができず、それらの流線に囲まれた領域で風応力から受け取った渦度は粘性によって十分に消散させることができない。この場合、次のいずれかが考えられる (Fox-Kemper, 2005)

粘性境界層を通らない流線は非定常となり、その渦運動に伴うフラックス (1.32 における  $\overline{\mathbf{u}' \zeta'}$  の項) が粘性境界層へ渦度を輸送する。

再循環流が形成され、それに伴って流線は大幅に再編成されて Sverdrup balance から大きくはずれる。これによって渦度収支も大幅に変更され、定常状態が実現される。

風応力による渦度インプットの符号が逆の領域が海盆内に存在する場合、その領域間で渦度の輸送が生じ、定常状態が実現される、もしくは変動は抑制される。この渦度輸送は、時間平均流線が逆符合の風応力渦度領域に移動すること、もしくは渦運動 (非定常渦または定常蛇行) による gyre 間渦度フラックスのいずれかによって実現される。

## 1.5 理想化条件での数値計算例

箱型海洋 ( $0 \leq x \leq L_x$ ,  $-L_y \leq y \leq L_y$ ) に対する 1.5 層 reduced gravity モデル。定常な風応力

$$\tau_x = \tau_0 \cos\left(\frac{\pi}{L_y} y\right) \quad (1.33)$$

$$\tau_y = 0 \quad (1.34)$$

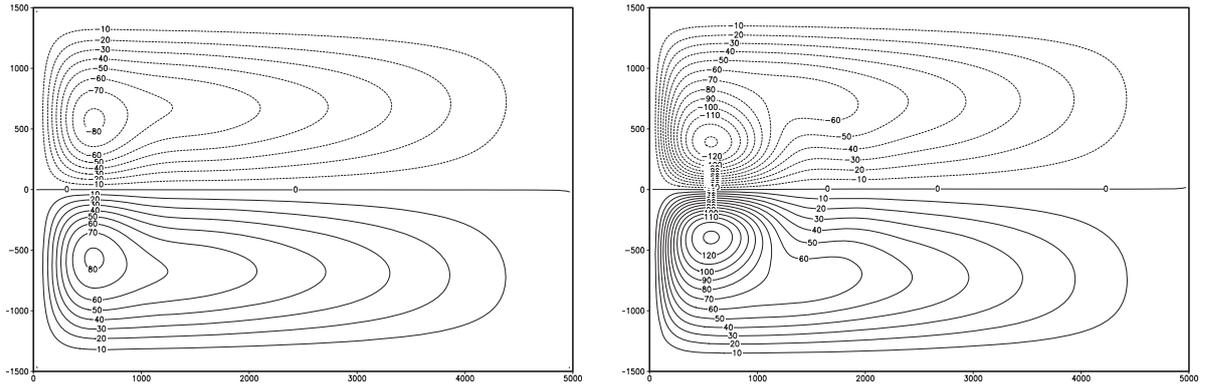
各種パラメータは Table 1.1 の通り。変形半径は 140 km. 水平格子幅は  $x, y$  方向ともに 20 km.

水平粘性係数を変えた 4 ケース:

$$A_H = 3 \times 10^4, 1 \times 10^4, 3 \times 10^3, 1.5 \times 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (1.35)$$

$L_x$	海洋東西幅	$5 \times 10^3$ km
$L_y$	海洋南北幅の半分	$1.5 \times 10^3$ km
$H$	水深	500 m
$f_0$	$y = 0$ における Coriolis パラメータ	$5 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
$\beta$	Coriolis パラメータの南北勾配	$1 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
$\rho_0$	海水密度	$1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
$g'$	reduced gravity	$9.8 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$
$\tau_0$	風応力の大きさ	$0.1 \text{ N m}^{-2}$

Table 1.1: 箱型海洋を用いた非線型風成循環計算におけるパラメータ値。

Figure 1.2: 箱型海洋における非線型風成循環計算によって得られた定常状態の準地衡流線函数 (等値線間隔  $10 \times 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ )。左:  $A_H = 3 \times 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , 右:  $A_H = 1 \times 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 。

対応する粘性境界層幅 (すべて解像される):

$$\delta_M L = 144, 100, 67, 53 \text{ km} \quad (1.36)$$

Sverdrup balance を基準にした慣性境界層幅:

$$fW \sim \frac{\text{curl } \tau}{\rho_0} \sim \frac{\pi \tau_0}{\rho_0 L_y} \Rightarrow \delta_I L \sim 65 \text{ km} \quad (1.37)$$

考えているパラメータの範囲で  $\delta_M > \delta_I$  と  $\delta_M < \delta_I$  の場合に分かれる (と期待)。

$A_H = 3 \times 10^4, 1 \times 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ : 定常状態が実現 (Figure 1.2)。

$A_H = 3 \times 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合、非線型項を除いた場合とほぼ一致し、粘性境界層から十分離れた領域では Sverdrup balance が成り立つ。この場合には全ての流線は粘性境界層を通り、そこで渦度を粘性によって西岸側へ輸送し、最終的に西岸で渦度が消散されるという収支が成り立つ。

$A_H = 1 \times 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合、領域の東側では線型モデルと同様の結果となるが、西岸付近には粘性境界層から十分離れていても Sverdrup balance から大きく外れる領域が存在。循環系の境界において強い再循環が対になって形成されることで、南北方向に大きな渦度勾配が生じ、循環系の境界を通じた渦度輸送が実現される。循環系の境界は風応力による渦度インプットの符号が逆転する境界であり、一方の循環系で粘性境界層を通らない流線が風応力から獲得した渦度は再循環が形成されることで他方の循環系に輸送され、輸送された側で風応力によって与えられる逆符号の渦度がそれを打ち消すというバランスが成り立つ。

$A_H = 3 \times 10^3, 1.5 \times 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ : 定常状態は実現されない (Figure 1.3: 長時間平均)。循環の対称性は大きく崩れており、循環系の境界は大きく蛇行。

$A_H = 3 \times 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合、この蛇行は準定常的。循環境界の蛇行は、風応力から正の渦度を受け取る領域と負の渦度を受け取る領域の両方がある流線が通ることを意味し、それが長時間平均の意味での定常

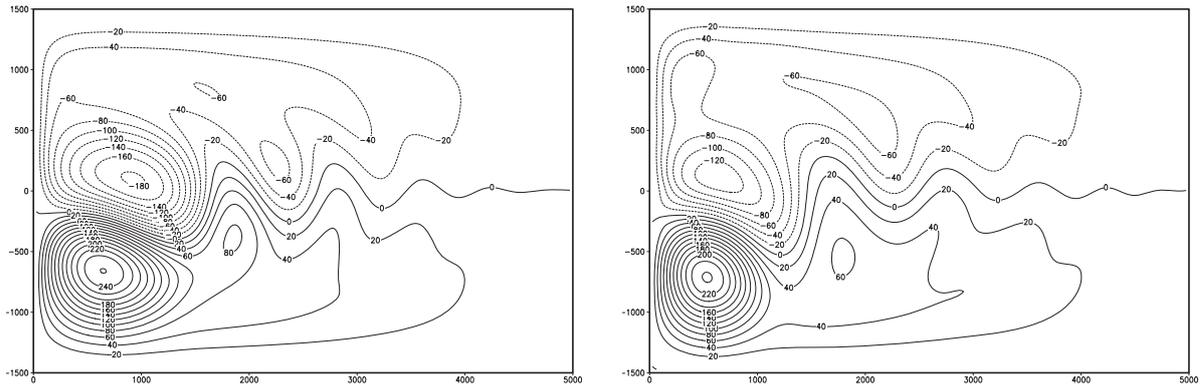


Figure 1.3: 箱型海洋における非線型風成循環計算によって得られた長時間平均の準地衡流線函数 (等値線間隔  $20 \times 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ )。左:  $A_H = 3 \times 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , 右:  $A_H = 1.5 \times 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

状態を実現する (循環がスパインアップされ続けられない) ための渦度収支において主要な役割を果たす。

$A_H = 1.5 \times 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合には、長時間平均の流線函数は先ほどのものとよく似ているが、各瞬間の流線函数は平均とは大きく異なる (1.4)。非定常な渦運動が形成され、それによる渦度輸送が定常な長時間平均場を実現するための渦度収支において主要な役割を果たす。

ここに示した計算においては領域と外力ともに  $y = 0$  について対称であるが、現実にはそれに対応する状況は考えられない。線型力学の範囲内で説明されるような状態であれば、結果の構造の形成においてこの対称性は本質的ではない。非線型効果が無視できない場合には、対称性の有無は結果に本質的な意味を持ち得る。 $A_H = 1 \times 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合では、風応力による渦度インプットが  $y = 0$  の北側と南側で相殺されるように与えていたからこそ、 $y = 0$  について対称な循環系が形成され、循環系の境界が  $y = 0$  に一致するような定常状態を実現し得る。例えば、風応力による渦度インプットの正負は  $y = 0$  で切り替わるままにしておくが、北側で与える負の渦度の総量を若干小さくした場合、南側の循環系の西岸境界流が overshoot (正の渦度を与えている領域まで突き抜ける) する、循環系の境界が北上する、循環系の境界が蛇行するなどのことが生じ、それなしには定常な渦度収支を実現することができない。

## 参考文献

- Fox-Kemper, B. (2005): Reevaluating the roles of eddies in multiple barotropic wind-driven gyres, *J. Phys. Oceanogr.*, *35*, 1263–1278.
- Munk, W. H. (1950): On the wind-driven ocean circulation, *J. Meteorol.*, *7*, 79–93.
- Sverdrup, H. U. (1947): Wind-driven currents in a baroclinic ocean, with application to the equatorial currents of the eastern Pacific, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, *33*, 318–326.

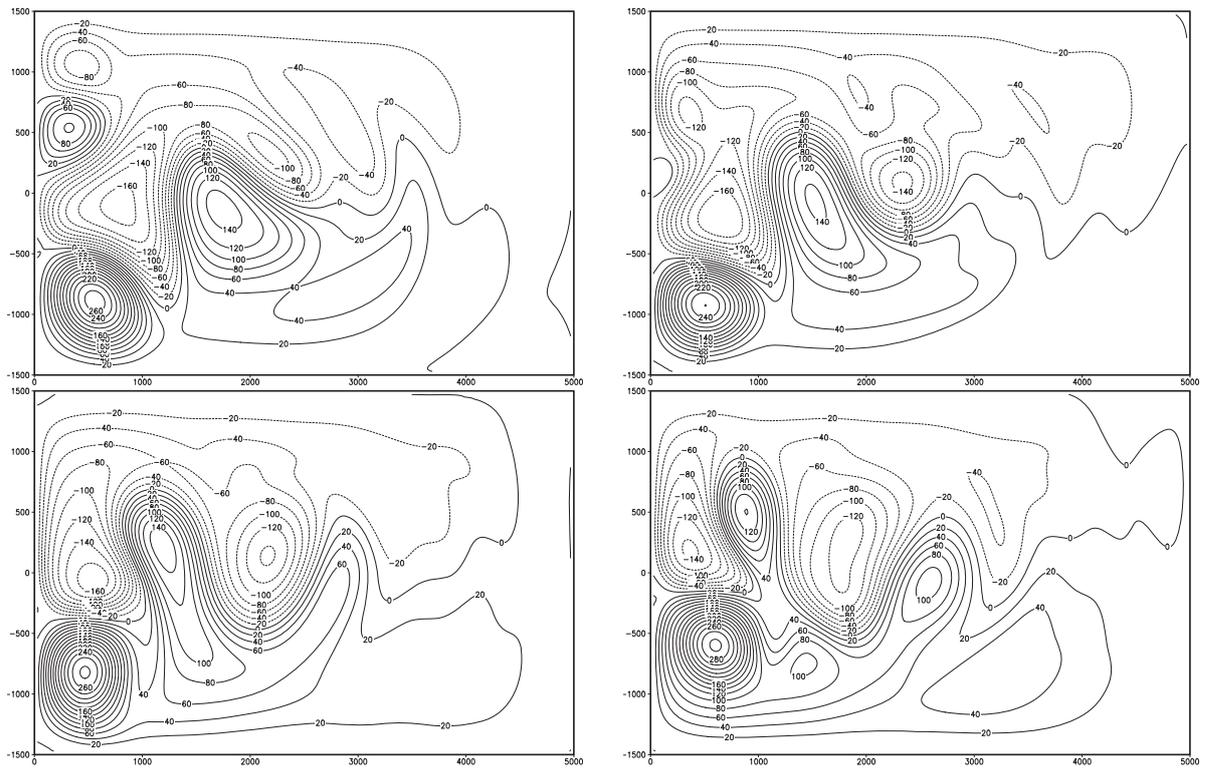


Figure 1.4: 箱型海洋における非線型風成循環計算によって得られた  $A_H = 1.5 \times 10^3 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  の場合の準地衡流線関数の瞬間値 (等値線間隔  $20 \times 10^6 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ )。左上:  $t = 8.0 \times 10^7 \text{ s}$ , 右上:  $t = 8.3 \times 10^7 \text{ s}$ , 左下:  $t = 8.6 \times 10^7 \text{ s}$ , 右下:  $t = 8.9 \times 10^7 \text{ s}$ 。



## Chapter 2

# 熱塩循環：成層海洋のエネルギー収支

### 2.1 2次元非回転系の水平熱対流

#### 2.1.1 基礎方程式系

Boussinesq 近似下の水平 - 鉛直 ( $y$ - $z$ ) 2次元非圧縮流体 (cf., Beardsley and Festa, 1972)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \alpha g T + \nu \nabla^2 w \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \nabla^2 T \quad (2.4)$$

ただし、 $T$  はある基準温度  $T_0$  からの偏差であり、その基準温度における密度を  $\rho_0$  として、 $p$  はその密度による静水圧からの偏差。

渦度  $\xi$ :

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.5)$$

流線関数  $\psi$ :

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.6)$$

これらを用いて表した基礎方程式系:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = J(\xi, \psi) + \alpha g \frac{\partial T}{\partial y} + \nu \nabla^2 \xi \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = J(T, \psi) + \kappa \nabla^2 T \quad (2.8)$$

$$\xi = \nabla^2 \psi \quad (2.9)$$

### 2.1.2 問題設定と境界条件

$0 \leq y \leq L, -H \leq z \leq 0$  の矩形領域に満たされた水を考え、その上端において水平方向に非一様な加熱を与える。領域の側壁および下端は断熱的な剛体壁。水面の昇降は考慮しない。下端・側壁の断熱・剛体壁・粘着境界条件:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (\text{at } z = -H) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (\text{at } y = 0, L) \quad (2.11)$$

上端の free-slip, rigid-lid 境界条件

$$\xi = 0 \quad (\text{at } z = 0) \quad (2.12)$$

$$\psi = 0 \quad (\text{at } z = 0) \quad (2.13)$$

上端で温度を外部から与えられる温度に対して線型緩和:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \gamma(T^* - T) \quad (2.14)$$

緩和先の温度  $T^*$  は領域の両端で  $\Delta T$  の差を持ち、線型に変化:

$$T^* = \Delta T \frac{y}{L} \quad (2.15)$$

無次元化

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = J(\xi, \psi) + P_r \left( R_a \frac{\partial T}{\partial y} + \nabla^2 \xi \right) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = J(T, \psi) + \nabla^2 T \quad (2.17)$$

規格化パラメータ:

$$\begin{aligned} y, z : & \quad H \quad (\text{水深}) \\ T : & \quad \Delta T \quad (\text{水面の温度変化幅}) \\ t, \xi : & \quad H^2/\kappa \quad (\text{拡散時間}) \\ \psi : & \quad \kappa \end{aligned}$$

境界条件:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (\text{at } z = -1) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (\text{at } y = 0, \epsilon^{-1}) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \gamma'(T^* - T), \quad \psi = 0, \quad \xi = 0 \quad (\text{at } z = 0) \quad (2.20)$$

無次元パラメータ:

$$R_a = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\nu \kappa}, \quad P_r = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \epsilon = \frac{H}{L}, \quad \gamma' = \frac{\gamma H}{\kappa} \quad (2.21)$$

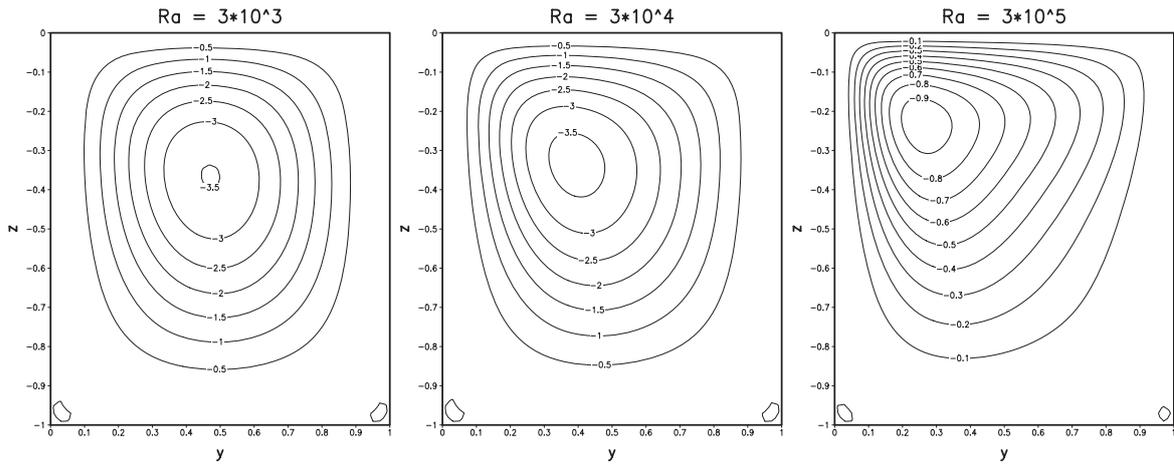


Figure 2.1:  $Ra = 3 \times 10^3, 3 \times 10^4, 3 \times 10^5$  それぞれの場合の、定常状態における流線函数。流線函数の単位は  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ 。

### 2.1.3 定常解の数値計算例 (パラメータ依存性)

Figure 2.1:  $\alpha g = 3 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}\text{K}^{-1}$ ,  $L = H = 100 \text{ m}$ ,  $\gamma = 0.1 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\Delta T = 10 \text{ K}$ ,  $\nu = 1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  で固定し、 $\kappa$  を変えた以下の 3 ケースの結果。

$$\kappa = 10, 1, 0.1 \text{ m}^2\text{s}^{-1} \quad (Ra = 3 \times 10^3, 3 \times 10^4, 3 \times 10^5) \quad (2.22)$$

上端で冷却されている左側で下降流を、上端で加熱されている右側で上昇流を持ち、領域全体をひとつの循環セルが占める対流形態をとる。

$Ra$  が小さい場合には水平方向について対称、すなわち、下降域と上昇域がほぼ同じ広さを占める対流となっているが、 $Ra$  が大きくなっていくにつれて下降域は狭く、上昇域は広がっていく (この性質については、 $P_r$  はあまり影響しない)。

循環量 (流線函数の最大値で示される) はある  $Ra$  に対して極大値をとり、 $Ra$  がそれよりも大きい場合も小さな場合も循環は弱まる (この性質については  $P_r$  は大きく影響し、これは  $Ra$  依存性というよりむしろ  $\kappa$  依存性として理解するべきである)。

Figure 2.2: それぞれに対応する温度分布。

$Ra$  が小さい場合には水平方向に対称で、領域全体および深部の平均温度は、上端で与えた緩和温度の平均値。

$Ra$  が大きくなるにつれ、下降域は緩和温度がより低い領域に限定され、領域全体および深部の平均温度は低くなる。同時に、上昇域の上部で等温度線が水平方向を向いて密に重なる (温度躍層)。

### 2.1.4 熱収支

生じる水平対流は加熱領域から冷却領域へ熱を輸送し、両者の水温差を緩和温度の水温差よりも小さくする。拡散もまた高温領域から低温領域へ熱を輸送する。定常状態においては、この内部における熱輸送と上端での加熱・冷却による熱の出入りがバランス。

(2.3) を用いて (2.4) をフラックス形式で表現:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(vT) - \frac{\partial}{\partial z}(wT) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (2.23)$$

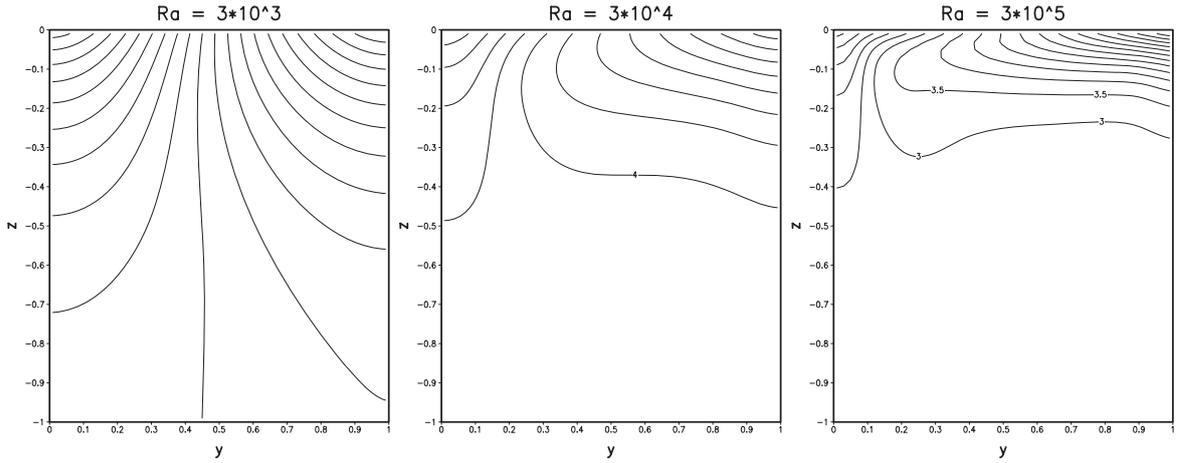


Figure 2.2:  $Ra = 3 \times 10^3, 3 \times 10^4, 3 \times 10^5$  それぞれの場合の、定常状態における温度分布。等値線間隔は  $Ra = 3 \times 10^3$  の場合のみ 0.2 K, 他は 0.5 K.

上端から下端まで積分:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-H}^0 T dz = -\frac{\partial}{\partial y} \int_{-H}^0 v T dz - w T \Big|_{z=0}^{z=-H} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-H}^0 \kappa \frac{\partial T}{\partial y} dz + \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-H}^{z=0} \quad (2.24)$$

右辺第 2 項は  $w$  が上端と下端で 0 であるという境界条件より 0. 右辺最終項の下端については、断熱境界条件から 0. 右辺最終項の上端は上端での熱フラックス (2.14)。したがって

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-H}^0 T dz = -\frac{\partial}{\partial y} \int_{-H}^0 \left( v T - \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) dz + \gamma (T^* - T|_{z=0}) \quad (2.25)$$

定常状態においては

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{-H}^0 \left( v T - \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) dz = \gamma (T^* - T|_{z=0}) \quad (2.26)$$

すなわち、定常状態においては水平熱輸送の収束と上端での熱の出入りがバランスした状態が実現される。

Figure 2.3: 前出の定常状態における、上端での熱の出入り。

Figure 2.4:  $y$  方向の熱輸送およびそのうち拡散によるもの。

$Ra = 3 \times 10^3$  の場合に最も大きな熱輸送が実現される、そのほとんどが拡散による。

移流の効果は等温度線の流れの方向に移動させるように働き、拡散に比べて移流の効果が相対的に小さい場合には先ほど見たような対称な温度分布が実現される。

定常状態では上端における熱の出入りは全体で 0. すなわち

$$\int_0^L [T^*(y) - T(y, z=0)] dy = 0 \quad (2.27)$$

今の場合には上端での平均温度が  $T^*$  の平均に等しくなることを意味する。水平熱輸送が大きいほど水平方向の温度差は弱くなり、上端の温度が全体的に  $T^*$  の平均値に近づく。これはまた、上端の温度と  $T^*$  の差が大きくなることも意味し、熱の出入りが大きいことと整合。

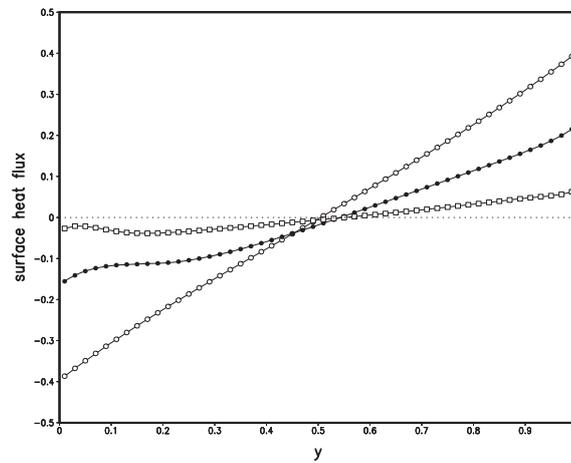


Figure 2.3:  $R_a = 3 \times 10^3, 3 \times 10^4, 3 \times 10^5$  それぞれの場合の、定常状態における上端での熱フラックス。白丸:  $R_a = 3 \times 10^3$ , 黒丸:  $R_a = 3 \times 10^4$ , 四角:  $R_a = 3 \times 10^5$ .

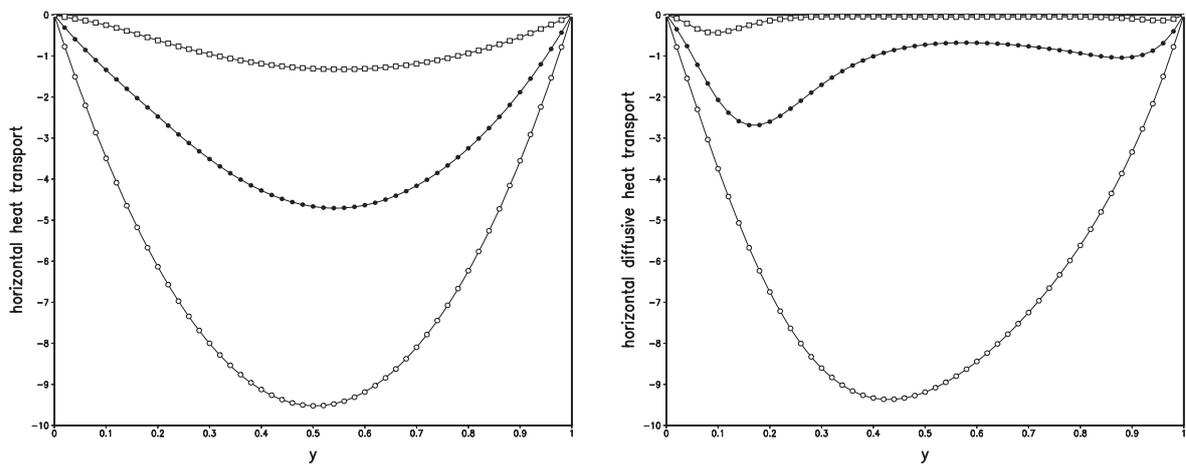


Figure 2.4:  $R_a = 3 \times 10^3, 3 \times 10^4, 3 \times 10^5$  それぞれの場合の、定常状態における  $y$  方向熱輸送。左: 移流と拡散を合わせたもの、右: 拡散のみ。白丸:  $R_a = 3 \times 10^3$ , 黒丸:  $R_a = 3 \times 10^4$ , 四角:  $R_a = 3 \times 10^5$ .

### 2.1.5 エネルギー収支

$v \times (2.1) + w \times (2.2)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2}(v^2 + w^2) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ v \frac{1}{2}(v^2 + w^2) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ w \frac{1}{2}(v^2 + w^2) \right] \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \left[ \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z} \right] + \nu \nabla^2 \left[ \frac{1}{2}(v^2 + w^2) \right] + \rho_0 \alpha g T w \end{aligned} \quad (2.28)$$

運動エネルギー密度

$$K = \frac{\rho_0}{2}(v^2 + w^2) \quad (2.29)$$

の時間発展方程式:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial(vK)}{\partial y} + \frac{\partial(wK)}{\partial z} = - \left[ \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z} \right] + \nu \nabla^2 K + \rho_0 \alpha g T w \quad (2.30)$$

$z \times (2.4)$

$$\frac{\partial(Tz)}{\partial t} + \frac{\partial(vTz)}{\partial y} + \frac{\partial(wTz)}{\partial z} - wT = \kappa z \nabla^2 T \quad (2.31)$$

$-\rho_0 \alpha T$  が密度の  $\rho_0$  からのずれを表すので、

$$P = -\rho_0 \alpha T g z \quad (2.32)$$

は位置エネルギー密度を表し、その時間発展方程式は

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial(vP)}{\partial y} + \frac{\partial(wP)}{\partial z} = -\kappa \rho_0 \alpha g z \nabla^2 T - \rho_0 \alpha g T w \quad (2.33)$$

(2.30) と (2.33) に共通する右辺最終項は、位置エネルギーと運動エネルギーの間の変換。

(2.30) + (2.33) を領域全体で積分

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y=0}^{y=L} dy \int_{z=-H}^{z=0} dz (K + P) = \int_{y=0}^{y=L} dy \int_{z=-H}^{z=0} dz (\nu \nabla^2 K) - \int_{y=0}^{y=L} dy \int_{z=-H}^{z=0} dz (\kappa \rho_0 \alpha g z \nabla^2 T) \quad (2.34)$$

定常状態においては

$$- \int_{y=0}^{y=L} dy \int_{z=-H}^{z=0} dz (\nu \nabla^2 K) = - \int_{y=0}^{y=L} dy \int_{z=-H}^{z=0} dz (\kappa \rho_0 \alpha g z \nabla^2 T) \quad (2.35)$$

右辺: 位置エネルギーの獲得  $\Rightarrow$  (位置エネルギーから運動エネルギーへ変換  $\Rightarrow$ ) 左辺: 運動エネルギーが粘性によって消散。

(2.35) 右辺の非積分函数 (のうち定数を除いた部分)

$$z \nabla^2 T = z \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.36)$$

について、側壁の断熱境界条件より

$$\int_{y=0}^{y=L} dy \int_{z=-H}^{z=0} dz \left( z \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \int_{z=-H}^{z=0} dz \left( z \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}^{y=L} = 0 \quad (2.37)$$

下端の断熱境界条件より

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{y=L} dy \int_{z=-H}^{z=0} dz \left( z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) &= \int_{y=0}^{y=L} dy \left\{ z \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-H}^{z=0} - \int_{z=-H}^{z=0} \frac{\partial T}{\partial z} dz \right\} \\ &= \int_{y=0}^{y=L} dy \left. z \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} - \int_{y=0}^{y=L} dy \int_{z=-H}^{z=0} dz \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$K_H$	水平拡散係数	$1 \times 10^2 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
$K_I$	等密度面拡散係数	$1 \times 10^3 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
$A_V$	鉛直粘性係数	$1 \times 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
$A_H$	水平粘性係数	$2.5 \times 10^5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$

Table 2.1: 箱型海洋を用いた水平熱対流計算におけるモデルパラメータ。

この第 1 項は、今の場合上端を  $z = 0$  と選んだことから 0 となるが、上端の鉛直座標値が任意の定数であっても (2.14) のため 0。

⇒ 上端での熱の出入りは対流を駆動するエネルギー源ではない。

$$\begin{aligned}
 - \int_{y=0}^{y=L} dy \int_{z=-H}^{z=0} dz (\kappa \rho_0 \alpha g z \nabla^2 T) &= \kappa \rho_0 \alpha g \int_{y=0}^{y=L} dy \left\{ \int_{z=-H}^{z=0} \frac{\partial T}{\partial z} dz \right\} \\
 &= \kappa \rho_0 \alpha g \int_{y=0}^{y=L} dy [T(y, z=0) - T(y, z=-H)] \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

これは上端と下端の平均密度 (温度) の差のみに依存。定常状態では上端の平均温度は外部条件である  $T^*$  の平均と一致し、それと下端の平均温度との差のみに依存。下端の平均温度 (密度) が上端の平均温度 (密度) よりも低 (高) ければ、上下の拡散によって位置エネルギーは増加し、それが運動エネルギーに変換され、最終的に粘性で消散される。

⇒ 対流を駆動するエネルギー源は、安定成層を前提とした上下の拡散 (混合)。その意味において、 $\kappa$  は対流の強度を決定する本質的パラメータ。

## 2.2 3次元回転系水平熱対流の鉛直拡散係数依存性

経度幅  $60^\circ$ , 緯度  $0^\circ$ – $60^\circ\text{N}$ , 深さ  $4000 \text{ m}$  一定の箱型海洋設定における海洋大循環モデルでの定常状態計算。水平解像度  $3^\circ$ , 鉛直 19 層 (グリッド幅  $50$ – $250 \text{ m}$ )。塩分は一定様で、海面風応力なし。海面温度を (2.14) と同様に

$$T^* = 25 \times \frac{60^\circ - \varphi}{60^\circ} \text{ [}^\circ\text{C]} \quad (2.40)$$

に対して  $\gamma = 1 \text{ m dy}^{-1}$  で緩和。粘性・拡散はすべて調和型で、係数は Table 2.1 の通り。鉛直拡散係数を変えた 4 ケース:

$$K_V = 0.3, 0.5, 1.0, 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-1} \quad (2.41)$$

Figure 2.5: 東西積分流の子午面循環流線函数

Figure 2.6: 東西平均温度分布

鉛直拡散係数の増加とともに子午面循環の流量は増加し、深層の温度は上昇。それと同時に温度躍層が深くまで達するようになり、温度の鉛直勾配は緩やかになる。

Figure 2.7: 子午面循環流線函数の最大値・ $30^\circ\text{N}$  における極大値・温度躍層の深さスケールの、鉛直拡散係数に対するプロット

温度躍層の深さスケールは鉛直拡散係数の  $1/3$  乗に比例。

子午面循環の流量は、最大値で見ると鉛直拡散係数の  $1/3$  乗に比例し、 $30^\circ\text{N}$  における極大値で見ると鉛直拡散係数の  $2/3$  乗に比例。

温度躍層の深さスケールは、温度が鉛直方向に  $T = T_0 + T_1 e^{z/d}$  と変化するとみなした場合の  $e$ -folding スケール  $d$  で定義。このような指数函数型の鉛直プロファイルは、一様な鉛直拡散係数と鉛直速度のもとで、定常状

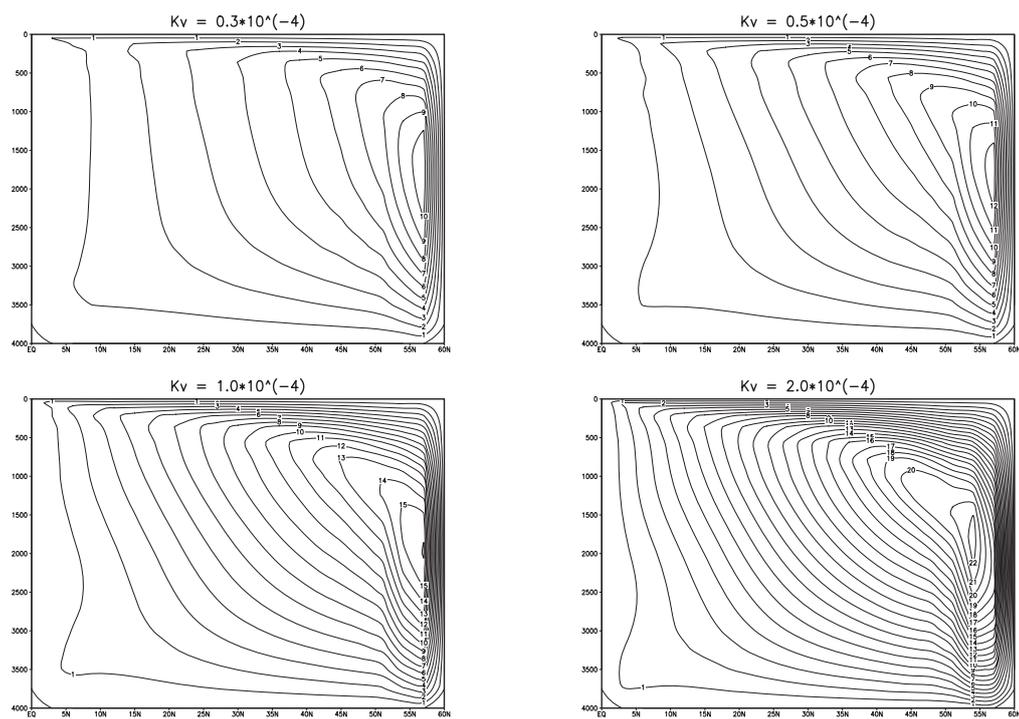


Figure 2.5: 東西積分流の子午面循環流線函数。等値線間隔は 1 Sv.

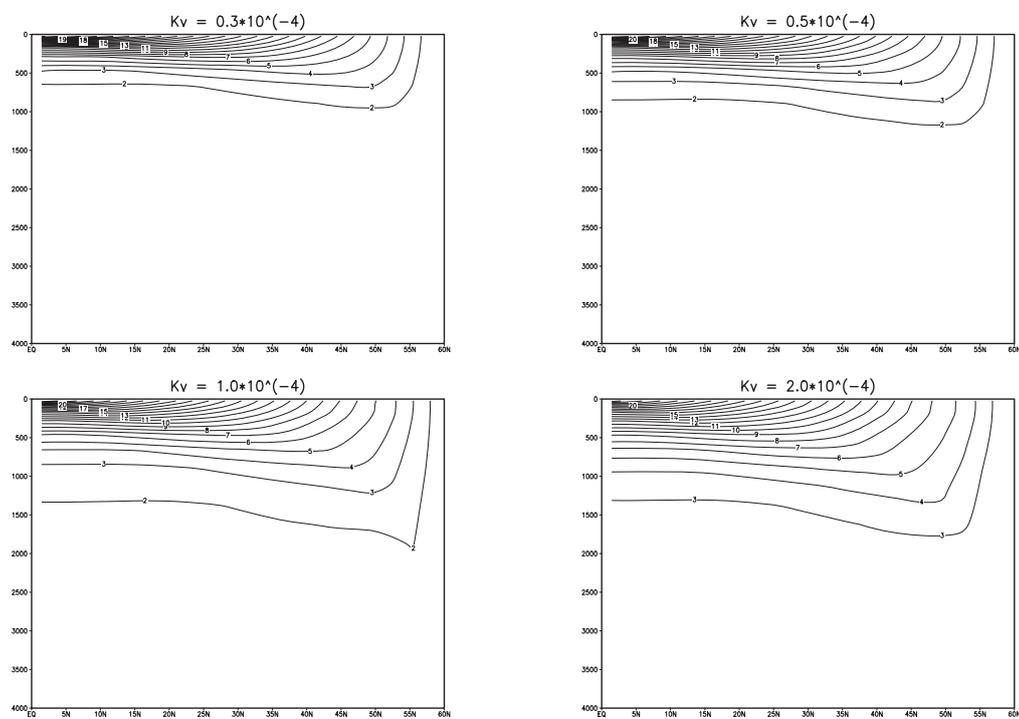


Figure 2.6: 東西平均温度。等値線間隔は 1°C.

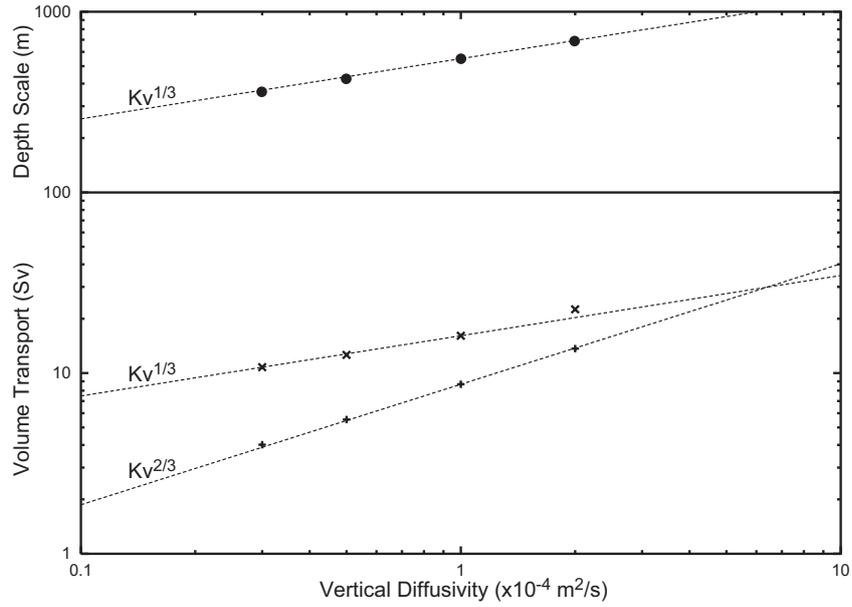


Figure 2.7: 子午面循環流線函数最大値 ( $\times$ )、子午面循環流線函数の  $30^\circ\text{N}$  における極大値 ( $+$ )、および温度躍層の深さスケール ( $\bullet$ ) の鉛直拡散係数に対する依存性。各点がモデルの計算結果を表し、点線は鉛直拡散係数の  $1/3$  乗または  $2/3$  乗に比例する場合の依存性を表す。

態において温度の方程式に鉛直 1 次元バランス

$$w \frac{dT}{dz} = K_V \frac{d^2T}{dz^2} \quad (2.42)$$

が成り立つとした場合に得られる。この依存性について、スケーリングを通して考える (Bryan, 1987; Marotzke, 1997)。

水平スケール:  $L$ , 鉛直スケール:  $H$ , 速度の水平成分のスケール:  $U$ . 水平流の地衡流バランス (考えている水平スケールにおける圧力の水平方向の変化の大きさ  $\Delta P$ )

$$fU \sim \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta P}{L} \quad (2.43)$$

静水圧平衡において、密度を一定値  $\rho_0$  とそこからのずれ  $\rho'$  に分け、圧力を  $\rho_0$  に対する静水圧平衡分とそこからのずれ  $P'$  に分けると

$$\frac{\partial P'}{\partial z} = -\rho'g \quad (2.44)$$

考えている鉛直スケールにおける  $P'$  の鉛直方向の変化の大きさが  $\Delta P$  と同程度であると仮定

$$\frac{\Delta P}{H} \sim \Delta\rho g \quad (2.45)$$

$\Delta\rho$  はモデルで実現される密度の変化幅で、境界条件として与えられた緩和先の温度  $T^*$  の変化幅  $\Delta T^*$  と熱膨張係数  $\alpha$  に対して

$$\Delta\rho \sim \rho_0 \alpha \Delta T^* \quad (2.46)$$

以上を用いると

$$\alpha \Delta T^* g H \sim f U L \quad (2.47)$$

一方、連続の式より速度の鉛直成分のスケールについて

$$\frac{w}{H} \sim \frac{U}{L} \quad (2.48)$$

鉛直 1 次元の移流と拡散のバランスによる定常状態を考えると (2.42) より

$$\frac{w}{H} \sim \frac{K_V}{H^2} \quad (2.49)$$

この鉛直 1 次元移流 - 拡散バランスの式をスケーリングに用いたことにより、鉛直スケール  $H$  とは、そのようなバランスのもとで実現される温度躍層の深さスケール ( $e$ -folding スケール) を表すことになる。これらより  $w$  を消去すると

$$\frac{U}{L} \sim \frac{K_V}{H^2} \quad (2.50)$$

(2.47), (2.50) から  $U$  を消去すると

$$H \sim \left( \frac{fL^2K_V}{g\alpha\Delta T^*} \right)^{1/3} \quad (2.51)$$

すなわち、温度躍層の深さスケールは  $K_V^{1/3}$  に比例。一方、(2.47), (2.50) から  $H$  を消去すると

$$U \sim \left[ \frac{(g\alpha\Delta T^*)^2 K_V}{f^2 L} \right]^{1/3} \quad (2.52)$$

子午面循環の下降領域以外においては温度躍層が存在し、上層の下降領域へ向かう流れの深さスケールは温度躍層の深さスケールで代表される。したがって、温度躍層が存在する緯度における子午面循環流線函数の極大値  $\Psi$  について

$$\Psi \sim UHL \sim \left( \frac{g\alpha\Delta T^* L^4 K_V^2}{f} \right)^{1/3} \quad (2.53)$$

であり、 $K_V^{2/3}$  に比例。スケーリングの議論からその理由を示すことはできないが、子午面循環流線函数が最大値をとる深さは鉛直拡散係数によらずほぼ一定であることが、少なくとも結果では示されている。これを前提とすれば、温度躍層が認められない下降領域に存在する子午面循環流線函数の最大値については、そのスケール  $\Psi \sim UHL$  のうち  $H$  に  $K_V$  に対する依存性がなくなり、 $K_V$  の  $1/3$  乗に比例。

## 参考文献

- Beardsley, R. C., and J. F. Festa (1972): A numerical model of convection driven by a surface stress and non-uniform horizontal heating, *J. Phys. Oceanogr.*, *2*, 444–455.
- Bryan, F. (1987): Parameter sensitivity of primitive equation ocean general circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, *17*, 970–985.
- Marotzke, J. (1997): Boundary mixing and the dynamics of three-dimensional thermohaline circulations, *J. Phys. Oceanogr.*, *27*, 1713–1728.
- Urakawa, L. S., and H. Hasumi (2008): An energetic view of global thermohaline circulation and its wind-enhancement, *J. Phys. Oceanogr.*, submitted.

## Chapter 3

# 海洋大循環モデル

### 3.1 基礎方程式系

水平座標: 一般曲線直交座標  $x, y$  (各座標の計量  $h_x, h_y$ )

鉛直座標: 深度  $z$  (鉛直上方が正)

非圧縮 Boussinesq 流体

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{h_x h_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h_y u u) + \frac{\partial}{\partial y} (h_x v u) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (w u) + h_{xy} u v - h_{yx} v v - f v = -\frac{1}{\rho_0 h_x} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathcal{V}_u \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{h_x h_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h_y u v) + \frac{\partial}{\partial y} (h_x v v) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (w v) + h_{yx} u v - h_{xy} u u + f u = -\frac{1}{\rho_0 h_y} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathcal{V}_v \quad (3.2)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{h_x h_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h_y u) + \frac{\partial}{\partial y} (h_x v) \right] + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h_x h_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h_y u T) + \frac{\partial}{\partial y} (h_x v T) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (w T) = \mathcal{D}_T \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{h_x h_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h_y u S) + \frac{\partial}{\partial y} (h_x v S) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (w S) = \mathcal{D}_S \quad (3.6)$$

$$\rho = \rho(T, S, p) \quad (3.7)$$

ここで  $h_{xy}, h_{yx}$  は

$$h_{xy} = \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y}, \quad h_{yx} = \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial h_y}{\partial x} \quad (3.8)$$

水平座標が地理的な経度 ( $\lambda$ )・緯度 ( $\varphi$ ) の場合、地球半径を  $a$  として

$$x \rightarrow \lambda, \quad h_x \rightarrow a \cos \varphi, \quad h_{xy} \rightarrow -\tan \varphi / a \quad (3.9)$$

$$y \rightarrow \varphi, \quad h_y \rightarrow a, \quad h_{yx} \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

$\mathcal{V}, \mathcal{D}$  はそれぞれ粘性項と拡散項。状態方程式 (3.7) は実験式として与えられる。

平均海水位:  $z = 0$

海面高度:  $z = \eta(x, y, t)$

海底深度:  $z = -H(x, y)$

(3.4) の鉛直積分

$$\frac{1}{h_x h_y} \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x} (h_y u) dz + \frac{1}{h_x h_y} \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial}{\partial y} (h_x v) dz + w|_{z=\eta} - w|_{z=-H} = 0 \quad (3.11)$$

海面・海底における  $w$  境界条件

$$\begin{aligned} w|_{\text{surface}} &= \frac{d\eta}{dt} - W \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{u|_{z=\eta}}{h_x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{v|_{z=\eta}}{h_y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - W \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$w|_{\text{bottom}} = - \left( \frac{u|_{\text{bottom}}}{h_x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{v|_{\text{bottom}}}{h_y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \quad (3.13)$$

より、海面高度の予報式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{h_x h_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h_y U) + \frac{\partial}{\partial y} (h_x V) \right] = -W \quad (3.14)$$

ここで  $U, V$  は鉛直積分した水平速度成分

$$U = \int_{-H}^{\eta} u dz, \quad V = \int_{-H}^{\eta} v dz \quad (3.15)$$

$W$  は海面での蒸発・降水に伴う淡水の消失・注入を表す淡水フラックス (正値は淡水が消失する方向が正)。

## 3.2 拡散・粘性項

拡散 拡散フラックス  $F = (F_x, F_y, F_z)$  に対して

$$\mathcal{D}_T = \frac{1}{h_x h_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( K_H \frac{h_y}{h_x} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_H \frac{h_x}{h_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_V \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3.16)$$

通常の (水平 - 鉛直方向間に異方性を持つ) 調和型拡散の場合

$$F_x = \frac{K_H}{h_x} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad F_y = \frac{K_H}{h_y} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad F_z = K_V \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.17)$$

粘性 応力テンソル (正確には応力偏差テンソル)  $\tau$  による粘性項の一般表現

$$\mathcal{V}_u = \frac{1}{h_x h_y} \left[ \frac{1}{h_y} \frac{\partial}{\partial x} \left( h_y^2 \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{2} \right) + \frac{1}{h_x} \frac{\partial}{\partial y} (h_x^2 \tau_{xy}) \right] + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\tau_{xz}}{a} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{V}_v = \frac{1}{h_x h_y} \left[ \frac{1}{h_y} \frac{\partial}{\partial x} (h_y^2 \tau_{xy}) + \frac{1}{h_x} \frac{\partial}{\partial y} \left( h_x^2 \frac{\tau_{yy} - \tau_{xx}}{2} \right) \right] + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\tau_{yz}}{a} \quad (3.19)$$

変形速度テンソルの一般表現

$$\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} = \frac{1}{h_x} \frac{\partial u}{\partial x} + h_{xy} v - \frac{1}{h_y} \frac{\partial v}{\partial y} - h_{yx} u \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{h_x}{h_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{h_x} \right) + \frac{h_y}{h_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{h_y} \right) \right] \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u}{a} \right) \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{a} \right) \quad (3.23)$$

通常の (水平 - 鉛直方向間に異方性を持つ) 調和型粘性の場合の構成方程式

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = 2A_H(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}), \quad (3.24)$$

$$\tau_{xy} = 2A_H\varepsilon_{xy} \quad (3.25)$$

$$\tau_{xz} = 2A_V\varepsilon_{xz} \quad (3.26)$$

$$\tau_{yz} = 2A_V\varepsilon_{yz} \quad (3.27)$$

### 3.3 モード分離

(3.1), (3.2) を海底から海面まで鉛直積分

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{h_x h_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h_y \int_{-H}^{\eta} u u dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h_x \int_{-H}^{\eta} v u dz \right) \right] + h_{xy} \int_{-H}^{\eta} u v dz - h_{yx} \int_{-H}^{\eta} v v dz - fV \\ = -\frac{1}{\rho_0 h_x} \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} dz + \int_{-H}^{\eta} \mathcal{V}_u dz + W u|_{z=\eta} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{h_x h_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h_y \int_{-H}^{\eta} u v dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h_x \int_{-H}^{\eta} v v dz \right) \right] + h_{yx} \int_{-H}^{\eta} u v dz - h_{xy} \int_{-H}^{\eta} u u dz + fU \\ = -\frac{1}{\rho_0 h_y} \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} dz + \int_{-H}^{\eta} \mathcal{V}_v dz + W v|_{z=\eta} \end{aligned} \quad (3.29)$$

右辺に現れる圧力の鉛直積分に関して、 $z = 0$  での圧力を  $p_0$  と表すと、静水圧の関係より

$$p(x, y, z, t) = p_0(x, y, t) + g \int_z^0 \rho(x, y, z', t) dz' \quad (3.30)$$

$p_0$  が海面圧力 (境界条件)  $p_\eta$  に対して

$$p_0 = p_\eta + \rho_0 g \eta \quad (3.31)$$

で良く近似されることを用いると、

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} dz = (\eta + H) \frac{\partial p_\eta}{\partial x} + \rho_0 g (\eta + H) \frac{\partial \eta}{\partial x} + g \int_{-H}^{\eta} dz \int_z^0 dz' \frac{\partial \rho(x, y, z', t)}{\partial x} \quad (3.32)$$

したがって鉛直積分した運動方程式は形式的に

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -\frac{g(\eta + H)}{h_x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\eta + H}{\rho_0 h_x} \frac{\partial p_\eta}{\partial x} + X \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -\frac{g(\eta + H)}{h_y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\eta + H}{\rho_0 h_y} \frac{\partial p_\eta}{\partial y} + Y \quad (3.34)$$

(3.33), (3.34) と (3.14):  $U, V, \eta$  という 3 個の変数に対する予報方程式系。⇒ 外部モードの方程式系

運動方程式 (3.1), (3.2) を形式的に

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{g}{\rho_0 h_x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + G_X \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{g}{\rho_0 h_y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + G_Y \quad (3.36)$$

と表す。ここで

$$\bar{u} = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 u dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 v dz \quad (3.37)$$

という形の鉛直平均を考えると、積分の上端・下端が時間によらないため、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f\bar{v} = \int_{-H}^0 \left[ -\frac{g}{\rho_0 h_x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + G_X \right] dz \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + f\bar{u} = \int_{-H}^0 \left[ -\frac{g}{\rho_0 h_y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + G_Y \right] dz \quad (3.39)$$

一方、

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - f\hat{v} = G_X \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + f\hat{u} = G_Y \quad (3.41)$$

にしたがう量  $\hat{u}, \hat{v}$  を考えると

$$\frac{\partial(\hat{u} - \bar{u})}{\partial t} - f(\hat{v} - \bar{v}) = \frac{\partial(u - \bar{u})}{\partial t} - f(v - \bar{v}) \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial(\hat{v} - \bar{v})}{\partial t} + f(\hat{u} - \bar{u}) = \frac{\partial(v - \bar{v})}{\partial t} + f(u - \bar{u}) \quad (3.43)$$

したがって

$$u' = u - \bar{u}, \quad v' = v - \bar{v} \quad (3.44)$$

で定義される量を求めるためには (3.40), (3.41) を解けばよい。⇒ 内部モード速度

外部モードと内部モードの速度を独立に解いた後、

$$u = \frac{U}{H} + u' - \frac{1}{H} \int_0^\eta u dz \quad (3.45)$$

$$v = \frac{V}{H} + v' - \frac{1}{H} \int_0^\eta v dz \quad (3.46)$$

を解くことで、水平速度を求めることができる。この積分方程式を  $u, v$  に関して解析的に解くことはできないが、離散化した表現のもとでは代数方程式として解くことができる。

### 3.4 水平格子系の設定と計量の求め方

緯度経度座標で格子系を定義 (各格子点の計量は既知)

- 1) Polar stereographic 投影によって、格子系を複素平面上へ投影
- 2) 複素平面上の格子系を等角写像によって変換
- 3) で得られた格子系を polar stereographic 投影の逆変換で球面上へ投影

Polar stereographic 投影と等角写像の角度保存性から、座標の直交性は保証される。各手続きにおける回転量と拡大率も解析的に求められるため、新しい格子系におけるベクトルの成分と計量が求められる。また、2) の等角写像を一次変換に限定すれば、特異点の移動先を指定するだけで座標変換を確定できる。

Figure 3.1a: 全球格子系例 1

$x, y$  方向にそれぞれ 128, 120 格子

元にした緯度経度格子系は、 $\varphi = 78^\circ\text{S}$  から  $\varphi = 85^\circ\text{N}$  の間で定義された Mercator 格子  
北極点をグリーンランド上の  $\lambda = 40^\circ\text{W}$ ,  $\varphi = 75^\circ\text{N}$  に移動し、南極点はそのまま

Figure 3.1b: 全球格子系例 2 (tripolar 格子) grid system.

$\varphi = 60^\circ\text{N}$  より南は通常の緯度経度格子

$\varphi = 60^\circ\text{N}$  より北は、特異点を  $\lambda = 60^\circ\text{E}$ ,  $\varphi = 60^\circ\text{N}$  および  $\lambda = 120^\circ\text{W}$ ,  $\varphi = 60^\circ\text{N}$  に移動させて生成した格子系

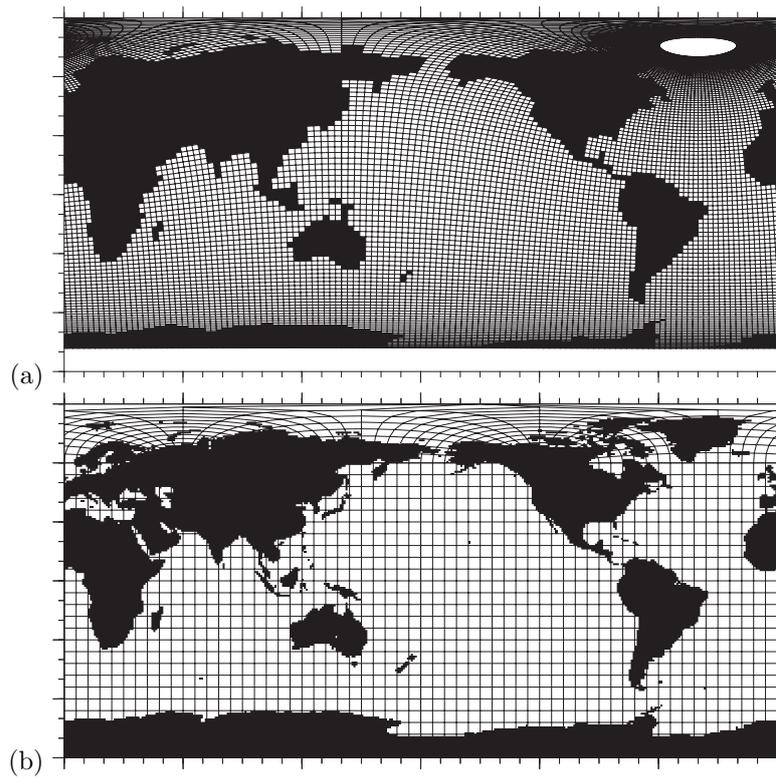


Figure 3.1: Grid system examples.

## 参考文献

Hasumi, H. (2006): CCSR Ocean Component Model (COCO) Version 4.0, *CCSR Report, 25*, 103pp. (Available from <http://www.ccsr.u-tokyo.ac.jp/~hasumi/COCO/coco4.pdf>)



# Chapter 4

## パラメタリゼーション

### 4.1 海面混合層

#### 4.1.1 バルクモデル

海面からある深さまで一様な温度・塩分を持つ層として混合層を定義し、海面強制力と混合層より下の成層状態を用いて混合層深度を求めるモデル。Kraus and Turner (1967) によって最初に提案されたため、Kraus-Turner 型と呼ばれる。以下は Lemke (1987) に基づく。

鉛直一次元温度・塩分プロファイル  $T(z)$ ,  $S(z)$

海面 ( $z = 0$ ) から  $z = -h$  にわたって温度・塩分が一様な混合層

海面熱フラックス  $Q$  (加熱が正)

淡水フラックス  $W$  の代わりに塩分フラックス  $H (= WS(0))$ , 高塩分化が正

海面温度・塩分の近傍で線型化された状態方程式

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0) + \beta(S - S_0)] \quad (4.1)$$

のもと、海面浮力フラックス (密度フラックス)  $B_S$  (浮力が失われる向きが正)

$$\frac{B_S}{\rho_0} = \beta H - \alpha \frac{Q}{\rho_0 C_p} \quad (4.2)$$

混合層下端ではエントレインメントがあり、そのエントレインメント速度  $W_E$  によって混合層の深さは

$$\frac{\partial h}{\partial t} = W_E \quad (4.3)$$

と時間変化。ただし、これが適用されるのは混合層が深くなっていく場合のみで、混合層が浅くなっていく場合には  $W_E = 0$  と定義。エントレインメントに伴う熱フラックス  $Q_E$  (混合層を加熱する向きが正) および塩分フラックス  $H_E$  (混合層の塩分を高める向きが正) は  $W_E$  を用いて

$$\frac{Q_E}{\rho C_p} = (T^* - T)W_E \quad (4.4)$$

$$H_E = (S^* - S)W_E \quad (4.5)$$

$T^*$ ,  $S^*$  はエントレインされる温度・塩分であり、エントレイメントが生じる微小な層の厚さ ( $\sim$  混合層下端での乱流渦の大きさ)  $\delta$  に対して

$$T^* = \frac{1}{\delta} \int_{-h-\delta}^{-h} T dz, \quad S^* = \frac{1}{\delta} \int_{-h-\delta}^{-h} S dz \quad (4.6)$$

混合層下端における浮力フラックス  $B_B$  (混合層が浮力を獲得する向きが正)

$$\frac{B_B}{\rho_0} = \alpha \frac{Q_E}{\rho_0 C_p} - \beta H_E \quad (4.7)$$

混合層の下には安定成層が存在するため、エントレイメントによる浮力フラックスは混合層が浮力を失う向き、すなわち負。

仮に  $B_S = 0$  とし、下端でのエントレイメントによって混合層が深くなる場合を考える。この場合、何らかのエネルギーインプットによって混合が生じない限りは密度一様な混合層を実現することができない。混合に必要なエネルギーが与えられなかった場合、微小時間  $\Delta t$  の間に混合層の下部には混合層よりも密度が  $\Delta\rho$  だけ高く、厚さが  $\Delta h = W_E \Delta t$  の層が形成される。

$$\Delta\rho = -\frac{B_B \Delta t}{\Delta h} \quad (4.8)$$

であり、もとの混合層の密度を  $\rho$  で表すとき、この状態における  $-h - \Delta h \leq z \leq 0$  の水柱の位置エネルギーは

$$\int_{-h}^0 \rho g z dz + \int_{-h-\Delta h}^{-h} \left( \rho - \frac{B_B \Delta t}{\Delta h} \right) g z dz = -\frac{1}{2} \rho g h^2 - \frac{1}{2} \left( \rho - \frac{B_B \Delta t}{\Delta h} \right) g (2h\Delta h + \Delta h^2) \quad (4.9)$$

この水柱が鉛直一様に混合された状態の位置エネルギーは

$$\int_{-h-\Delta h}^0 \left( \rho - \frac{B_B \Delta t}{h + \Delta h} \right) g z dz = -\frac{1}{2} \rho g h^2 - \frac{1}{2} \rho g (2h\Delta h + \Delta h^2) + \frac{1}{2} B_B \Delta t g (h + \Delta h) \quad (4.10)$$

後者の混合された状態は前者よりも位置エネルギーが  $-B_B \Delta t g h / 2$  だけ高い。したがって、与えられた浮力フラックスのもとで混合層を維持するためには単位時間あたり

$$-\frac{B_B g h}{2} \quad (4.11)$$

のエネルギーが混合のためにインプットされなければならない。

海面浮力フラックスについて、微小時間  $\Delta t$  の間に混合層下端の深さが変化しないまま海面付近の薄い層 (厚さ  $\Delta h$ ) の密度が海面浮力フラックスによって変化する場合を考えると、この状態の位置エネルギーは

$$\int_{-h}^{-h-\Delta h} \rho g z dz + \int_{-h-\Delta h}^0 \left( \rho + \frac{B_S \Delta t}{\Delta h} \right) g z dz = \frac{1}{2} \rho g (\Delta h^2 - h^2) - \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{B_S \Delta t}{\Delta h} \right) g \Delta h^2 \quad (4.12)$$

この密度を一様にした状態の位置エネルギーは

$$\int_{-h}^0 \left( \rho + \frac{B_S \Delta t}{h} \right) g z dz = -\frac{1}{2} \left( \rho + \frac{B_S \Delta t}{h} \right) g h^2 \quad (4.13)$$

であり、両者の差は高次の項を無視して  $-B_S \Delta t g h / 2$ 。  $B_S > 0$  の場合には混合後の方が位置エネルギーが低いことになり、その分はさらに混合層を深くする ( $W_E$  の値を大きくする) ように働くものと解釈される。

海面および混合層下端の浮力フラックスをともに考慮し、かつ海面で単位時間あたり  $K$  の乱流運動エネルギーインプットがあり、混合層内で乱流運動エネルギーが  $\varepsilon$  の割合で消散するとき、混合層の位置エネルギー収支から

$$K - \varepsilon = -\frac{(B_S + B_B) g h}{2} \quad (4.14)$$

$B_B$  を  $W_E$  によって表現すると

$$W_E = \frac{2K + B_S gh - 2\varepsilon}{gh[\beta(S^* - S) - \alpha(T^* - T)]} \quad (4.15)$$

すなわち、乱流運動エネルギー・インプットと海面浮力フラックスが与えられた場合に、与えられた成層のもとでの混合層深度の時間発展を求める式が得られた。混合層が浅くなっていく場合、すなわちこの式から  $W_E < 0$  となる場合には、 $W_E = 0$  を適用して得られる

$$2K + B_S gh - 2\varepsilon = 0 \quad (4.16)$$

が混合層深度  $h$  を与える診断式となる。

#### 4.1.2 乱流クロージャー

海面付近を鉛直方向にある程度高解像度で表現し、各層における鉛直拡散・粘性係数を求める。大きな鉛直拡散・粘性係数が海面から続く領域では温度・塩分が鉛直方向に一様化され、それをもって海面混合層を表現する。代表的なものは Mellor and Yamada (1974, 1982) であり、Mellor-Yamada 型と呼ばれる。

非回転系 3 次元 Descartes 座標系  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ; それぞれ  $x, y, z$  に対応)

各方向の速度成分  $u_i$

ブシネスク近似を適用し、密度は温位  $\theta$  のみの函数とする

基礎方程式系

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(u_k u_j) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \alpha g_j \theta + \nu \nabla^2 u_j \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(u_k \theta) = \kappa \nabla^2 \theta \quad (4.19)$$

$p$ : 圧力、 $\alpha$ : 熱膨張係数、 $g_j = (0, 0, -1)$ : 重力加速度ベクトルの成分、 $\nu$ : 分子粘性係数、 $\kappa$ : 分子拡散係数。各変数を平均と平均からのずれに分離:

$$u_j = U_j + u'_j, \quad \overline{u_j} = U_j \quad (\overline{u'_j} = 0) \quad (4.20)$$

$$\theta_j = \Theta_j + \theta'_j, \quad \overline{\theta_j} = \Theta_j \quad (\overline{\theta'_j} = 0) \quad (4.21)$$

$$p_j = P_j + p'_j, \quad \overline{p_j} = P_j \quad (\overline{p'_j} = 0) \quad (4.22)$$

(4.17)–(4.19) の各式の両辺について平均操作を行なうと

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(U_k U_j + \overline{u'_k u'_j}) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_j} - \alpha g_j \Theta + \nu \nabla^2 U_j \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(U_k \Theta + \overline{u'_k \theta'}) = \kappa \nabla^2 \Theta \quad (4.25)$$

したがって、平均量の時間発展の記述のためには、 $\overline{u'_i u'_j}$  および  $\overline{u'_k \theta'}$  という 2 次の相関量の平均が必要。

変動成分の方程式系:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(U_k u'_j + u'_k U_j + u'_k u'_j - \overline{u'_k u'_j}) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_j} - \alpha g_j \theta' + \nu \nabla^2 u'_j \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(U_k \theta' + u'_k \Theta + u'_k \theta' - \overline{u'_k \theta'}) = \kappa \nabla^2 \theta' \quad (4.28)$$

(4.27) より

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ U_k \overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_k u'_i u'_j} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right] + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p' u'_i}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p' u'_j}}{\partial x_i} \\ & = -\overline{u'_k u'_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \alpha (g_j \overline{u'_i \theta'} + g_i \overline{u'_j \theta'}) + p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

(4.27) と (4.28) より

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{u'_j \theta'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ U_k \overline{\theta' u'_j} + \overline{u'_k u'_i \theta'} - \overline{\kappa u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} - \nu \theta' \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right] + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p' \theta'}}{\partial x_j} \\ & = -\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - \overline{\theta' u'_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \alpha g_j \overline{\theta'^2} + p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} - (\kappa + \nu) \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

(4.30) の右辺に現れる  $\overline{\theta'^2}$  について、(4.28) より

$$\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ U_k \overline{\theta'^2} + \overline{u'_k \theta'^2} - \alpha \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} \right] = -2\overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - 2\kappa \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} \quad (4.31)$$

これら 2 次の相関量の平均の式には 3 次の相関量の平均が現れる。3 次の相関量の平均の式も同様にして導くことができるが、そこには 4 次の相関量が現れる。したがって、何らかの仮定により、平均量を記述するための方程式系を閉じさせることが必要。そのような仮定をクロージャー仮定と呼ぶ。

海面混合層における境界層乱流を考える場合、変動の相関量の空間微分の中では鉛直微分の項が卓越。それを前提とした境界層近似のもと、平均量の時間発展方程式 (4.23)–(4.25) は

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(UU)}{\partial x} + \frac{\partial(VU)}{\partial y} + \frac{\partial(WU)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{w'u'}) \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{\partial(VV)}{\partial y} + \frac{\partial(WV)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{w'v'}) \quad (4.34)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \alpha g \Theta \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial(U\Theta)}{\partial x} + \frac{\partial(V\Theta)}{\partial y} + \frac{\partial(W\Theta)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{w'\theta'}) \quad (4.36)$$

渦粘性・拡散の考えに基づく closure

$$(-\overline{w'u'}, -\overline{w'v'}) = A \left( \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (4.37)$$

$$-\overline{w'\theta'} = K \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (4.38)$$

一般には係数  $A$ ,  $K$  は渦運動、すなわち変動成分の相関量に依存。変動成分による運動エネルギー (乱流運動エネルギー) を別個に予報し、それに基づいて  $A$ ,  $K$  を決定する方法がよく用いられる。乱流運動エネルギー  $E$

$$E = \frac{\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}}{2} \quad (4.39)$$

の収支

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial E}{\partial z} \right) + A \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] - \alpha g K \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \varepsilon \quad (4.40)$$

ここで  $D$  は乱流運動エネルギーに対する鉛直渦拡散係数、 $\varepsilon$  は消散項。右辺第二項は鉛直シアによる乱流運動エネルギー生成、第三項は鉛直拡散による乱流運動エネルギー減少（位置エネルギーへの変換）を表し、鉛直渦粘性・拡散を用いた平均場の方程式から運動エネルギーおよび位置エネルギーの時間発展方程式を導くことで得られる。消散項と渦粘性係数は通常、乱流速度  $q = \sqrt{2E}$  と乱流長さスケール  $l$  を用いて

$$\varepsilon \propto \frac{q^3}{l}, \quad A \propto ql \quad (4.41)$$

とスケーリングされ、 $K$ ,  $D$  はそれぞれ Prandtl 数、Schmidt 数を用いて  $A$  と関係づけられる。

## 4.2 海底境界層

### 4.2.1 海底に沿う流れの表現

深度を鉛直座標をとした有限差分モデルでは、特に急峻な海底地形上において、高密度水が海底斜面に沿って下る過程を表現しにくい。これを表現するために、各水平格子点に海底境界層格子を置き、海底境界層格子間で直接輸送現象を表現する。隣あう海底境界層格子は一般に同じ深度には存在しないため、海底境界層における輸送速度を求める運動方程式はその状況に対応したものでなければならない。そこで問題になるのは、圧力傾度の表現である。以下、その表現を導く。

規格化深度  $\sigma$  (海底:  $\sigma = 0$ , 海面:  $\sigma = 1$ )

$$\sigma = \frac{z + H}{\eta + H} \quad (4.42)$$

座標変換を考える際の区別のため、鉛直座標を深度とした場合の座標 (独立変数) を一時的に  $(x^*, y^*, z^*, t^*)$  と表し、変換後の座標を  $(x, y, \sigma, t)$  と表す。座標変換:

$$x = x^*, \quad y = y^*, \quad \sigma = \frac{z^* + H}{\eta + H}, \quad t = t^* \quad (4.43)$$

物理量  $\Psi$  がこれら独立変数の函数として

$$\Psi = \psi^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = \psi(x, y, \sigma, t) \quad (4.44)$$

と表されるとき、独立変数に関する微分の変換:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^*} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x^*} + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^*} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x^*} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\eta + H} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \left[ (1 - \sigma) \frac{\partial H}{\partial x} - \sigma \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{\eta + H} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \left[ (1 - \sigma) \frac{\partial H}{\partial y} - \sigma \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} = \frac{1}{\eta + H} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} = \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\sigma}{\eta + H} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (4.48)$$

$\Psi$  の Lagrange 微分:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi^*}{dt^*} &\equiv \frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} + \frac{u}{h_x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} + \frac{v}{h_y} \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} + w \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{u}{h_x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{v}{h_y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{w}{\eta + H} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + \frac{1 - \sigma}{\eta + H} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \left( \frac{u}{h_x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{v}{h_y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ &\quad - \frac{\sigma}{\eta + H} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{u}{h_x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{v}{h_y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

$\sigma$  座標系の鉛直速度:

$$\omega \equiv \frac{d\sigma}{dt^*} = \frac{w}{\eta + H} + \frac{1 - \sigma}{\eta + H} \left( \frac{u}{h_x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{v}{h_y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\sigma}{\eta + H} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{u}{h_x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{v}{h_y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (4.50)$$

を定義すると (4.49) は

$$\frac{d\psi^*}{dt^*} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{u}{h_x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{v}{h_y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \equiv \frac{d\psi}{dt} \quad (4.51)$$

これらを用いると (3.1)–(3.4) は

$$\frac{du}{dt} + h_{xy}uv - h_{yx}vv - fv = -\frac{1}{\rho_0 h_x} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} + (\sigma - 1) \rho g \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \mathcal{V}_u \quad (4.52)$$

$$\frac{dv}{dt} + h_{yx}uv - h_{xy}uu + fu = -\frac{1}{\rho_0 h_y} \left[ \frac{\partial p}{\partial y} + \sigma \rho g \frac{\partial \eta}{\partial y} + (\sigma - 1) \rho g \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \mathcal{V}_v \quad (4.53)$$

$$0 = -\frac{1}{\eta + H} \frac{\partial p}{\partial \sigma} - \rho g \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{h_x h_y} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [h_y u (\eta + H)] + \frac{\partial}{\partial y} [h_x v (\eta + H)] \right\} + (\eta + H) \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = -W \quad (4.55)$$

特に、海底における水平圧力傾度項は

$$-\frac{1}{\rho_0 h_x} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial H}{\partial x} \right], \quad -\frac{1}{\rho_0 h_y} \left[ \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \frac{\partial H}{\partial y} \right] \quad (4.56)$$

実用上はさらに、境界層前線における渦の効果等を表現するために (より端的には、流れが等深度に沿ってしまわないように非地衡流成分をつくるために)、運動方程式に drag 項を加えるなどする (e.g., Nakano and Suginozara, 2002)。

#### 4.2.2 エントレインメント

高密度水が海底斜面を下る過程では、境界前線における力学的不安定 (傾圧不安定、Kelvin-Helmholtz 不安定、など) により、周囲の低密度水との混合が起こる。このエントレインメント過程では、高密度水は密度を減らしながら体積を増すとともに、その下降は減速される。

Ellison and Turner (1959) の室内実験によると、高密度水の水平流速  $U$  に対し、エントレインメント率  $E$  は

$$E = \begin{cases} \frac{U(0.08 - 0.1R_i)}{1 + 5R_i} & \text{for } R_i \leq 0.8 \\ 0 & \text{for } R_i > 0.8 \end{cases} \quad (4.57)$$

$$R_i = \frac{-g/\rho_0 \, d\rho/dz}{|dU/dz|^2} = \frac{g\delta'\rho D}{\rho_0 U^2} = \frac{g'D}{U^2} \quad (4.58)$$

エントレインメント率は、高密度水の温度  $T$ 、層厚  $D$ 、高密度水と周囲水の温度差  $\Delta T$  に対して、エントレインメントによる  $T$  の時間変化が

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{E\Delta T}{D} \quad (4.59)$$

で与えられるものとして定義される。

### 4.3 水平粘性

#### 4.3.1 Smagorinsky 粘性

非圧縮等方粘性流体の構成方程式:

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (4.60)$$

ただし

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \quad (4.61)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.62)$$

であり、ここで  $\sigma_{ij}$  は応力テンソル、 $\tau_{ij}$  は応力偏差テンソル、 $\varepsilon_{ij}$  は変形速度テンソル、 $\delta_{ij}$  は Kronecker delta、 $p$  ( $= -\text{tr } \sigma/n$ ;  $n$  は次元数) は圧力、 $\mu$  は粘性係数。

空間スケール  $\Delta$  によって、物理場  $\psi$  を解像スケール (RES)  $\bar{\psi}$  とサブグリッドスケール (SGS)  $\psi'$  に分離。RES は例えば、ある点を中心として各座標方向に  $\Delta$  の幅の領域における平均。  $\Delta$  を有限差分法の格子幅とみなすならば、モデルにおいて表現される速度は RES である  $\bar{u}_i$  のみ。変形速度テンソルもまた RES である

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.63)$$

のみを知ることができる。乱流渦粘性は、真 (RES + SGS) の粘性応力が RES の変形速度によって決まるとするものであり、渦粘性係数を  $A$  として

$$\tau_{ij} = 2A\bar{\varepsilon}_{ij} \quad (4.64)$$

この  $A$  を large-eddy simulation の考え方に基づいて決める (cf., Sagaut, 2002)。

RES から SGS へのエネルギー変換 (運動エネルギーのスケール間輸送) 率は  $\sigma_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}$  で表され、これは非圧縮流体では  $\tau_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}$  に一致。各点においてエネルギースペクトルが平衡状態にあるという局所平衡仮定を置くと、SGS のエネルギー消散率  $e$

$$e = \nu \left( \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (4.65)$$

は RES から SGS へのエネルギー変換率に等しい ( $\nu$  は分子粘性)

$$e = \tau_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} \quad (4.66)$$

乱流長さスケール  $\lambda$ , 乱流速度スケール  $\bar{q}_{sgs}$  ( $\bar{q}_{sgs}^2 = \overline{u'_i u'_i}/2$ ) に対して、次元解析から  $e$  を

$$e \propto \frac{\bar{q}_{sgs}^3}{\lambda} \quad (4.67)$$

と関係づけ、(4.64), (4.66) を用いると

$$2A\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} \propto \frac{\bar{q}_{sgs}^3}{\lambda} \quad (4.68)$$

次元解析から  $A \propto \lambda \bar{q}_{sgs}$  であることを用いると

$$\bar{q}_{sgs} \propto \lambda |\bar{\varepsilon}| \quad (|\bar{\varepsilon}| = \sqrt{2\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}}) \quad (4.69)$$

また  $\lambda \propto \Delta$  とすると、比例係数  $C_s$  を用いて

$$A = (C_s \Delta)^2 |\bar{\varepsilon}| \quad (4.70)$$

これは Smagorinsky (1963) によって最初に導入された。

通常この係数は水平粘性係数としてのみ適用され、その場合には流速の水平発散成分 ( $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ ) が非回転収束発散成分 ( $\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}$ ) やシア成分 ( $\varepsilon_{xy}$ ) より一般的に小さいことより

$$\begin{aligned} |\bar{\varepsilon}|^2 &= 2(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{xy}^2) = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 \\ &\sim (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 \end{aligned} \quad (4.71)$$

と扱うことがある。

### 4.3.2 非等方粘性

構成方程式の一般形

$$\tau_{jk} = c_{jklm} \varepsilon_{lm} \quad (4.72)$$

$\tau_{jk}$ ,  $\varepsilon_{lm}$  の対称性より

$$c_{jklm} = c_{kjlm} = c_{jklm} \quad (4.73)$$

$c_{jklm}$  の独立成分は 36 個であり、構成方程式は行列形式を用いて表現可能:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{1111} & c^{1122} & c^{1133} & c^{1112} & c^{1113} & c^{1123} \\ c^{2211} & c^{2222} & c^{2233} & c^{2212} & c^{2213} & c^{2223} \\ c^{3311} & c^{3322} & c^{3333} & c^{3312} & c^{3313} & c^{3323} \\ c^{1211} & c^{1222} & c^{1233} & c^{1212} & c^{1213} & c^{1223} \\ c^{1311} & c^{1322} & c^{1333} & c^{1312} & c^{1313} & c^{1323} \\ c^{2311} & c^{2322} & c^{2333} & c^{2312} & c^{2313} & c^{2323} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

また、エネルギー消散率  $e = \tau_{jk} \varepsilon_{jk} = c_{jklm} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{lm}$  がスカラー量として定義されるためには、対称性  $c_{jklm} = c_{lmjk}$  が必要。(4.74) の係数行列は対称となり、独立成分の個数は 21.

座標  $x_3$  を軸とする任意の角度の回転に対して等方的である場合、係数行列は 5 個の独立成分を用いて

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c_1 - c_2)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 \end{pmatrix}. \quad (4.75)$$

と表される (cf., Love, 1927)。さらに非圧縮流体の場合、応力偏差テンソルの trace が 0 であることより

$$\begin{aligned} 0 &= \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} \\ &= (c_1 + c_2 + c_3)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (2c_3 + c_4)\varepsilon_{33} \\ &= -(c_1 + c_2 + c_3)\varepsilon_{33} + (2c_3 + c_4)\varepsilon_{33}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

したがって

$$c_4 = c_1 + c_2 - c_3. \quad (4.77)$$

この場合の構成方程式の一般形は

$$\tau_{11} = (c_1 - c_3)\varepsilon_{11} + (c_2 - c_3)\varepsilon_{22}, \quad (4.78)$$

$$\tau_{22} = (c_2 - c_3)\varepsilon_{11} + (c_1 - c_3)\varepsilon_{22}, \quad (4.79)$$

$$\tau_{33} = (c_1 + c_2 - 2c_3)\varepsilon_{33}, \quad (4.80)$$

$$\tau_{12} = (c_1 - c_2)\varepsilon_{12}, \quad (4.81)$$

$$\tau_{13} = 2c_5\varepsilon_{13}, \quad (4.82)$$

$$\tau_{23} = 2c_5\varepsilon_{23}. \quad (4.83)$$

低解像度における粘性境界層の解像 調和型水平粘性を用いる場合、Munk layer を解像しないと数値不安定を生じる (Bryan, 1975)。これは、経度方向の格子幅を  $\Delta x$  とするとき、水平粘性係数  $A_H$  が

$$A_H > \beta \left( \frac{\sqrt{3}\Delta x}{\pi} \right)^3 \quad (4.84)$$

でなければならないことを意味する。この値は低解像度のモデリングでは非常に大きくなり得る。

これを回避するために Large et al. (2001) は、 $x_1, x_2$  をそれぞれ経度・緯度方向に選んだ上で、(4.75) の係数を

$$c_1 = A_H + B_H, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = B_H - A_V, \quad c_5 = A_V \quad (4.85)$$

すなわち構成方程式を

$$\tau_{11} - \tau_{22} = 2A_H(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad (4.86)$$

$$\tau_{12} = 2B_H\varepsilon_{12}, \quad (4.87)$$

$$\tau_{13} = 2A_V\varepsilon_{13}, \quad (4.88)$$

$$\tau_{23} = 2A_V\varepsilon_{23} \quad (4.89)$$

と表し、Munk layer 解像に関わる  $B_H$  だけを必要な場所を選んで大きくし、 $A_H$  は比較的小さな値に抑えることを提唱。

水平流の向きに依存した異方性 強い流れにおける乱流混合係数は、流れに沿う方向が大きいという異方性を持つことが指摘されている。これに基づき、Smith and McWilliams (2003) は、上記において  $x_1, x_2$  をそれぞれ流れに沿う向きと直交する向きに選び  $A_H > B_H$  とすることに相当する方法を提唱。

## 4.4 渦によるトレーサー輸送: 断熱的輸送

### 4.4.1 層厚拡散に基づく擬速度

層厚

$$h = -\frac{\partial z}{\partial \rho} \quad (4.90)$$

のもと、鉛直座標を密度  $\rho$  とした座標系  $(x_\rho, y_\rho, \rho, t_\rho)$  における連続の式とトレーサー量  $\psi$  の輸送方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t_\rho} + \frac{\partial}{\partial x_\rho}(hu) + \frac{\partial}{\partial y_\rho}(hv) = 0 \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_\rho}(h\psi) + \frac{\partial}{\partial x_\rho}(hu\psi) + \frac{\partial}{\partial y_\rho}(hv\psi) = 0 \quad (4.92)$$

平均成分 ( $\bar{\quad}$ ) と変動成分 ( $'\quad$ ) に分離:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t_\rho} + \frac{\partial}{\partial x_\rho}(\bar{h}\bar{u} + \overline{h'u'}) + \frac{\partial}{\partial y_\rho}(\bar{h}\bar{v} + \overline{h'v'}) = 0 \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_\rho}(\bar{h}\bar{\psi} + \overline{h'\psi'}) + \frac{\partial}{\partial x_\rho}[\bar{h}\bar{u}\bar{\psi} + \overline{h'u'\psi'} + \overline{(hu)'\psi'}] + \frac{\partial}{\partial y_\rho}[\bar{h}\bar{v}\bar{\psi} + \overline{h'v'\psi'} + \overline{(hv)'\psi'}] = 0 \quad (4.94)$$

(4.94)–(4.93)× $\bar{\psi}$  より、トレーサーの平均成分の方程式

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t_\rho} + \frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial}{\partial t_\rho}(\overline{h'\psi'}) + \left( \bar{u} + \frac{\overline{h'u'}}{\bar{h}} \right) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\rho} + \left( \bar{v} + \frac{\overline{h'v'}}{\bar{h}} \right) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y_\rho} = -\frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial}{\partial x_\rho} [\overline{(hu)'\psi'}] - \frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial}{\partial y_\rho} [\overline{(hv)'\psi'}] \quad (4.95)$$

層厚とトレーサーの変動に相関がないものとして、(4.95) の左辺第 2 項は無視。(4.95) の右辺を等密度方向の渦拡散 (拡散係数  $\mu$ ) で表現:

$$\frac{1}{h} \left[ \frac{\partial}{\partial x_\rho} \left( \mu \bar{h} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y_\rho} \left( \mu \bar{h} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y_\rho} \right) \right] \quad (4.96)$$

一方、

$$u^* = \frac{\overline{h'u'}}{h}, \quad v^* = \frac{\overline{h'v'}}{h} \quad (4.97)$$

とし、平均成分を表す  $\bar{\quad}$  を省略すると、(4.93), (4.95) は

$$\frac{\partial h}{\partial t_\rho} + \frac{\partial}{\partial x_\rho} [(u + u^*)h] + \frac{\partial}{\partial y_\rho} [(v + v^*)h] = 0 \quad (4.98)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_\rho} + (u + u^*) \frac{\partial \psi}{\partial x_\rho} + (v + v^*) \frac{\partial \psi}{\partial y_\rho} = \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial}{\partial x_\rho} \left( \mu h \frac{\partial \psi}{\partial x_\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y_\rho} \left( \mu h \frac{\partial \psi}{\partial y_\rho} \right) \right] \quad (4.99)$$

すなわち、渦運動によるトレーサー輸送は  $u^*, v^*$  (擬速度, bolus velocity) による移流で表現される。

Gent and McWilliams (1990):

$$u^* h = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \kappa \frac{\partial z}{\partial x_\rho} \right), \quad v^* h = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \kappa \frac{\partial z}{\partial y_\rho} \right) \quad (4.100)$$

パラメータ  $\kappa$  が  $\rho$  に依存しない場合、(4.98) は

$$\frac{\partial h}{\partial t_\rho} + \frac{\partial}{\partial x_\rho} (uh) + \frac{\partial}{\partial y_\rho} (vh) = \frac{\partial}{\partial x_\rho} \left( \kappa \frac{\partial h}{\partial x_\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y_\rho} \left( \kappa \frac{\partial h}{\partial y_\rho} \right) \quad (4.101)$$

と表され、 $u^*, v^*$  の効果は層厚に対する等密度方向の拡散として表現される。

深度  $z$  を用いた座標系への変換。変数  $\phi$  の微分の変換:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x_\rho} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \quad (4.102)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y_\rho} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \quad (4.103)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \quad (4.104)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t_\rho} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \quad (4.105)$$

Lagrange 微分の変換:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t_\rho} + u \frac{\partial \phi}{\partial x_\rho} + v \frac{\partial \phi}{\partial y_\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.106)$$

この最後の項の括弧内は層間の混合がない場合には 0。したがって、

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_\rho} + u \frac{\partial \psi}{\partial x_\rho} + v \frac{\partial \psi}{\partial y_\rho} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (4.107)$$

一方、 $u^*, v^*$  については

$$u^* = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \kappa \frac{\partial z}{\partial x_\rho} \right) = - \frac{1}{\partial z / \partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \kappa \frac{\partial z}{\partial x_\rho} \right) \quad (4.108)$$

および

$$\frac{\partial z}{\partial x_\rho} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial \rho} = -\frac{\rho_x}{\rho_z} \quad (4.109)$$

であることなどにより

$$u^* \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\rho_x}{\rho_z} \right), \quad v^* \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\rho_y}{\rho_z} \right) \quad (4.110)$$

したがって

$$\begin{aligned} u^* \frac{\partial \psi}{\partial x_\rho} + v^* \frac{\partial \psi}{\partial y_\rho} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\rho_x}{\rho_z} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\rho_x}{\rho_z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\rho_y}{\rho_z} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\rho_y}{\rho_z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\rho_x}{\rho_z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\rho_y}{\rho_z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} - \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\rho_x}{\rho_z} \right) \frac{\rho_x}{\rho_z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\rho_y}{\rho_z} \right) \frac{\rho_y}{\rho_z} \right] \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\rho_x}{\rho_z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\rho_y}{\rho_z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\rho_x}{\rho_z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\rho_y}{\rho_z} \right) \right] \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.111)$$

と変換され、高度を鉛直座標とした場合の渦輸送速度を

$$u^* = \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\rho_x}{\rho_z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} (\kappa s_x) \quad (4.112)$$

$$v^* = \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\rho_y}{\rho_z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} (\kappa s_y) \quad (4.113)$$

$$w^* = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\rho_x}{\rho_z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\rho_y}{\rho_z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa s_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\kappa s_y) \quad (4.114)$$

( $s_x, s_y$  は等密度面の水平面に対する傾き) と定義することにより、(4.99) から右辺の等密度面拡散を除いた部分は

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (u + u^*) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (v + v^*) \frac{\partial \psi}{\partial y} + (w + w^*) \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (4.115)$$

この渦輸送については

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (4.116)$$

が成り立つ。非圧縮流による移流で表現されることより、この渦輸送は混合を伴わず断熱的。

擬速度による移流はまた、

$$u^* \frac{\partial \psi}{\partial x} + v^* \frac{\partial \psi}{\partial y} + w^* \frac{\partial \psi}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\kappa s_x \\ 0 & 0 & -\kappa s_y \\ \kappa s_x & \kappa s_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.117)$$

と、拡散係数テンソルの反対称成分として表すこともできる (Griffies, 1998)。

#### 4.4.2 鉛直粘性による渦位一様化

流速の地衡流成分 ( $u_g, v_g$ ), 非地衡流成分 ( $u_a, v_a$ ) に対する、鉛直粘性 (粘性係数  $\nu$ ) の存在下での準地衡運動方程式

$$-f_0 v_a = \beta y v_g + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial u_g}{\partial z} \right) \quad (4.118)$$

$$f_0 u_a = -\beta y u_g + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v_g}{\partial z} \right) \quad (4.119)$$

非地衡流成分の発散

$$f_0 \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) = -\beta v_g + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v_g}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial u_g}{\partial z} \right) \right] \quad (4.120)$$

$N$  を浮力振動数、 $A$  を  $z$  によらない係数として粘性係数を

$$\nu = \frac{A f_0^2}{N^2} \quad (4.121)$$

と置き、準地衡流線函数  $\psi$  を用いると

$$f_0 \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) = -\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \nabla_H \cdot \left\{ A \nabla_H \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] \right\} \quad (4.122)$$

一方、 $d_g/dt$  を地衡流による Lagrange 微分とすると、準地衡方程式系では

$$f_0 \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) = \frac{d_g}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] \quad (4.123)$$

したがって、準地衡渦位

$$q = \beta y + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (4.124)$$

に対して

$$\frac{d_g q}{dt} = \nabla_H \cdot (A \nabla_H q) \quad (4.125)$$

が成り立ち、(4.121) のように成層に依存する鉛直粘性は渦位の水平拡散と等価。

鉛直座標を密度とする場合、鉛直粘性 (4.121) は

$$Q = \frac{1}{q} = \frac{\rho_0 h}{f} \quad (4.126)$$

で定義される  $Q$  に対して、 $fQ$  の等密度面上拡散と等価。これは Gent and McWilliams (1990) による層厚拡散と等価。また、等密度面上に閉じた  $Q$  の等値線が存在する場合、定常状態ではその等値線内で  $Q$  が一様であることを意味する。これは Rhines and Young (1982) による閉じた渦位等値線内での渦位一様化を表し、それをもたらす渦運動の効果をパラメタライズするものとなる。(Greatbatch and Lamb, 1990)

#### 4.4.3 層厚拡散係数

Green (1970) と Stone (1972) が大気傾圧渦による輸送係数  $k$  (ある種の渦拡散係数) を

$$k = \alpha \frac{f}{\sqrt{R_i}} l^2 \quad (4.127)$$

とパラメタライズしたのを援用し、Visbeck et al. (1997) は層厚拡散係数  $\kappa$  も同じ形で、成層等の場の変数に依存して表すべきと提唱。ここで  $l$  は傾圧帯の長さスケールであり、渦運動によって流体粒子が移動する距離に相当。 $f/\sqrt{R_i}$  は傾圧不安定の成長率を表すため、傾圧不安定渦の振舞に依拠したパラメタリゼーションと言える。比例係数  $\alpha$  は実験的に決められるべき(普遍)定数。

#### 4.4.4 層厚拡散係数の制限

層厚拡散は見かけ上、等密度面の傾きに比例した拡散係数を持つ拡散の形式をしており、成層が弱い場合には数値不安定を生じ得る。これを避けるため、例えば密度面の傾き  $s = (s_x^2 + s_y^2)^{1/2}$  が閾値  $s_{\max}$  を越える場合

に層厚係数を  $1/s_{\max}$  倍するなどの制限をかける (等密度面拡散についても同様)。一方、等密度面が境界と交わる近傍 (海面・海底付近) では層厚の変動が抑制され、層厚変動と速度変動の相関に起因する渦輸送も抑制されるべきと考えられる。そのため、等密度面の傾きによる制限とは別に、境界に近いある程度の範囲でも層厚拡散係数を小さくするなどの措置が取られることがある (Large et al., 1997)。

境界付近における渦運動は等密度面方向ではなく境界に沿う方向に卓越し、等密度面を横切る方向の拡散、すなわち非断熱的な輸送が生じる。そのような効果は層厚拡散では表現できない。

#### 4.5 渦によるトレーサー輸送: 非断熱的輸送

#### 4.6 渦によるトレーサー輸送: サブメソスケール渦の効果

#### 4.7 深層内部領域の乱流混合

### 参考文献

- Bryan, K., S. Manabe and R. C. Pacanowski (1975): A global ocean-atmosphere climate model. Part II. The oceanic circulation, *J. Phys. Oceanogr.*, *5*, 30–46.
- Ellison, T., and J. Turner (1959): Turbulent entrainment in stratified flows, *J. Fluid Mech.*, *6*, 423–448.
- Gent, P. R., and J. C. McWilliams (1990): Isopycnal mixing in ocean circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, *20*, 150–155.
- Greatbatch, R. J., and K. G. Lamb (1990): On parameterizing vertical mixing of momentum in non-eddy resolving ocean models, *J. Phys. Oceanogr.*, *20*, 1634–1637.
- Green, J. S. (1970): Transfer properties of the large-scale eddies and the general circulation of the atmosphere, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, *96*, 157–185.
- Griffies, S. M. (1998): The Gent-McWilliams skew flux, *J. Phys. Oceanogr.*, *28*, 831–841.
- Kraus, E. B., and J. S. Turner (1967): A one-dimensional model of the seasonal thermocline. II. The general theory and its consequences, *Tellus*, *19*, 98–105.
- Large, W. G., G. Danabasoglu, S. C. Doney and J. C. McWilliams (1997): Sensitivity to surface forcing and boundary layer mixing in a global ocean model: Annual-mean climatology, *J. Phys. Oceanogr.*, *27*, 2418–2447.
- Large, W. G., G. Danabasoglu, J. C. McWilliams, P. R. Gent, and F. O. Bryan (2001): Equatorial circulation of a global ocean climate model with anisotropic horizontal viscosity, *J. Phys. Oceanogr.*, *31*, 518–536.
- Lemke, P (1987): A coupled one-dimensional sea ice-ocean model, *J. Geophys. Res.*, *92*, 13,164–13,172.
- Love, A. E. (1927): *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Mellor, G, and T. Yamada (1974): Hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary-layers, *J. Atmos. Sci.*, *31*, 1791–1806.
- Mellor, G, and T. Yamada (1974): Development of a turbulence closure-model for geophysical fluid problems, *Rev. Geophys.*, *20*, 851–875.

- Nakano, H., N. Sugimotohara (2002): Effects of bottom boundary layer parameterization on reproducing deep and bottom waters in a World Ocean model, *J. Phys. Oceanogr.*, *32*, 1209–1227.
- Rhines, P. B., and W. R. Young (1982): Homogenization of potential vorticity in planetary gyres, *J. Fluid Mech.*, *122*, 347–367.
- Sagaut, P. (2002): *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction 2nd ed.*, Springer-Verlag, Berlin.
- Smagorinsky, J. (1963): General circulation experiments with the primitive equations. I: The basic experiment, *Mon. Wea. Rev.*, *91*, 99–165.
- Smith, R. D., and J. C. McWilliams (2003): Anisotropic horizontal viscosity for ocean models, *Ocean Modelling*, *5*, 129–156.
- Stone, P. (1972): A simplified radiative-dynamical model for the static stability of rotating atmospheres, *J. Atmos. Sci.*, *29*, 405–418.
- Visbeck, M., J. Marshall and T. Haine (1997): Specification of eddy transfer coefficients in coarse-resolution ocean circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, *27*, 381–402.