

3 次元積雲モデルの定式化

高橋 こう子, 杉山 耕一朗, 小高 正嗣, 中島 健介, 林 祥介

2003年11月25日

目次

1	直交直線座標系における基礎方程式系	2
1.1	変数の定義	2
1.2	基本場と偏差の分離	4
1.3	基礎方程式系	5
1.4	サブグリッドスケールの拡散	7
1.5	雲・降水の微物理過程	9
2	地形に沿う座標系における基礎方程式	12
2.1	地形に沿う座標系	12
2.2	基礎方程式系	16
2.3	サブグリッドスケールの拡散	18
2.4	雲・降水の微物理過程	22
A	基礎方程式系の導出	23
A.1	湿潤空気の状態方程式	23
A.2	運動方程式	25
A.3	圧力方程式	28
B	サブグリッド拡散パラメタリゼーション	30
B.1	レイノルズ応力方程式	30
B.2	サブグリッドスケールの方程式	31
C	変数	37
D	参考文献	39

要旨

Klemp and Wilhelmso (1978) と CReSS を基にして, 3 次元, 圧縮性の地形を考慮した非静力の積雲モデルの定式化を行う. まず, 直交直線座標系における基礎方程式を導出する. サブグリッドスケールの拡散は 1.5 次の乱流クロージャモデルを用いる. 微物理過程は, 氷相過程は考えず, 水蒸気と雲水間の変換, 雲水から雨水への変換, 雨水から水蒸気への変換と降水過程を考える. 次に, 同様の設定で地形に沿う座標系における基礎方程式系を導出する.

1 直交直線座標系における基礎方程式系

この節では, 3 次元, 準圧縮系での直交直線座標系における基礎方程式系を導出する. これらの方程式系は Klemp and Wilhelmson (1978) と同様である.

1.1 変数の定義

モデルの独立変数は空間の変数 x, y, z と時間の変数 t である. ここで用いる従属変数はこれらの関数として定義され,

u	:	速度の x 成分
v	:	速度の y 成分
w	:	速度の z 成分
θ	:	温位
π	:	初期状態からの圧力偏差
q_v	:	水蒸気の混合比
q_c	:	雲水の混合比
q_r	:	雨水の混合比

である.

圧力 p は無次元量であるエクスナー (Exner) 関数

$$\Pi \equiv \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R_d/c_p} \quad (1)$$

を用い, 温位は

$$\begin{aligned} \theta &\equiv T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R_d/c_p} \\ &= \frac{T}{\Pi} \end{aligned} \quad (2)$$

を用いる. ただし T は温度, p_0 は地表面での圧力, c_p は定圧比熱, R_d は乾燥空気の気体定数である.

湿潤空気の状態方程式は

$$p = \rho R_d T (1 + 0.61 q_v) \quad (3)$$

または

$$\Pi = \left(\frac{R_d}{p_0} \rho \theta_v \right)^{R_d/c_v} \quad (4)$$

である. ただし ρ は湿潤空気の密度, θ_v は仮温位で以下のように表される:

$$\theta_v = \theta (1 + 0.61q_v). \quad (5)$$

1.2 基本場と偏差の分離

変数を基本場とそこからの偏差に分ける。基本場の状態の変数は上付きバー (̄) で表し、偏差の変数を上付きプライム (′) で表す。ある変数 ϕ は以下のように分離される:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (6)$$

ϕ は速度 u, v, w , 温位 θ , 圧力 p または Π , 密度 ρ である¹。

ここでは基本場として初期状態を考える。初期状態は、水平一様 ($\bar{\phi} = \bar{\phi}(z)$), 静止 ($\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$) 擾乱のない状態であるとする²。

基本場における無次元量の圧力, 温位, 仮温位は, それぞれ,

$$\bar{\Pi} = \left(\frac{\bar{p}}{p_0} \right)^{R_d/c_p}, \quad (7)$$

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{T}}{\bar{\Pi}}, \quad (8)$$

$$\bar{\theta}_v = \bar{\theta} (1 + 0.61 \bar{q}_v) \quad (9)$$

である。

基本場での運動方程式の鉛直成分から、静水圧平衡の式が得られる:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} = -\frac{g}{c_p \bar{\theta}_v}. \quad (10)$$

以下では、記述の簡便のため、 $\Pi' = \pi$ とし、その他の変数の上付きプライム (′) は省略する。

¹水蒸気の混合比 q_v , 雲水の混合比 q_c , 雨水の混合比 q_r は分離しない。

²初期状態では雲水と降水がないとする。

1.3 基礎方程式系

密度は湿潤空気の状態方程式より以下のように与えられる:

$$\rho = \frac{p_0}{R_d} \frac{\Pi^{c_v/R_d}}{\theta_v}. \quad (11)$$

密度以外の変数は以下のような時間発展方程式系で表される.

運動方程式:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} + c_p \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \\ = \delta_{i3} g \left[\frac{\theta}{\bar{\theta}} - 1 + 0.61 (q_v - \bar{q}_v) - q_c - q_r \right] - \varepsilon_{i3k} f u_k + D_{u_i}. \end{aligned} \quad (12)$$

f はコリオリパラメータ, D_{u_i} はサブグリッドスケールの乱流に伴う拡散項であり 1.4 節で述べる.

圧力方程式:

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v u_j) = f_\pi, \quad (13)$$

$$f_\pi = -u_j \frac{\partial \pi}{\partial x_j} + \frac{R_d \pi}{c_v} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{c^2}{c_p \theta_v^2} \frac{d\theta_v}{dt} + D_\pi. \quad (14)$$

D_π はサブグリッドスケールの乱流に伴う拡散項, c, \bar{c} はそれぞれ以下のように与えられる音波と基本場での音波である:

$$c^2 = \frac{c_p R_d}{c_v} \Pi \theta_v, \quad (15)$$

$$\bar{c}^2 = \frac{c_p R_d}{c_v} \bar{\Pi} \bar{\theta}_v. \quad (16)$$

Klemp and Wilhelmson (1978) に従い $f_\pi = 0$ とする. これは線形化を行い, 非断熱項 ((14) の右辺第 3 項) を無視することを意味する.

圧力方程式は, エクスナー関数と連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (17)$$

から得られる.

熱力学方程式 :

$$\frac{d\theta}{dt} = D_\theta + M_\theta. \quad (18)$$

水蒸気の混合比の方程式 :

$$\frac{dq_v}{dt} = D_{q_v} + M_{q_v}. \quad (19)$$

雲水の混合比の方程式 :

$$\frac{dq_c}{dt} = D_{q_c} + M_{q_c}. \quad (20)$$

雨水の混合比の方程式 :

$$\frac{dq_r}{dt} = D_{q_r} + M_{q_r}. \quad (21)$$

それぞれの方程式中の $D_\theta, D_{q_v}, D_{q_c}, D_{q_r}$ はサブグリッドスケールの乱流に伴う拡散項である. $M_\theta, M_{q_v}, M_{q_c}, M_{q_r}$ は微物理過程に伴う生成・消滅項である. 拡散項については 1.4 節で, 生成・消滅項については 1.5 節で述べる.

1.4 サブグリッドスケールの拡散

サブグリッドスケールでのダブルプライム付き ($''$) の変数は、レイノルズ平均からの偏差とする。

運動方程式中の拡散項：

$$D_{u_i} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i'' u_j''} \right). \quad (22)$$

ただし

$$\overline{u_i'' u_j''} = -K_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} E, \quad (23)$$

K_m は運動量の渦混合係数, E は以下のように与えられるサブグリッドスケールの運動エネルギーである：

$$E = \frac{1}{2} \overline{(u'' + v'' + w'')^2}. \quad (24)$$

熱力学方程式中の拡散項：

$$D_\theta = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u'' \theta''} \right) \quad (25)$$

$$\sim \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_h \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right). \quad (26)$$

K_h は渦混合係数である。

水蒸気の混合比の方程式中の拡散項：

$$D_{q_v} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u'' q_v''} \right) \quad (27)$$

$$\sim \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_h \frac{\partial q_v}{\partial x_j} \right). \quad (28)$$

雲水の混合比の方程式中の拡散項：

$$D_{q_c} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u'' q_c''} \right) \quad (29)$$

$$\sim \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_h \frac{\partial q_c}{\partial x_j} \right). \quad (30)$$

雨水の混合比の方程式中の拡散項：

$$D_{q_r} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u''q_r''}) \quad (31)$$

$$\sim \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_h \frac{\partial q_r}{\partial x_j} \right). \quad (32)$$

E は以下の予測方程式から得られる：

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = g \left\{ -AK_h \frac{\partial \theta_e}{\partial z} + K_h (1 - \gamma A) \frac{\partial q_v}{\partial z} + K_h \frac{\partial q_c}{\partial z} \right\} \\ + 2K_m \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{2} |\varepsilon_{ijk}| K_m \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \\ - \frac{3}{2} \delta_{ij} E \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) - \left(\frac{C_\varepsilon}{l} \right) E^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$A = \frac{1}{\bar{\theta}} \left\{ \frac{1 + \frac{1.61 \varepsilon L q_v}{R_d T}}{1 + \frac{\varepsilon L^2 q_v}{c_p R_d T^2}} \right\}. \quad (34)$$

ただし、 θ_e は相当温位で $\theta_e = \theta (1 + Lq_v/(c_p T))$ $l = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ は混合距離、 $K_h = 3K_m, C_\varepsilon = C_m = 0.2, \gamma = L/(c_p \bar{\Pi})$ である。

K_m は

$$K_m = C_m E^{\frac{1}{2}} l. \quad (35)$$

から得られる。

1.5 雲・降水の微物理過程

水蒸気を含む空気塊が上昇すると、水蒸気から雲水になり雲が形成され、さらに降水粒子へと成長すると降水が起こる。ここで考える降水過程は氷相過程を含まない「暖かい雨」である。このような過程の雲は全領域が 0°C 以上にあり、暖かい雲といわれる。

熱力学方程式中の生成・消滅項：

$$M_{\theta} = -\gamma \left(\frac{dq_{vs}}{dt} + E_r \right). \quad (36)$$

q_{vs} は飽和混合比, E_r は蒸発による雨水から水蒸気への変換分である。

水蒸気の混合比の方程式中の生成・消滅項：

$$M_{q_v} = \frac{dq_{vs}}{dt} + E_r. \quad (37)$$

雲水の混合比の方程式中の生成・消滅項：

$$M_{q_c} = -\frac{dq_{vs}}{dt} - A_r - C_r. \quad (38)$$

A_r は併合過程による雲水から雨水への変換分, C_r は衝突併合による雲水から雨水への変換分である。

雨水の混合比の方程式中の生成・消滅項：

$$M_{q_r} = F_r - E_r + A_r + C_r. \quad (39)$$

F_r は雨水の鉛直フラックスつまり降水として落ちた分である。

ここで考えている微物理過程は以下のとおりである (図 1)。ただし水蒸気が直接雨水になる凝結する過程は無視する。

- 凝結による水蒸気から雲水への変換と蒸発による雲水から水蒸気への変換 (Soong and Ogura, 1973):

q_{vs} は, Tetens の公式を用いて,

$$q_{vs} = \frac{3.8}{\bar{p}} \exp \left(17.27 \frac{\bar{\Pi}\theta - 273}{\bar{\Pi}\theta - 36} \right) \quad (40)$$

と表される。

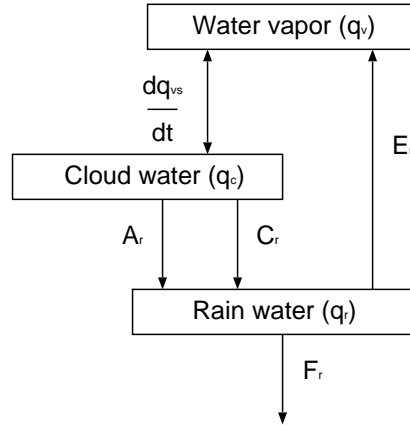


図 1: 考慮する微物理過程.

- 蒸発による雨水から水蒸気への変換 (Ogura and Takahashi,1971):

$$E_r = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\left(1 - \frac{q_v}{q_{vs}}\right) C (\bar{\rho} q_r)^{0.525}}{5.4 \times 10^5 + \frac{2.55 \times 10^6}{\bar{\rho} q_{vs}}} \quad (41)$$

ただし C は換気ファクタ (ventilation factor) といひ,

$$C = 1.6 + 124.9 (\bar{\rho} q_r)^{0.2046} \quad (42)$$

である.

- 併合成長による雲水から雨水への変換 (Kessler, 1969):

$$A_r = k_1 (q_c - a). \quad (43)$$

ただし $k_1 = 0.001 \text{ s}^{-1}$, $a = 0.001 \text{ kg kg}^{-1}$ である.

- 衝突併合による雲水から雨水への変換 (Kessler, 1969):

$$C_r = k_2 q_c q_r^{0.875}. \quad (44)$$

ただし $k_2 = 2.2 \text{ s}^{-1}$ である.

(39) の右辺第 1 項 F_r は雨水の鉛直フラックスである:

$$F_r = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} V q_r). \quad (45)$$

V は雨水の終端速度で

$$V = 36.34 (\bar{\rho} q_r)^{0.1346} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (46)$$

のように与えられる (Soong and Ogura, 1973 に密度の変化を加えた).

ρ_0 は基本場の地表面での密度である. 各単位は, p が mb, 密度 ρ が kg m^{-3} , 混合比 q_v, q_c, q_r が kg kg^{-1} , V が m s^{-1} とする.

2 地形に沿う座標系における基礎方程式

前節で導出した直交直線座標系での方程式系を地形に沿う座標系へ変換する。

2.1 地形に沿う座標系

直交直線座標 (x, y, z) の関数として曲線座標

$$x^* = x^*(x, y, z), \quad (47)$$

$$y^* = y^*(x, y, z), \quad (48)$$

$$z^* = z^*(x, y, z) \quad (49)$$

を設定する。また,

$$\begin{aligned} G &\equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^*, y^*, z^*)} \\ &\equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^*} & \frac{\partial x}{\partial y^*} & \frac{\partial x}{\partial z^*} \\ \frac{\partial y}{\partial x^*} & \frac{\partial y}{\partial y^*} & \frac{\partial y}{\partial z^*} \\ \frac{\partial z}{\partial x^*} & \frac{\partial z}{\partial y^*} & \frac{\partial z}{\partial z^*} \end{vmatrix}, \\ G &\neq 0 \end{aligned} \quad (50)$$

が成り立っているとする。

直交座標系でのベクトル $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^*} \\ \frac{\partial x}{\partial y^*} \\ \frac{\partial x}{\partial z^*} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x^*} \\ \frac{\partial y}{\partial y^*} \\ \frac{\partial y}{\partial z^*} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x^*} \\ \frac{\partial z}{\partial y^*} \\ \frac{\partial z}{\partial z^*} \end{pmatrix} \quad (51)$$

を定義する。ベクトル $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ は曲線座標 (x^*, y^*, z^*) の基底ベクトルである。

曲線座標系での速度を (U, V, W) とすると,

$$u = U \frac{\partial x}{\partial x^*} + V \frac{\partial x}{\partial y^*} + W \frac{\partial x}{\partial z^*}, \quad (52)$$

$$v = U \frac{\partial y}{\partial x^*} + V \frac{\partial y}{\partial y^*} + W \frac{\partial y}{\partial z^*}, \quad (53)$$

$$w = U \frac{\partial z}{\partial x^*} + V \frac{\partial z}{\partial y^*} + W \frac{\partial z}{\partial z^*} \quad (54)$$

と書ける. (52)-(54) を U, V, W について解くと,

$$G^{1/2}U = uJ_{y^*z^*}^{yz} + vJ_{y^*z^*}^{zx} + wJ_{y^*z^*}^{xy}, \quad (55)$$

$$G^{1/2}V = uJ_{z^*x^*}^{yz} + vJ_{z^*x^*}^{zx} + wJ_{z^*x^*}^{xy}, \quad (56)$$

$$G^{1/2}W = uJ_{x^*y^*}^{yz} + vJ_{x^*y^*}^{zx} + wJ_{x^*y^*}^{xy}. \quad (57)$$

J はヤコビアンで, 例えば

$$\begin{aligned} J_{y^*z^*}^{yz} &\equiv \frac{\partial(y, z)}{\partial(y^*, z^*)} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial y^*} & \frac{\partial y}{\partial z^*} \\ \frac{\partial z}{\partial y^*} & \frac{\partial z}{\partial z^*} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

である.

ここで, 以下のような地形に沿う座標系 (x^*, y^*, z^*) を導入する:

$$x^* = x, \quad (59)$$

$$y^* = y, \quad (60)$$

$$z^* = z^*(x, y, z). \quad (61)$$

地表面の高さを $z_s(x^*, y^*)$, モデル領域の高さを H としたとき, 地表面上で 0, 領域の高さで H となるように z^* を定義する (図 2):

$$z^* = \frac{H(z - z_s)}{H - z_s}. \quad (62)$$

このとき, ヤコビアン J は, それぞれ,

$$\left. \begin{aligned} J_{y^*z^*}^{yz} &= \frac{\partial z}{\partial z^*}, & J_{y^*z^*}^{zx} &= 0, & J_{y^*z^*}^{xy} &= 0, \\ J_{z^*x^*}^{yz} &= 0, & J_{z^*x^*}^{zx} &= \frac{\partial z}{\partial z^*}, & J_{z^*x^*}^{xy} &= 0, \\ J_{x^*y^*}^{yz} &= -\frac{\partial z}{\partial x}, & J_{x^*y^*}^{zx} &= -\frac{\partial z}{\partial y}, & J_{x^*y^*}^{xy} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

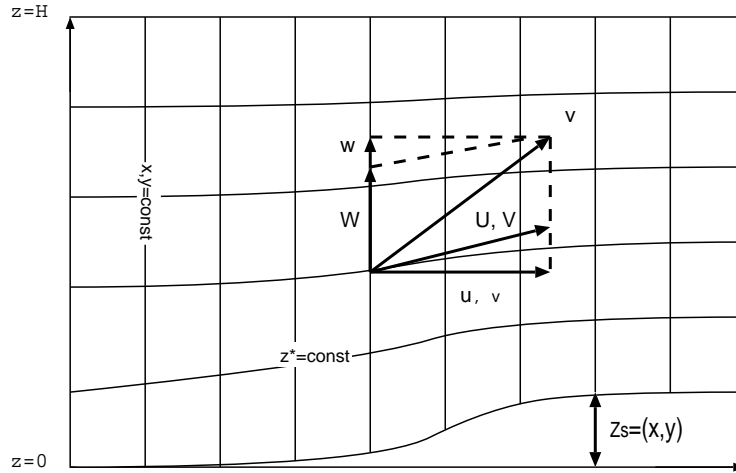


図 2: 直線直交座標系における (u, v, w) と地形に沿った座標系における (U, V, W) .

3 次元の場合のヤコビアン G は

$$G \equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^*, y^*, z^*)}, \quad (64)$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial z^*} \right)^2 \quad (65)$$

となる. したがって,

$$G^{1/2} = \frac{H - z_s}{H}, \quad (66)$$

$$\begin{aligned} G^{13} &\equiv \frac{J_{x^*y^*}^{yz}}{G^{1/2}} \\ &= \frac{z^* - H}{H - z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x}, \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} G^{23} &\equiv \frac{J_{x^*y^*}^{zx}}{G^{1/2}} \\ &= \frac{z^* - H}{H - z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (68)$$

とする.

地形に沿った座標系での速度は

$$U = u, \quad (69)$$

$$V = v, \quad (70)$$

$$W = G^{13}u + G^{23}v + \frac{1}{G^{1/2}}w \quad (71)$$

となる. 以下では $W = \omega$ とおく.

直交直線座標系から地形に沿う座標系へ変換したとき, ある変数 ϕ の空間微分は

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial \phi}{\partial z^*}, \quad (72)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial \phi}{\partial z^*}, \quad (73)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \quad (74)$$

となる.

2.2 基礎方程式系

地形に沿う座標系場合も直交直線座標系の場合と同様に、基本場とそこからの偏差に分ける。基本場は地形を考慮した静水圧平衡の式

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z^*} = -\frac{G^{1/2}g}{c_p \bar{\theta}_v} \quad (75)$$

を満たす状態とする。

密度は湿潤空気の状態方程式から与えられる：

$$\rho = \frac{p_0}{R_d} \frac{\Pi^{c_v/c_p}}{\theta_v}. \quad (76)$$

密度以外の変数は以下のような地形に沿う座標系における時間発展方程式系で表現される：

運動方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z^*} + c_p \bar{\theta}_v \left(\frac{\partial \pi}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial \pi}{\partial z^*} \right) \\ = f v + D_u, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial z^*} + c_p \bar{\theta}_v \left(\frac{\partial \pi}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial \pi}{\partial z^*} \right) \\ = -f u + D_v, \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \omega \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{c_p \bar{\theta}_v}{G^{1/2}} \frac{\partial \pi}{\partial z^*} \\ = g \left[\frac{\theta}{\bar{\theta}} - 1 + 0.61 (q_v - \bar{q}_v) - q_c - q_r \right] + D_w \end{aligned} \quad (79)$$

D_u, D_v, D_w は 2.3 節で述べる。

圧力方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \left\{ \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v u)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v v)}{\partial y} + G^{13} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v u)}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v v)}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w)}{\partial z^*} \right\} \\ = f_\pi, \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} f_\pi = & -u \frac{\partial \pi}{\partial x} - v \frac{\partial \pi}{\partial y} - \omega \frac{\partial \pi}{\partial z^*} \\ & + \frac{R_d \pi}{c_v} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \left(G^{13} + G^{23} + \frac{1}{G^{1/2}} \right) \frac{\partial w}{\partial z^*} \right\} \\ & + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}_v^2} \left\{ \frac{\partial \theta_v}{\partial t} + \frac{\partial \theta_v}{\partial x} + \frac{\partial \theta_v}{\partial y} + \left(G^{13} + G^{23} + \frac{1}{G^{1/2}} \right) \frac{\partial \theta_v}{\partial z^*} \right\} + D_\pi. \end{aligned} \quad (81)$$

Klemp and Wilhelmson (1978) では $f_\pi = 0$ としている.

熱力学方程式 :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial z^*} = M_\theta + D_\theta \quad (82)$$

水蒸気の混合比の方程式 :

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + u \frac{\partial q_v}{\partial x} + v \frac{\partial q_v}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_v}{\partial z^*} = M_{q_v} + D_{q_v} \quad (83)$$

雲水の混合比の方程式 :

$$\frac{\partial q_c}{\partial t} + u \frac{\partial q_c}{\partial x} + v \frac{\partial q_c}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_c}{\partial z^*} = M_{q_c} + D_{q_c} \quad (84)$$

雨水の混合比の方程式 :

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} + u \frac{\partial q_r}{\partial x} + v \frac{\partial q_r}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_r}{\partial z^*} = M_{q_r} + D_{q_r} \quad (85)$$

それぞれの方程式中の乱流項 $D_\theta, D_{q_v}, D_{q_c}, D_{q_r}$ は2.3節で, 微物理項 $M_\theta, M_{q_v}, M_{q_c}, M_{q_r}$ は2.4節で述べる.

2.3 サブグリッドスケールの拡散

運動方程式中の拡散項：

$$\begin{aligned}
 D_u = & 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left(\frac{\partial u}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & + \left(\frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ K_m \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{\partial E}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right), \tag{86}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_v = & \left(\frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left(\frac{\partial v}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ K_m \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{\partial E}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right), \tag{87}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_w = & \left(\frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & + \left(\frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left\{ K_m \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & + 2 \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \\
 & - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{\partial E}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right). \tag{88}
 \end{aligned}$$

熱力学方程式中の拡散項：

$$\begin{aligned}
 D_\theta = & \left(\frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(K_h \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_h G^{13} \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right) \\
 & + \left(\frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(K_h \frac{\partial \theta}{\partial y} + K_h G^{23} \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right) \\
 & + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{K_h}{G^{1/2}} \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right), \tag{89}
 \end{aligned}$$

$$K_h = 3K_m. \tag{90}$$

水蒸気の混合比の方程式中の拡散項：

$$\begin{aligned}
 D_{q_v} = & \left(\frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(K_h \frac{\partial q_v}{\partial x} + K_h G^{13} \frac{\partial q_v}{\partial z^*} \right) \\
 & + \left(\frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(K_h \frac{\partial q_v}{\partial y} + K_h G^{23} \frac{\partial q_v}{\partial z^*} \right) \\
 & + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{K_h}{G^{1/2}} \frac{\partial q_v}{\partial z^*} \right). \tag{91}
 \end{aligned}$$

雲水の混合比の方程式中の拡散項：

$$\begin{aligned}
 D_{q_c} = & \left(\frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(K_h \frac{\partial q_c}{\partial x} + K_h G^{13} \frac{\partial q_c}{\partial z^*} \right) \\
 & + \left(\frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(K_h \frac{\partial q_c}{\partial y} + K_h G^{23} \frac{\partial q_c}{\partial z^*} \right) \\
 & + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{K_h}{G^{1/2}} \frac{\partial q_c}{\partial z^*} \right). \tag{92}
 \end{aligned}$$

雨水の混合比の方程式中の拡散項：

$$\begin{aligned}
 D_{q_r} = & \left(\frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(K_h \frac{\partial q_r}{\partial x} + K_h G^{13} \frac{\partial q_r}{\partial z^*} \right) \\
 & + \left(\frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(K_h \frac{\partial q_r}{\partial y} + K_h G^{23} \frac{\partial q_r}{\partial z^*} \right) \\
 & + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{K_h}{G^{1/2}} \frac{\partial q_r}{\partial z^*} \right). \tag{93}
 \end{aligned}$$

サブグリッドスケールの運動エネルギー E は以下の時間発展方程式より得られる:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} + \omega \frac{\partial E}{\partial z^*} \\
 &= \frac{g}{G^{1/2}} \left\{ -AK_h \frac{\partial \theta_e}{\partial z^*} + K_h (1 - \gamma A) \frac{\partial q_v}{\partial z^*} + K_h \frac{\partial q_c}{\partial z^*} \right\} \\
 &+ 2K_m \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right)^2 \right\} \\
 &+ K_m \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 \right. \\
 &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right)^2 \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 \right\} \\
 &- \frac{2}{3} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \\
 &+ \left(\frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(K_h \frac{\partial E}{\partial x} + K_h G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) \\
 &+ \left(\frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(K_h \frac{\partial E}{\partial y} + K_h G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) \\
 &+ \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{K_m}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) - \left(\frac{C_\varepsilon}{l} \right) E^{\frac{3}{2}}, \tag{94}
 \end{aligned}$$

$$\overline{u_i'' u_j''} = -K_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} E. \tag{95}$$

右辺第 1 項は浮力による乱流エネルギーの生成項であり, 右辺第 2, 3, 4, 5 項はシアーによる生成項である.

K_m は

$$K_m = C_m E^{\frac{1}{2}} l \tag{96}$$

から得られる.

E に関する方程式に書き換えると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} + \omega \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) \\
& + \frac{g}{G^{1/2}} \left(-Ak_h \frac{\partial \theta_e}{\partial z^*} + K_h \frac{\partial q_l}{\partial z^*} \right) \\
& + 2C_{ml} E^{1/2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right. \\
& \quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 \\
& \quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 \\
& \quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right)^2 \right] \\
& + \frac{C_{ml}}{2E^{1/2}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(\frac{\partial E^2}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E^2}{\partial z^*} \right) \right. \\
& \quad + \left(\frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(\frac{\partial E^2}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E^2}{\partial z^*} \right) \\
& \quad + \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E^2}{\partial z^*} \right) \\
& \quad - \left\{ \left(\frac{\partial E}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right)^2 \right. \\
& \quad \quad \left. + \left(\frac{\partial E}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right)^2 \right\} \\
& - \frac{C_\varepsilon}{l} E^{3/2}
\end{aligned} \tag{97}$$

となる。

2.4 雲・降水の微物理過程

熱力学方程式中の生成・消滅項：

$$M_\theta = -\gamma \left\{ \frac{\partial q_{vs}}{\partial t} + u \frac{\partial q_{vs}}{\partial x} + v \frac{\partial q_{vs}}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_{vs}}{\partial z^*} + E_r \right\}. \quad (98)$$

水蒸気の混合比の方程式中の生成・消滅項：

$$M_{q_v} = \frac{\partial q_{vs}}{\partial t} + u \frac{\partial q_{vs}}{\partial x} + v \frac{\partial q_{vs}}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_{vs}}{\partial z^*} + E_r. \quad (99)$$

雲水の混合比の方程式中の生成・消滅項：

$$M_{q_c} = - \left(\frac{\partial q_{vs}}{\partial t} + u \frac{\partial q_{vs}}{\partial x} + v \frac{\partial q_{vs}}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_{vs}}{\partial z^*} \right) - A_r - C_r. \quad (100)$$

雨水の混合比の方程式中の生成・消滅項：

$$M_{q_r} = F_r - E_r + A_r + C_r. \quad (101)$$

ただし、

$$q_{vs} = \frac{3.8}{\bar{p}} \exp \left(17.27 \frac{\bar{\Pi}\theta - 273}{\bar{\Pi}\theta - 36} \right), \quad (102)$$

$$E_r = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\left(1 - \frac{q_v}{q_{vs}} \right) C (\bar{\rho} q_r)^{0.525}}{5.4 \times 10^5 + \frac{2.55 \times 10^6}{\bar{p} q_{vs}}}, \quad (103)$$

$$C = 1.6 + 124.9 (\bar{\rho} q_r)^{0.2046}, \quad (104)$$

$$A_r = k_1 (q_c - a), \quad (105)$$

$$C_r = k_2 q_c q_r^{0.875}, \quad (106)$$

$$F_r = \frac{1}{G^{1/2} \bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z^*} (\bar{\rho} V q_r), \quad (107)$$

$$V = 36.34 (\bar{\rho} q_r)^{0.1346} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (108)$$

$k_1 = 0.001 \text{ s}^{-1}$, $a = 0.001 \text{ kg kg}^{-1}$, $k_2 = 2.2 \text{ s}^{-1}$ である。

A 基礎方程式系の導出

導出できなかった方程式や覚書として残しておきたい導出過程について解説する³.

A.1 湿潤空気の状態方程式

温度 T のとき, 乾燥空気の状態方程式は

$$p_d = \rho_d R_d T \quad (109)$$

である. p_d は乾燥空気の圧力, ρ_d は乾燥空気の密度, R_d は乾燥空気の気体定数である.

また, 温度 T のときの水蒸気の状態方程式は

$$e = \rho_v R_v T. \quad (110)$$

e は湿潤空気の圧力, ρ_v は湿潤空気の密度, R_v は湿潤空気の気体定数である.

容積 V 中に質量 M_d の乾燥空気と質量 M_v の水蒸気が混ざっているとき, 湿潤空気の密度は

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{M_d + M_v}{V} \\ &= \rho_d + \rho_v \end{aligned} \quad (111)$$

したがって, 湿潤空気の圧力を p とすると,

$$\begin{aligned} p &= p_d + e \\ &= \rho_d R_d T + \rho_v R_v T \\ &= \rho_d \frac{R^*}{m_d} T + \rho_v \frac{R^*}{m_v} T \\ &= \rho \left(\frac{\rho_d + \rho_v (m_d/m_v)}{\rho} \right) \frac{R^*}{m_d} T \\ &= \rho R_d T \left(\frac{1 + (\rho_v/\rho_v) (m_d/m_v)}{1 + \rho_v/\rho_d} \right) \\ &= \rho R_d T \left(\frac{1 + \varepsilon q_v}{1 + q_v} \right) \end{aligned} \quad (112)$$

³式変形などがかなりしつこく書いてあります.

ただし R^* は一般気体定数, m_d, m_v はそれぞれ乾燥空気の分子量, 水蒸気の分子量, q_v は水蒸気の混合比, ε は乾燥空気の分子量と水蒸気の分子量との比である:

$$q_v \equiv \frac{\rho_v}{\rho_d} \quad (113)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &\equiv \frac{m_v}{m_d} \\ &\sim 1.61 \end{aligned} \quad (114)$$

一般に混合比は $q \ll 1$ なので,

$$\begin{aligned} p &= \rho R_d T \left\{ \frac{1 + q_v + (\varepsilon - 1) q_v}{1 + q_v} \right\} \\ &\simeq \rho R_d T \{1 + (\varepsilon - 1) q_v (1 - q_v)\} \\ &\sim \rho R_d T \{1 + (\varepsilon - 1) q_v\} \\ &= \rho R_d T (1 + 0.61 q_v) \end{aligned} \quad (115)$$

である.

A.2 運動方程式

運動方程式中の浮力項を温位と混合比で表す (Houze, 1993 参照). 雲に対する運動方程式は, 雲水粒子と降水粒子の影響を考えなければならない. この効果を式に入れるには 2 つの方法がある. 一つは, Newton の第 3 法則から周囲の空気に対する空気塊の抗力は $-g(q_v + q_c + q_r)$ なので, この項を外力項として運動方程式に追加する方法である. もう一つは, 密度 ρ に雲水粒子と降水粒子の密度を含めるという方法である. つまり, 周囲の空気 (気体のみ) の密度を ρ_a として

$$\rho = \rho_a (1 + q_c + q_r)$$

とする. これら 2 つの方法は等しい. ここでは, 密度を式 (111) として決めたので, 前者の方法で導出する.

基本場と偏差を含んだ運動方程式は

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3} g (1 + q_v + q_c + q_r) - \varepsilon_{i3k} f u_k + D_{u_i} \quad (116)$$

である. エクスナー関数 (1) を用いて, 圧力項を書き直す. エクスナー関数を x_i で微分すると

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{c_p p}{R_d \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}. \quad (117)$$

ここで, 状態方程式 (3), 温位 (2), 仮温位 (5) より

$$\begin{aligned} p &= \rho R_d \Pi \theta (1 + 0.61 q_v) \\ &= \rho R_d \Pi \theta_v \end{aligned} \quad (118)$$

である. したがって, 圧力項は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= -\frac{c_p p}{R_d \Pi \rho} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \\ &= -c_p \theta_v \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (119)$$

運動方程式は

$$\frac{du_i}{dt} = -c_p \theta_v \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \delta_{i3} g (1 + q_v + q_c + q_r) - \varepsilon_{i3k} f u_k + D_{u_i} \quad (120)$$

となる.

次に, 基本場とそこからの偏差に分けて, 線形化する. 水平方向の運動方程式 ($i = 1, 2$) は

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -c_p (\bar{\theta}_v - \theta'_v) \frac{\partial (\bar{\Pi} - \pi)}{\partial x} + fv + D_u \\ &\simeq -c_p \left(\bar{\theta}_v \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x} + \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial x} + \theta'_v \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x} \right) + fv + D_u,\end{aligned}\quad (121)$$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -c_p (\bar{\theta}_v - \theta'_v) \frac{\partial (\bar{\Pi} - \pi)}{\partial y} - fu + D_v \\ &\simeq -c_p \left(\bar{\theta}_v \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial y} + \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial y} + \theta'_v \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial y} \right) - fu + D_v.\end{aligned}\quad (122)$$

鉛直方向の運動方程式 ($i = 3$) は

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= -c_p (\bar{\theta}_v - \theta'_v) \frac{\partial (\bar{\Pi} - \pi)}{\partial z} - g(1 + q_v + q_c + q_r) + D_w \\ &\simeq -c_p \left(\bar{\theta}_v \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} + \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial z} + \theta'_v \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} \right) - g(1 + q_v + q_c + q_r) + D_w.\end{aligned}\quad (123)$$

偏差の式は基本場を含む式から基本場のみの式を引けばよい. 基本場では静水圧平衡が成り立っているとする:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} = -\frac{g}{c_p \bar{\theta}_v}.\quad (124)$$

水平方向についての基本場は各項が 0 になるので, 偏差の式は基本場を含む式と同じである:

$$\frac{du}{dt} = -c_p \left(\bar{\theta}_v \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x} + \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial x} + \theta'_v \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x} \right) + fv + D_u,\quad (125)$$

$$\frac{dv}{dt} = -c_p \left(\bar{\theta}_v \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial y} + \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial y} + \theta'_v \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial y} \right) - fu + D_v.\quad (126)$$

鉛直方向については, 式 (123) から式 (124) を引いて偏差の式にする:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= -c_p \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial z} - c_p \theta'_v \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} - g(q_v + q_c + q_r) + D_w \\ &= -c_p \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial z} + g \left(\frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} - q_v - q_c - q_r \right) + D_w.\end{aligned}\quad (127)$$

ここで浮力項を変形する. 仮温位を基本場 ($\bar{\theta}_v$) とそこからの偏差 (θ'_v) に分けると

$$\theta_v = \bar{\theta}_v + \theta'_v.\quad (128)$$

また定義より,

$$\begin{aligned}
 \theta_v &= \theta (1 + 0.61q_v) \\
 &= (\bar{\theta} + \theta') \{1 + 0.61(\bar{q}_v + q'_v)\} \\
 &= \bar{\theta}(1 + 0.61\bar{q}_v) + 0.61\bar{\theta}q'_v + \theta'(1 + 0.61\bar{q}_v) + 0.61\theta'q'_v. \quad (129)
 \end{aligned}$$

基本場を引いて線形化すると,

$$\theta'_v \simeq 0.61\bar{\theta}q'_v + \theta'(1 + 0.61\bar{q}_v). \quad (130)$$

したがって, 浮力項の () 内の第 1, 2 項部分は

$$\begin{aligned}
 \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} - q_v &= \frac{0.61\bar{\theta}q'_v + \theta'(1 + 0.61\bar{q}_v)}{\bar{\theta}(1 + 0.61\bar{q}_v)} - q_v \\
 &= \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{0.61(q_v - \bar{q}_v)}{1 + 0.61\bar{q}_v} - q_v \\
 &= \frac{\theta'}{\bar{\theta}} - 1 + \frac{1 + 0.61q_v}{1 + 0.61\bar{q}_v} - q_v \\
 &\simeq \frac{\theta'}{\bar{\theta}} - 1 + 0.61(q_v - \bar{q}_v) \quad (131)
 \end{aligned}$$

となる (? はず). 最後の近似が分からない.

よって, 運動方程式は

$$\begin{aligned}
 \frac{du_i}{dt} + c_p \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \\
 = \delta_{i3} g \left[\frac{\theta}{\bar{\theta}} - 1 + 0.61(q_v - \bar{q}_v) - q_c - q_r \right] - \varepsilon_{i3k} f u_k + D_{u_i} \quad (132)
 \end{aligned}$$

となる.

A.3 圧力方程式

圧力方程式は, 連続の式

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (133)$$

とエクスター関数で表した状態方程式

$$\Pi = \left(\frac{R_d}{p_0} \rho \theta_v \right)^{R_d/c_v} \quad (134)$$

から導出する.

上の状態方程式 (134) を t で微分する:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt} &= \left(\frac{R_d}{p_0} \right)^{R_d/c_v} \left\{ \frac{R_d}{c_v} \theta_v^{R_d/c_v} \rho^{R_d/c_v-1} \frac{d\rho}{dt} + \frac{R_d}{c_v} \rho^{R_d/c_v} \theta_v^{R_d/c_v-1} \frac{d\theta_v}{dt} \right\} \\ &= \frac{R_d}{c_v} \left(\frac{R_d}{p_0} \rho \theta_v \right)^{R_d/c_v} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\theta_v} \frac{d\theta_v}{dt} \right\} \\ &= \frac{R_d}{c_v} \Pi \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\theta_v} \frac{d\theta_v}{dt} \right\}. \end{aligned} \quad (135)$$

連続の式 (133) を代入すると,

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{R_d}{c_v} \Pi \left\{ -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\theta_v} \frac{d\theta_v}{dt} \right\} \quad (136)$$

となる.

基本場とそこからの偏差に分けると,

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \pi}{\partial x_j} + w \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} = -\frac{R_d}{c_v} \bar{\Pi} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{R_d}{c_v} \pi \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{R_d}{c_v} \frac{\Pi}{\theta_v} \frac{d\theta_v}{dt}. \quad (137)$$

音速

$$c^2 = \frac{c_p R_d}{c_v} \Pi \theta_v, \quad (138)$$

$$\bar{c}^2 = \frac{c_p R_d}{c_v} \bar{\Pi} \bar{\theta}_v \quad (139)$$

を用いて書き直すと,

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}_v} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + w \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} = -u_j \frac{\partial \pi}{\partial x_j} - \frac{R_d \pi}{c_v} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{c^2}{c_p \theta_v^2} \frac{d\theta_v}{dt}. \quad (140)$$

ここで、状態方程式 (134) を用いて右辺第 3 項を変形する:

$$\begin{aligned}
w \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} &= w \left(\frac{R_d}{p_0} \right)^{R_d/c_v} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v)^{R_d/c_v}}{\partial z} \\
&= w \left(\frac{R_d}{p_0} \right)^{R_d/c_v} \frac{R_d}{c_v} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v)^{R_d/c_v - 1} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\theta}_v}{\partial z} \\
&= w \frac{R_d \bar{\Pi}}{c_v \bar{\Pi}} \frac{1}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v)}{\partial z} \\
&= \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} w \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v)}{\partial z} \\
&= \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} u_j \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v)}{\partial x_j}. \tag{141}
\end{aligned}$$

また、左辺第 2 項は

$$\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}_v} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \tag{142}$$

と書き換えることができる。左辺第 2, 3 項をまとめると圧力方程式は

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v u_j) = f_\pi, \tag{143}$$

$$f_\pi = -u_j \frac{\partial \pi}{\partial x_j} + \frac{R_d \pi}{c_v} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{c^2}{c_p \theta_v^2} \frac{d \theta_v}{dt} + D_\pi. \tag{144}$$

この圧力方程式は Tapp and White (1976) が非静力メソモデルに用いたのと同じ方程式である。

Klemp and Wilhelmson (1978) では $f_\pi = 0$ としている。さらに詳しくは Klemp (1978) にある。これは線形化を行い、非断熱項 ((144) の右辺第 3 項) を無視することを意味する。

D_π は非断熱項を無視することによる質量の生成・消滅があることを意味するってこと？

B サブグリッド拡散パラメタリゼーション

B.1 レイノルズ応力方程式

B.2 サブグリッドスケールの方程式

サブグリッドスケールの運動エネルギーの方程式に関して, Klemp and Wilhelmson (1978) 中の式 (2.21) から (3.12) の導出を行った. (2.21) から導出した式と比べると, (3.21) には足りない項が 2 つあった.

ここではサブグリッドスケールの運動エネルギーの方程式を書き下す. 座標系は直交直線座標系である.

Klemp and Wilhelmson (1978) の式 (2.21):

$$\frac{dE}{dt} = gw \left(\overline{\frac{\theta'}{\theta} + 0.61q'_v - q'_c} \right) - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) - \frac{C_\varepsilon}{l} E^{\frac{3}{2}}. \quad (145)$$

C_ε, l は定数である.

ここで

$$w \left(\overline{\frac{\theta'}{\theta} + 0.61q'_v - q'_c} \right) = -AK_h \frac{\partial \theta_e}{\partial z} + K_h \frac{\partial q_l}{\partial z}, \quad (146)$$

$$\overline{u'_i u'_j} = -K_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} E, \quad (147)$$

$$K_m = C_m l E^{\frac{1}{2}}. \quad (148)$$

ただし

$$q_l = q_v + q_c, \quad (149)$$

$$A = \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{1 + \frac{1.61\varepsilon L q_v}{R_d T}}{1 + \frac{\varepsilon L^2 q_v}{c_p R_d T^2}} \right\}, \quad (150)$$

$$K_h = 3K_m. \quad (151)$$

Klemp and Wilhelmson (1978) の式 (3.12):

$$\begin{aligned} \delta_{2t} K_m &= -\frac{1}{3} \bar{u}^x (4\delta_{2x} K_m - \delta_{4x} K_m) - \frac{1}{3} \bar{u}^y (4\delta_{2y} K_m - \delta_{4y} K_m) \\ &\quad \overline{w \delta_z K_m} + \frac{C_m^2 l^2}{2K_m} (B + S) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta_{xx} K_m^2 + \delta_{yy} K_m^2 + \delta_{zz} K_m^2) - \frac{C_\varepsilon K_m^2}{2C_m l^2}. \end{aligned} \quad (152)$$

ただし,

$$B = -gAK_h\delta_{2z}\theta_e + gK_h\delta_{2z}ql, \quad (153)$$

$$\begin{aligned} S &= -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial u_j} \\ &= K_m \left\{ 2 [(\delta_x u)^2 + (\delta_y v)^2 + (\delta_z w)^2] \right. \\ &\quad \left. + (\overline{\delta_x v + \delta_y w})^2 + (\overline{\delta_x w + \delta_z u})^2 + (\overline{\delta_y w + \delta_z v})^2 \right\}. \quad (154) \end{aligned}$$

式(154)の右辺の {} 内第3項は誤植かもしれない. $(\overline{\delta_x v + \delta_y w})^2$ であると思われる. 式(3.12)は4次精度で離散化された後の式である. δ_{2t} などの意味は以下のようである. ξ をある独立変数, ϕ をある従属変数とし, $n\Delta\xi$ はある独立変数の間隔とすると,

$$\delta_{n\xi}\phi(\xi) = \frac{1}{n\Delta\xi} \left[\phi\left(\xi + \frac{n\Delta\xi}{2}\right) - \phi\left(\xi - \frac{n\Delta\xi}{2}\right) \right], \quad (155)$$

$$\overline{\phi(\xi)^{n\xi}} = \frac{1}{2} \left[\phi\left(\xi + \frac{n\Delta\xi}{2}\right) - \phi\left(\xi - \frac{n\Delta\xi}{2}\right) \right]. \quad (156)$$

(146) と (147) を用いて (145) を書き直すと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} + w \frac{\partial E}{\partial z} \right) \\ &\quad + \left(-gAK_h \frac{\partial \theta_e}{\partial z} + gK_h \frac{\partial ql}{\partial z} \right) \\ &\quad - \left\{ -K_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right\} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) - \frac{C_\varepsilon}{l} E^{\frac{3}{2}}. \quad (157) \end{aligned}$$

右辺第 3 項, 第 4 項を書き下すと, それぞれ,

$$\begin{aligned}
& - \left\{ -K_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right\} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
= & K_m \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \right. \\
& + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial z} \\
& + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\
& \left. - \frac{2K_m^2}{3C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \\
= & 2K_m \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
& + K_m \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right. \\
& + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \\
& + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left. \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \\
& - \frac{2K_m^2}{3C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
= & 2K_m \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
& + K_m \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
& - \frac{2K_m^2}{3C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
= & 2K_m \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
& + K_m \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
& - \frac{2K_m^2}{3C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \tag{158}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial z} \right) \\
&= \frac{1}{C_m^2 l^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial K_m^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial K_m^2}{\partial y} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial K_m^2}{\partial z} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{C_m^2 l^2} \left\{ K_m \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial K_m}{\partial x} \frac{\partial K_m^2}{\partial x} \right. \\
&\quad + K_m \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2} + \frac{\partial K_m}{\partial y} \frac{\partial K_m^2}{\partial y} \\
&\quad \left. + K_m \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} + \frac{\partial K_m}{\partial z} \frac{\partial K_m^2}{\partial z} \right\} \\
&= \frac{K_m}{C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} 2K_m \frac{\partial K_m}{\partial x} + \frac{\partial K_m}{\partial y} 2K_m \frac{\partial K_m}{\partial y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial K_m}{\partial z} 2K_m \frac{\partial K_m}{\partial z} \right) \\
&= \frac{K_m}{C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} \right) \\
&\quad + \frac{2K_m}{C_m^2 l^2} \left\{ \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (159)
\end{aligned}$$

したがって, $E = \left(\frac{K_m}{C_m l} \right)^2$, $K_h = 3K_m$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_m}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial K_m}{\partial x} + v \frac{\partial K_m}{\partial y} + w \frac{\partial K_m}{\partial z} \right) + \frac{3gC_m^2 l^2}{2} \left(-A \frac{\partial \theta_e}{\partial z} + \frac{\partial q_l}{\partial z} \right) \\
&\quad + C_m^2 l^2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
&\quad + \frac{C_m^2 l^2}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
&\quad - \frac{K_m}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \\
&\quad - \frac{C_\varepsilon}{2C_m l^2} K_m^2. \quad (160)
\end{aligned}$$

(160) と (152) とを比べると, (152) 中には上 (160) の右辺第 4 項

$$-\frac{K_m}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (161)$$

と第 6 項

$$\left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \quad (162)$$

がない. 準圧縮系を考えているので, 第 4 項は 0 になる. 第 6 項がないのは不明である. $()^2$ なので微小項と考えるのだろうか. 消去する理由が分からないので, 第 6 項は残す.

よって, 直交直線座標系におけるサブグリッドスケールの運動エネルギーの方程式を E に関する式に書き換えると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} + w \frac{\partial E}{\partial z} \right) + 3gC_m l E^{1/2} \left(-A \frac{\partial \theta_e}{\partial z} + \frac{\partial q_l}{\partial z} \right) \\ & + 2C_m l E^{1/2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ & + C_m l E^{1/2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ & + 2C_m l E^{1/2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial E^{1/2}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E^{1/2}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial E^{1/2}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & - \frac{C_\varepsilon}{l} E^{3/2} \end{aligned} \quad (163)$$

となる. この式は Deardorff (1975), Mellor and Yamada (1974), Schemm and Lipps (1976) などで用いられているものと同じ方程式である.

地形に沿った座標系では

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} + \omega \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) + \frac{3gC_m l E^{1/2}}{G^{1/2}} \left(-A \frac{\partial \theta_e}{\partial z^*} + \frac{\partial q_l}{\partial z^*} \right) \\
 & + 2C_m l E^{1/2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
 & + C_m l E^{1/2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right)^2 \right\} \\
 & + C_m l E^{1/2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) + \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) \right\} \\
 & + 2C_m l E^{1/2} \left\{ \left(\frac{\partial E^{1/2}}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E^{1/2}}{\partial z^*} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\partial E^{1/2}}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E^{1/2}}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E^{1/2}}{\partial z^*} \right)^2 \right\} \\
 & - \frac{C_\varepsilon}{l} E^{3/2}
 \end{aligned} \tag{164}$$

となる.

C 変数

記号の意味は以下のものである:

- A_r : 自然対流速度
- a : 定数 $a = 0.001 \text{ gg}^{-1}$
- C : 換気ファクタ (ventilation factor)
- C_ε : 定数, 例えば $C_\varepsilon = 0.2$
- C_m : 定数, 例えば $C_m = 0.2$
- C_r : 凝集率
- c : 音波
- \bar{c} : 初期状態の音波
- c_p : 定圧比熱
- c_v : 定積比熱
- D_{u_i} : サブグリッドスケールの x_i 成分の運動方程式の乱流混合項
- D_π : サブグリッドスケールの圧力方程式の乱流混合項
- D_θ : サブグリッドスケールの熱力学方程式の乱流混合項
- D_{q_v} : サブグリッドスケールの水蒸気の混合比の方程式の乱流混合項
- D_{q_c} : サブグリッドスケールの雲水の混合比の方程式の乱流混合項
- D_{q_r} : サブグリッドスケールの雨水の混合比の方程式の乱流混合項
- E : サブグリッドスケールの運動エネルギー
- E_r : 雨水の蒸発率
- ε : 定数, $\varepsilon = 0.622$
- f : コリオリパラメータ
- g : 重力加速度
- K_h : 渦混合係数, $K_h = 3K_m$
- K_m : 運動量渦混合係数
- k_1 : 定数 $k_1 = 0.001\text{s}^{-1}$
- k_2 : 定数 $k_2 = 2.2\text{s}^{-1}$
- L : 蒸発の潜熱
- l : 混合距離, $l = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{\frac{1}{3}}$
- M_θ : 熱力学方程式の微物理項
- M_{q_v} : 水蒸気の混合比の方程式の微物理項
- M_{q_c} : 雲水の混合比の方程式の微物理項
- M_{q_r} : 雨水の混合比の方程式の微物理項

- N : Brunt-Väisälä 振動数
 p : 圧力
 \bar{p} : 初期状態の圧力
 p_0 : 地表面での基準圧力
 Π : エクスナー関数: 無次元化した圧力
 $\bar{\Pi}$: 初期状態の無次元化した圧力
 q_c : 雲水の混合比
 q_r : 雨水の混合比
 q_v : 水蒸気の混合比
 q_{vs} : 飽和混合比
 R_d : 乾燥空気の気体定数
 ρ : 密度
 $\bar{\rho}$: 初期状態の密度
 ρ_0 : 地表面での密度
 T : 温度
 θ_v : 仮温位
 θ_e : 相当温位
 u_i : 速度, $(u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$
 V : 終端速度
 x_i : 空間変数, $i = 1, 2, 3, (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$

D 参考文献

- Browning, K. A., 1964: Airflow and precipitation within severe local storms which travel to the right of the winds. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 634-639
- Curic, M., Janc, D., Vujovic, D., Vuckovic, V., 2003: The effects of a river valley on an isolated cumulonimbus cloud development. *Atmos. Res.*, **66**, 123-139.
- Das, P., 1969: The thermodynamic equation in cumulus dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **26**, 399-409.
- Deardorff, J. W., 1975: The development of boundary-layer turbulence models for use in studying the severe storm environment. *Proc. SESAME Meeting*, Boulder, NOAA-ERL, 251-261.
- Houze, R. A., 1993: Cloud dynamics. Academic Press.
- Kessler, E., 1969: On the Distribution and Continuity of Water Substance in Atmospheric Circulation. Meteor. Monogr., *Amer. Meteor. Soc.*, **32**, 84 pp.
- Klemp J. B. and Robert B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070-1096.
- Klemp J. B., 1978: A splitting procedure for numerical solution of the compressible equations of motion. ???
- Klemp J. B., 1978: A splitting procedure for numerical solution of the compressible equations of motion. ???, ???.
- 中野満寿男, 2003: 鉛直シアが台風初期渦形成に及ぼす影響. 九州大学大学院理学府 地球惑星科学専攻 修士論文.
- Mellor, G., and T. Yamada, 1974: A hierarchy of turbulence closure models for atmospheric boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1791-1806.
- Ogura, Y. and M. Yoshizaki, 1988: Numerical study of orographic-convective precipitation over the eastern Arabic Sea and the Ghats Mountains during the summer monsoon. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 2097-2122.
- Ogura, Y., and T. Takahashi, 1971: Numerical simulation of the life cycle of a thunderstorm cell. *Mon. Wea. Rev.*, **99**, 895-911.
- 大宮司久明, 三宅裕, 吉澤徹, 1998: 乱流の数値流体力学—モデルと計算法. 東京大学出版会, 652.

- 齊藤和雄 編, 1999: 非静力学モデル. 気象研究ノート 第 196 号, 日本気象学会.
- Saunders, P. M., 1957: The thermodynamics of saturated air: A contribution to the classical theory. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **83**, 342-350.
- Schemm, C. E., and F. Lipps, 1976: Some results from a simplified three-dimensional numerical model of atmospheric turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 1021-1041.
- Skamarock, William C. and Joseph B. Klemp, 1992: The stability of time-split methods for the hydrostatic and the nonhydrostatic elastic equation. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2109-2127.
- Soong, S-T., and Y. Ogura, 1973: A comparison between axi-symmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 879-893
- Tapp, M. C., and P. W. White, 1976: A nonhydrostatic mesoscale model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **102**, 277-296.
- 坪木和久, 榊原篤志, 2001: CReSS ユーザーズガイド 第 2 版.
http://www.tokyo.rist.or.jp/CReSS_Fujin/CReSS.top.html
- Wilhelmson, R. B., 1977: On the thermodynamic equation for deep convection. *Mon. Wea. Rev.*, **105**, 545-547.
- Wilhelmson, R. B., and Y. Ogura, 1977: The pressure perturbation and the numerical modeling of a cloud. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1295-1307.

謝辞

本資源は, 地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

<http://www.gfd-dennou.org/arch/deepconv/kaminari/>

において公開されているものである。©高橋 こう子, 杉山 耕一朗, 小高 正嗣, 中島 健介, 林 祥介 (K. Takahashi, K. Sugiyama, M. Odaka, K. Nakajima and Y.-Y. Hayashi) 2003. 本資源は, 著作者の諸権利に抵触しない (迷惑をかけない) 限りにおいて自由に利用していただいて構わない。なお, 利用する際には今一度自ら内容を確認することをお願いする (無保証無責任原則)。

本資源に含まれる元資源提供者 (図等の版元等を含む) からは, 直接的な形での WEB 上での著作権または使用許諾を得ていない場合があるが, 勝手ながら, 「未来の教育」のための実験という学術目的であることをご理解いただけるものと信じ, 学術標準の引用手順を守ることで諸手続きを略させていただいている。本資源の利用者には, この点を理解の上, 注意して扱っていただけるようお願いする。万一, 不都合のある場合には

deepconv@gfd-dennou.org

まで連絡していただければ幸いです。