

3 次元積雲モデル

高橋 こう子, 杉山 耕一朗, 小高 正嗣, 中島 健介, 林 祥介

2004年01月05日

目次

1	数値計算法	2
1.1	数値計算の概要	2
1.2	モデル格子と変数の配置	4
1.3	時間積分	6
1.4	平均化・微分オペレータの定義	7
1.5	離散化前の基礎方程式	8
1.6	水平方向の運動方程式の離散化	14
1.7	鉛直方向の運動方程式と圧力方程式の離散化	17
1.8	熱力学方程式と各混合比の方程式の離散化	25
1.9	サブグリッドスケールの運動エネルギーの方程式の離散化	28
2	コード解説	30
2.1	計算手順	30
A	付録	32
A.1	湿潤飽和調節法	32
A.2	Asselin の時間フィルタ	35
B	参考文献	36

要旨

3次元, 圧縮性の地形を考慮した積雲モデルの数値計算法.

1 数値計算法

1.1 数値計算の概要

本雲モデルで用いる数値解法の概要を以下にまとめる。数値解法は CReSS に従う。数理モデル¹は

- 従属変数: 速度 u, v, w , 温位偏差 θ' , 気圧偏差 p' , 水蒸気混合比 q_v , 雲水混合比 q_c , 雨水混合比 q_r
- 基本方程式: 圧縮系
 - 運動方程式の式
 - 圧力方程式
 - 熱力学方程式
 - 水蒸気混合比の式
 - 雲水混合比の式
 - 雨水混合比の式
- 地形に沿った曲線座標
- スタッガード格子
 - 水平方向: Arakawa C グリッド
 - 鉛直方向: Lorenz グリッド
- 運動方程式と圧力方程式の計算:

音波に関する項は短い時間間隔 $\Delta\tau$ で解き, その他の項は長い時間間隔 Δt で解く

 - 短い時間間隔で解く時間積分
 - * 水平方向の運動方程式: 陽解法, 前進差分², 1 次精度
 - * 鉛直方向の運動方程式: 陰解法, Crank-Nicolson スキーム (圧力項のみ), 前進差分 (圧力項以外), 1 次精度

¹この節は後で書き直し。今はよくわからないので。

²移流項が不安定を起こさないか。これでいいのか。

- * 圧力方程式: 陰解法, Crank-Nicolson スキーム (圧力項のみ), 前進差分 (圧力項以外), 1 次精度
 - * 長い時間間隔で解く時間積分は一定
 - 長い時間間隔で解く時間積分
 - * leap frog スキーム
 - * Asselin の時間フィルター
 - 空間微分
 - * 中心差分, 2 次精度
 - 2 次の中心差分で表される移流項の計算不安定を解消するために, 移流項に人工的な粘性項を追加
- 熱力学方程式, 水蒸気と雲水と雨水の混合比の式の計算:
長い時間間隔 Δt で解く
 - 長い時間間隔で解く時間積分:
 - * leap-frog スキーム
 - * Asselin の時間フィルター
 - 空間微分
 - * 中心差分, 2 次精度
 - 2 次の中心差分で表される移流項の計算不安定を解消するために, 移流項に人工的な粘性項を追加

1.2 モデル格子と変数の配置

本雲モデルでは空間の表現を格子点法を用いているので、空間微分は差分法を用いて表現される。ここでは本モデルで用いるモデル格子の構造と変数の配置についてまとめる。

図1に示したように、水平・鉛直方向の変数をずらして互い違いに配置する。配置方法は、水平方向が Arakawa C グリッド、鉛直方向には Lorenz グリッドを用いている。

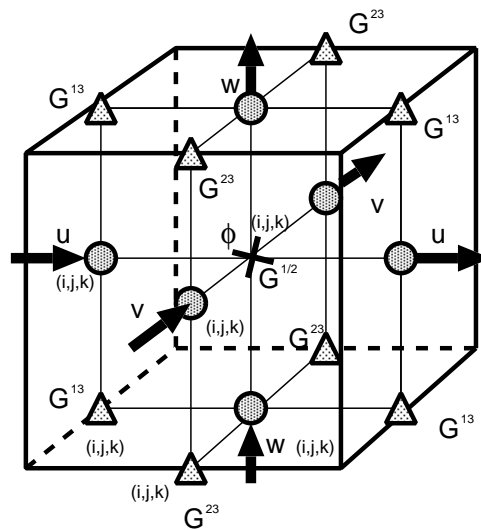


図 1: ある格子における変数の配置図.

すべてのスカラー量 (ϕ : 気圧偏差, 温位偏差, 水蒸気混合比, 雲水混合比, 雨水混合比) を格子ボックスの中心に配置する。ベクトル量 (速度 u, v, w) を中心から次のように半格子ずらして配置する。水平成分 u, v は鉛直方向をスカラー量と同じレベルにして, u を x 方向に半格子ずらし, v を y 方向に半格子ずらす。鉛直成分 w は, 水平方向をスカラー量と同じレベルにして, z 方向に半格子ずらす。

さらに、本モデルでは地形に沿う座標系を用いているので、座標変換に伴うヤコビアン $G^{1/2}$ と座標変換の計量テンソルの逆テンソルの成分のうち 0 または 1 でないもの、つまり、 G^{13}, G^{23} についても考えなければならない。 $G^{1/2}$ は格子ボックスの中心に配置する。 G^{13} は中心から x 方向に半格子ずれた u の定義点からさらに z 方向に半格子ずらす。 G^{23} は中心から y 方向に半格子ずれた v の定義点からさらに z 方向に半格子ずらす。

座標 x, y, z^* についても半格子ずらして配置し, ベクトル量の位置に対応している (図 1).

物理領域 (方程式を計算する領域) は外縁の 1 格子分を除いた領域である. 外縁の 1 格子は境界条件のための領域とする.

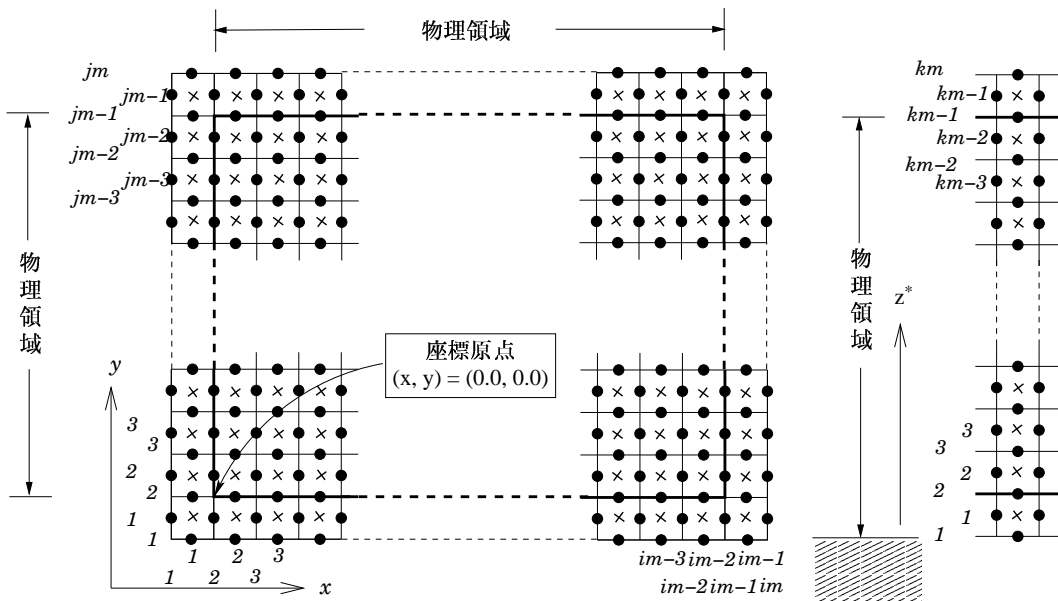


図 2: 全計算領域における変数の配置図. 黒丸は半格子ずらしたベクトル量, ×印はスカラー量の位置を表す.

1.3 時間積分

音波に関する項 (u, v, w, π) を短い時間間隔 $\Delta\tau$ で解き, その他の項を長い時間間隔 Δt で解く. これをモード別時間分解法またはモード分離時間法という (図 3). ただし Δt を n 分割したものを $\Delta\tau$ とする:

$$\Delta t = n\Delta\tau. \tag{1}$$

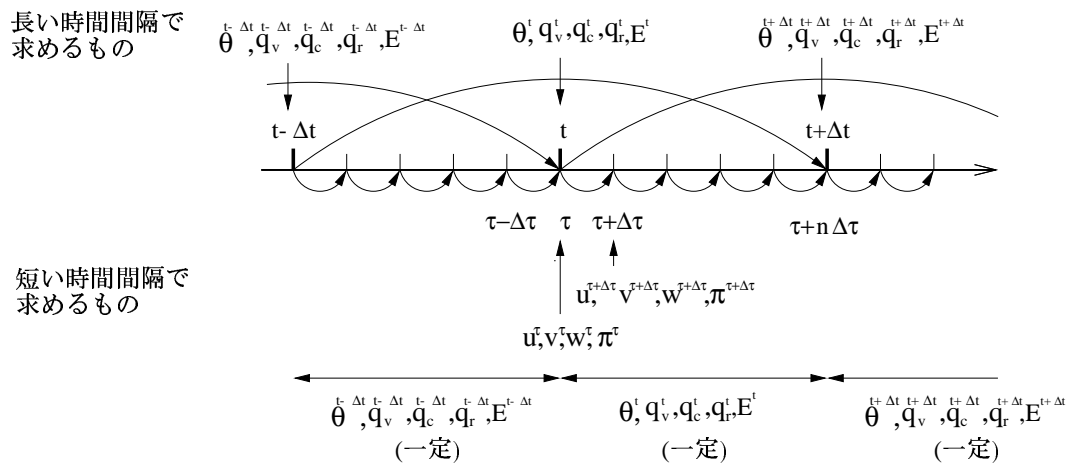


図 3: モード別時間分解法の概念図.

1.4 平均化・微分オペレータの定義

基礎方程式系を、スタッガード格子系について有限差分法を用いて離散化し、数値積分する。スタッガード格子を用いているのである格子点の値を求めるために平均化の操作が必要である。この平均化のためのオペレータを以下のように定義する。

任意の物理量 ϕ を空間の x 方向 (または y, z^* 方向) に平均する。2 次精度の中心差分に現れる 2 点の平均は

$$\overline{\phi}_{i,j,k}^x \equiv \frac{1}{2} \left(\phi_{i-\frac{1}{2},j,k} + \phi_{i+\frac{1}{2},j,k} \right) \quad (2)$$

とする。ただし下付添字 i, j, k は側面からそれぞれ x, y, z 方向に i, j, k 番目の格子点であることを表す。

平均化の添字が 2 つある場合、例えば x, z^* 方向の平均化は

$$\overline{\phi}_{i,j,k}^{xz^*} \equiv \frac{1}{4} \left(\phi_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + \phi_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + \phi_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + \phi_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right). \quad (3)$$

微分オペレータを定義する。ある方向 x の格子間隔を Δx とする。

$$(\partial_x \phi)_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k} - \phi_{i-\frac{\Delta x}{2},j,k} \right) \quad (4)$$

平均化オペレータと同様に、下付添字 i は側面から i 番目の格子点であることを表す。

2 次の微分オペレータは以下のように定義する:

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 \phi)_{i,j,k} &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\phi_{i+\Delta x,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta x} - \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i-\Delta x,j,k}}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i+\Delta x,j,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i-\Delta x,j,k}). \end{aligned} \quad (5)$$

密度 $\bar{\rho}$ と座標変換のヤコビアン $G^{1/2}$ は同じスカラー点で定義されている。直交直線座標での鉛直速度 w と地形に沿う座標系における鉛直速度 ω を同じ点で定義する:

$$\omega = \overline{u}^{z^*} G^{13^x} + \overline{v}^{z^*} G^{23^y} + \frac{w}{G^{1/2 z^*}}. \quad (6)$$

1.5 離散化前の基礎方程式

数値モデルで導出した基礎方程式をそのまま離散化して数値計算を行うと、計算不安定などを起こす。そこで人工的な項を追加することによってこうした不具合を修正する。

タイム・スプリット法, HE-VI 法を用いると、不安定な音波モードが非線形計算によって励起され成長することがある (Skamarock and Klemp, 1992)。そのため、人工的な音波減衰項 αDiv を追加して発散を抑える:

$$Div = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z^*} \quad (7)$$

また、移流項を中心差分で離散化すると計算不安定を起こすため、移流項に人工的な粘性項を付加する。2 次の数値粘性は

$$\text{Diff.}\phi = \nu_{2h} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] + \nu_{2v} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^{*2}}, \quad (8)$$

$$\nu_{2h} = \frac{\alpha_{2h} \Delta_h^2}{\Delta t}, \quad (9)$$

$$\nu_{2v} = \frac{\alpha_{2v} \Delta_v^2}{\Delta t}, \quad (10)$$

$$\Delta_h = (\Delta x \Delta y)^{1/2}, \quad (11)$$

$$\Delta_v = \Delta z^* \quad (12)$$

とする。 ϕ は任意の物理量であり、 ϕ は u, v, w, q_v, q_c, q_r については初期値からの偏差、 θ は基準状態からの偏差を表す。 α_{2h}, α_{2v} は無次元量で安定計算のためには

$$\alpha_{2h} \leq \frac{1}{8}, \quad (13)$$

$$\alpha_{2v} \leq \frac{1}{8} \quad (14)$$

でなければならない³。

これらの人工的に追加した項については後で詳述する。以下にこれら人工的な項を追加した基礎方程式を記述する。

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c_p \bar{\theta}_v \left\{ \frac{\partial (\pi - \alpha Div)}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial (\pi - \alpha Div)}{\partial z^*} \right\}$$

³具体的な値は不明。

$$-\text{Adv}.u + \text{Cori}.u + D_u, \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -c_p \bar{\theta}_v \left\{ \frac{\partial (\pi - \alpha \text{Div})}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial (\pi - \alpha \text{Div})}{\partial z^*} \right\} - \text{Adv}.v - \text{Cori}.v + D_v, \quad (16)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{c_p \bar{\theta}_v}{G^{1/2}} \frac{\partial (\pi - \alpha \text{Div})}{\partial z^*} - \text{Adv}.w + \text{Buoy}.w + D_w. \quad (17)$$

圧力方程式：

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w) = -\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right). \quad (18)$$

熱力学方程式：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\text{Adv}.\theta + M_\theta + D_\theta. \quad (19)$$

水蒸気の混合比の方程式：

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} = -\text{Adv}.q_v + M_{q_v} + D_{q_v}. \quad (20)$$

雲水の混合比の方程式：

$$\frac{\partial q_c}{\partial t} = -\text{Adv}.q_v + M_{q_c} + D_{q_c}. \quad (21)$$

雨水の混合比の方程式：

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} = -\text{Adv}.q_v + M_{q_r} + D_{q_r}. \quad (22)$$

ただし

$$\text{Adv}.\phi = u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + \omega \frac{\partial \phi}{\partial z^*} + \text{Diff}.\phi, \quad (23)$$

$$\text{Cori}.u = fv, \quad (24)$$

$$\text{Cori}.v = fu, \quad (25)$$

$$\text{Buoy}.w = g \left[\frac{\theta}{\bar{\theta}} - 1 + 0.61 (q_v - \bar{q}_v) - q_c - q_r \right] \quad (26)$$

である。

拡散項:

$$\begin{aligned}
D_u = & 2\frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial x} + K_m G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right) + 2G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial x} + K_m G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial y} + K_m \frac{\partial v}{\partial x} + K_m G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} + K_m G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \\
& + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial y} + K_m \frac{\partial v}{\partial x} + K_m G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} + K_m G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \\
& + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{K_m}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} + K_m G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \\
& - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial K_m^2}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial K_m^2}{\partial z^*} + \frac{\partial K_m^2}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial K_m^2}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial K_m^2}{\partial z^*} \right), \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_v = & \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial v}{\partial x} + K_m \frac{\partial u}{\partial y} + K_m G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} + K_m G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \\
& + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial v}{\partial x} + K_m \frac{\partial u}{\partial y} + K_m G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} + K_m G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \\
& + 2\frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial v}{\partial y} + K_m G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \\
& + 2G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial v}{\partial y} + K_m G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \\
& + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{K_m}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} + K_m G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \\
& - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial K_m^2}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial K_m^2}{\partial z^*} + \frac{\partial K_m^2}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial K_m^2}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial K_m^2}{\partial z^*} \right), \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_w = & \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{K_m}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} + K_m G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \\
& + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{K_m}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} + K_m G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{K_m}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} + K_m G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \\
& + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{K_m}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} + K_m G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \\
& + \frac{2}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{K_m}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) \\
& - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial K_m^2}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial K_m^2}{\partial z^*} + \frac{\partial K_m^2}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial K_m^2}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial K_m^2}{\partial z^*} \right) \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_\theta &= 3 \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_m G^{13} \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial \theta}{\partial y} + K_m G^{23} \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right) \\
&\quad + 3G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_m G^{13} \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right) \\
&\quad + 3G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial \theta}{\partial y} + K_m G^{23} \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right) \\
&\quad + \frac{3}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{K_m}{G^{1/2}} \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right), \tag{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{q_v} &= 3 \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial q_v}{\partial x} + K_m G^{13} \frac{\partial q_v}{\partial z^*} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial q_v}{\partial y} + K_m G^{23} \frac{\partial q_v}{\partial z^*} \right) \\
&\quad + 3G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial q_v}{\partial x} + K_m G^{13} \frac{\partial q_v}{\partial z^*} \right) \\
&\quad + 3G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial q_v}{\partial y} + K_m G^{23} \frac{\partial q_v}{\partial z^*} \right) \\
&\quad + \frac{3}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{K_m}{G^{1/2}} \frac{\partial q_v}{\partial z^*} \right), \tag{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{q_c} &= 3 \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial q_c}{\partial x} + K_m G^{13} \frac{\partial q_c}{\partial z^*} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial q_c}{\partial y} + K_m G^{23} \frac{\partial q_c}{\partial z^*} \right) \\
&\quad + 3G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial q_c}{\partial x} + K_m G^{13} \frac{\partial q_c}{\partial z^*} \right) \\
&\quad + 3G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial q_c}{\partial y} + K_m G^{23} \frac{\partial q_c}{\partial z^*} \right) \\
&\quad + \frac{3}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{K_m}{G^{1/2}} \frac{\partial q_c}{\partial z^*} \right), \tag{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{q_r} &= 3 \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial q_r}{\partial x} + K_m G^{13} \frac{\partial q_r}{\partial z^*} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial q_r}{\partial y} + K_m G^{23} \frac{\partial q_r}{\partial z^*} \right) \\
&\quad + 3G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial q_r}{\partial x} + K_m G^{13} \frac{\partial q_r}{\partial z^*} \right) \\
&\quad + 3G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K_m \frac{\partial q_r}{\partial y} + K_m G^{23} \frac{\partial q_r}{\partial z^*} \right) \\
&\quad + \frac{3}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{K_m}{G^{1/2}} \frac{\partial q_r}{\partial z^*} \right). \tag{33}
\end{aligned}$$

ただし

$$K_h = 3K_m, \tag{34}$$

$$K_m = C_m E^{1/2} l \tag{35}$$

を用いて書き換えている。

生成・消滅項:

$$M_\theta = -\gamma \left(\frac{\partial q_{vs}}{\partial t} + \text{Adv.}q_{vs} + E_r \right), \quad (36)$$

$$M_{q_v} = \frac{\partial q_{vs}}{\partial t} + \text{Adv.}q_{vs} + E_r, \quad (37)$$

$$M_{q_c} = - \left(\frac{\partial q_{vs}}{\partial t} + \text{Adv.}q_{vs} \right) - A_r - C_r, \quad (38)$$

$$M_{q_r} = F_r - E_r + A_r + C_r. \quad (39)$$

ただし,

$$\text{Adv.}q_{vs} = u \frac{\partial q_{vs}}{\partial x} + v \frac{\partial q_{vs}}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_{vs}}{\partial z^*} + \text{Diff.}q_{vs}, \quad (40)$$

$$E_r = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\left(1 - \frac{q_v}{q_{vs}}\right) C (\bar{\rho} q_r)^{0.525}}{5.4 \times 10^5 + \frac{2.55 \times 10^6}{\bar{\rho} q_{vs}}}, \quad (41)$$

$$C = 1.6 + 124.9 (\bar{\rho} q_r)^{0.2046}, \quad (42)$$

$$A_r = k_1 (q_c - a), \quad (43)$$

$$C_r = k_2 q_c q_r^{0.875}, \quad (44)$$

$$F_r = \frac{1}{G^{1/2} \bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z^*} (\bar{\rho} V q_r), \quad (45)$$

$$V = 36.34 (\bar{\rho} q_r)^{0.1346} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (46)$$

$$k_1 = 0.001 \text{ s}^{-1}, \quad (47)$$

$$a = 0.001 \text{ kg kg}^{-1}, \quad (48)$$

$$k_2 = 2.2 \text{ s}^{-1} \quad (49)$$

サブグリッドスケールの運動エネルギーの方程式:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial t} = & -\text{Adv}.E \\
& + \frac{3gC_m l E^{1/2}}{G^{1/2}} \left(-A \frac{\partial \theta_e}{\partial z^*} + \frac{\partial q_l}{\partial z^*} \right) \\
& + 2C_m l E^{1/2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
& + C_m l E^{1/2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + G^{13} \frac{\partial v}{\partial z^*} + G^{23} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial w}{\partial z^*} + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right)^2 \right\} \\
& + C_m l E^{1/2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) + \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) \right\} \\
& + 2C_m l E^{1/2} \left\{ \left(\frac{\partial E^{1/2}}{\partial x} + G^{13} \frac{\partial E^{1/2}}{\partial z^*} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\partial E^{1/2}}{\partial y} + G^{23} \frac{\partial E^{1/2}}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial E^{1/2}}{\partial z^*} \right)^2 \right\} \\
& - \frac{C_\varepsilon}{l} E^{3/2} \\
\text{Adv}.E = & u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} + \omega \frac{\partial E}{\partial z^*} + \text{Diff}.E \tag{50}
\end{aligned}$$

1.6 水平方向の運動方程式の離散化

1.4 節で定義した表記を用いて, (i, j, k) 番目の格子について音波を解に含む基礎方程式を離散化する.

まず, 短い時間間隔 τ で計算する項について離散化したものを書き下す.

水平方向の運動方程式は陽解法で離散化する.

x 方向の運動方程式:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^{\tau+\Delta\tau} - u_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^{\tau}}{\Delta\tau} &= -c_p \bar{\theta}_v \left[\left\{ (\partial_x \pi)_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k} - \alpha (\partial_x Div)_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k} \right\}^{\tau} \right. \\ &\quad \left. + \overline{G^{13}z^*} \left\{ (\partial_{z^*} \bar{\pi}^{xz^*})_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k} - \alpha (\partial_{z^*} \overline{Div}^{xz^*})_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k} \right\}^{\tau} \right] \\ &\quad - \text{Adv.} u_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + \text{Cori.} u_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + (D_u)_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^{t-\Delta t} \quad (51) \end{aligned}$$

y 方向の運動方程式:

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^{\tau+\Delta\tau} - v_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^{\tau}}{\Delta\tau} &= -c_p \bar{\theta}_v \left[\left\{ (\partial_y \pi)_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k} - \alpha (\partial_y Div)_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k} \right\}^{\tau} \right. \\ &\quad \left. + \overline{G^{23}y^*} \left\{ (\partial_{z^*} \bar{\pi}^{yz^*})_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k} - \alpha (\partial_{z^*} \overline{Div}^{yz^*})_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k} \right\}^{\tau} \right] \\ &\quad - \text{Adv.} v_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^t + \text{Cori.} v_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^t + (D_v)_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^{t-\Delta t}. \quad (52) \end{aligned}$$

Div を含む項を書き下すと以下ようになる. ただし上付添字 τ は省略した.

$$\begin{aligned} Div_{i,j,k} &= (\partial_x u)_{i,j,k} + (\partial_y v)_{i,j,k} + \overline{G^{13}xz^*}_{i,j,k} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_{i,j,k} \\ &\quad + \overline{G^{23}yz^*}_{i,j,k} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_{i,j,k} + \frac{1}{G_{i,j,k}^{1/2}} (\partial_{z^*} w)_{i,j,k}, \quad (53) \end{aligned}$$

$$(\partial_x Div)_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k} = \frac{Div_{i+\Delta x,j,k} - Div_{i,j,k}}{\Delta x}, \quad (54)$$

$$(\partial_{z^*} \overline{Div}^{xz^*})_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k} = \frac{\overline{Div}^{xz^*}_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k+\frac{\Delta z^*}{2}} - \overline{Div}^{xz^*}_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k-\frac{\Delta z^*}{2}}}{\Delta z^*}, \quad (55)$$

$$(\partial_y Div)_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k} = \frac{Div_{i+\Delta x,j,k} - Div_{i,j,k}}{\Delta y}, \quad (56)$$

$$(\partial_{z^*} \overline{Div}^{yz^*})_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k} = \frac{\overline{Div}^{yz^*}_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k+\frac{\Delta z^*}{2}} - \overline{Div}^{yz^*}_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k-\frac{\Delta z^*}{2}}}{\Delta z^*} \quad (57)$$

次に, 長い時間間隔 t で計算する項 (各方程式の上付添字 t がついた項) について離散化したものを書き下す.

移流項:

$$\begin{aligned} \text{Adv.}u_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^t &= (u\partial_x\bar{u}^x)_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + (\bar{v}^{xy}\partial_y\bar{u}^y)_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^t \\ &\quad + (\bar{\omega}^{xz^*}\partial_{z^*}\bar{u}^{z^*})_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + \text{Diff.}u_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^t, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \text{Adv.}v_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^t &= (\bar{u}^{xy}\partial_x\bar{v}^x)_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^t + (v\partial_y\bar{v}^y)_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^t \\ &\quad + (\bar{\omega}^{yz^*}\partial_{z^*}\bar{v}^{z^*})_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^t + \text{Diff.}v_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^t. \end{aligned} \quad (59)$$

数値粘性項:

$$\text{Diff.}u_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^t = \nu_{2h} \left[\partial_x^2 u + \partial_y^2 u \right]_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^t + \nu_{2v} \left[\partial_{z^*}^2 u \right]_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^t, \quad (60)$$

$$\text{Diff.}v_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^t = \nu_{2h} \left[\partial_x^2 v + \partial_y^2 v \right]_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^t + \nu_{2v} \left[\partial_{z^*}^2 v \right]_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^t \quad (61)$$

コリオリ項:

$$\text{Cori.}u_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^t = \left[\overline{f\bar{v}^{yx}} \right]_{i+\frac{\Delta x}{2},j,k}^t, \quad (62)$$

$$\text{Cori.}v_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^t = \left[\overline{f\bar{u}^{xy}} \right]_{i,j+\frac{\Delta y}{2},k}^t \quad (63)$$

拡散項: (右辺の下付添字と上付添字 $t - \Delta t$ は省略した)

$$\begin{aligned}
D_{u,i+\frac{1}{2},j,k} = & 2\partial_x \left\{ K_m (\partial_x u) + K_m \overline{G^{13}{}^{xz^*}} (\partial_{z^*} \overline{u}^{xz^*}) \right\} \\
& + \partial_y \left\{ \overline{K_m}{}^{xy} (\partial_y u) + \overline{K_m}{}^{xy} (\partial_x v) + \overline{K_m}{}^{xy} \overline{G^{23}{}^{xz^*}} (\partial_{z^*} \overline{u}^{yz^*}) \right. \\
& \quad \left. + \overline{K_m}{}^{xy} \overline{G^{13}{}^{yz^*}} (\partial_{z^*} \overline{v}^{xz^*}) \right\} \\
& + 2\overline{G^{13}{}^{z^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m}{}^{xz^*} (\partial_x \overline{u}^{xz^*}) + \overline{K_m}{}^{xz^*} G^{13} (\partial_{z^*} u) \right\} \\
& + \overline{G^{23}{}^{xyz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m}{}^{xz^*} (\partial_y \overline{u}^{yz^*}) + \overline{K_m}{}^{xz^*} \partial_x \overline{v}^{yz^*} \right. \\
& \quad \left. + \overline{K_m}{}^{xz^*} \overline{G^{23}{}^{xy}} (\partial_{z^*} u) + \overline{K_m}{}^{xz^*} \overline{G^{13}{}^{z^*}} (\partial_{z^*} \overline{v}^{xy}) \right\} \\
& + \frac{1}{G^{1/2}{}^x} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m}{}^{xz^*} (\partial_x w) + \frac{\overline{K_m}{}^{xz^*}}{G^{1/2}{}^{xz^*}} (\partial_{z^*} u) + \overline{K_m}{}^{xz^*} G^{13} \partial_{z^*} \overline{w}^{xz^*} \right\} \\
& - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left\{ (\partial_x K_m^2) + \overline{G^{13}{}^{z^*}} (\partial_{z^*} \overline{K_m}{}^{xz^*}) \right. \\
& \quad + (\partial_y \overline{K_m}{}^{xy}) + \overline{G^{23}{}^{xz^*}} (\partial_{z^*} \overline{K_m}{}^{yz^*}) \\
& \quad \left. + \frac{1}{G^{1/2}{}^x} (\partial_{z^*} \overline{K_m}{}^{xz^*}) \right\}, \tag{64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{v,i,j+\frac{1}{2},k} = & \partial_x \left\{ \overline{K_m}{}^{xy} (\partial_x v) + \overline{K_m}{}^{xy} (\partial_y u) \right. \\
& \quad \left. + \overline{K_m}{}^{xy} \overline{G^{23}{}^{xz^*}} (\partial_{z^*} \overline{u}^{yz^*}) + \overline{K_m}{}^{xy} \overline{G^{13}{}^{yz^*}} \partial_{z^*} (\overline{v}^{xz^*}) \right\} \\
& + 2\partial_y \left\{ K_m (\partial_y v) + K_m \overline{G^{23}{}^{yz^*}} (\partial_{z^*} \overline{v}^{yz^*}) \right\} \\
& + \overline{G^{13}{}^{xyz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m}{}^{yz^*} (\partial_x \overline{v}^{xz^*}) + \overline{K_m}{}^{yz^*} (\partial_y \overline{u}^{xz^*}) \right. \\
& \quad \left. + \overline{K_m}{}^{yz^*} G^{23} (\partial_{z^*}) \overline{u}^{xy} + \overline{K_m}{}^{yz^*} \overline{G^{13}{}^{xy}} (\partial_{z^*} v) \right\} \\
& + 2\overline{G^{23}{}^{z^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m}{}^{yz^*} (\partial_y \overline{v}^{yz^*}) + \overline{K_m}{}^{yz^*} G^{23} (\partial_{z^*} v) \right\} \\
& - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left\{ (\partial_x \overline{K_m}{}^{xy}) + \overline{G^{13}{}^{yz^*}} (\partial_{z^*} \overline{K_m}{}^{yz^*}) \right. \\
& \quad + (\partial_y K_m^2) + \overline{G^{23}{}^{z^*}} (\partial_{z^*} \overline{K_m}{}^{yz^*}) \\
& \quad \left. + \frac{1}{G^{1/2}{}^y} (\partial_{z^*} \overline{K_m}{}^{yz^*}) \right\} \tag{65}
\end{aligned}$$

1.7 鉛直方向の運動方程式と圧力方程式の離散化

鉛直方向の運動方程式と圧力方程式は陰解法で離散化する. w, π は重み β をつけて τ と $\tau + \Delta\tau$ の平均をしたものを用いる.

鉛直方向の運動方程式:

$$\begin{aligned} \frac{w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\tau+\Delta\tau} - w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\tau}}{\Delta\tau} &= \alpha \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v}{G^{1/2} z^*} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} (\partial_{z^*} Div)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\tau} \\ &\quad - \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v}{G^{1/2} z^*} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \left[\beta (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\tau+\Delta\tau} + (1-\beta) (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\tau} \right] \\ &\quad - Adv.w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^t + Buoy.w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^t + (Dw)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{t-\Delta t}, \end{aligned} \quad (66)$$

圧力方程式:

$$\begin{aligned} \frac{\pi_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} - \pi_{i,j,k}^{\tau}}{\Delta\tau} &+ \frac{1}{G^{1/2} c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \left\{ \beta (\partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta}_v w)_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} + (1-\beta) (\partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta}_v w)_{i,j,k}^{\tau} \right\} \\ &= -\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}_v} \left[(\partial_x u)_{i,j,k} + (\partial_y v)_{i,j,k} \right. \\ &\quad \left. + \overline{G^{13} x z^*}_{i,j,k} (\partial_{z^*} \bar{u}^{x z^*})_{i,j,k} + \overline{G^{23} y z^*}_{i,j,k} (\partial_{z^*} \bar{v}^{y z^*})_{i,j,k} \right]^{\tau+\Delta\tau} \end{aligned} \quad (67)$$

ここで $\beta \neq 0$ である. (66) と (67) は $w^{\tau+\Delta\tau}$ と $\pi^{\tau+\Delta\tau}$ の連立方程式となり, Crank-Nicolson スキームにより鉛直についてインプリシットに解くことができる. この連立方程式の解き方は後で述べる.

Div を含む項を書き下すと以下ようになる. ただし上付添字 τ は省略した.

$$(\partial_{z^*} Div)_{i,j,k+\frac{\Delta z^*}{2}} = \frac{Div_{i,j,k+\Delta z^*} - Div_{i,j,k}}{\Delta z^*} \quad (68)$$

長い時間間隔 t で計算する項 (各方程式の上付添字 t がついた項) について離散化したものを書き下す.

移流項:

$$\begin{aligned} Adv.w_{i,j,k+\frac{\Delta z^*}{2}}^t &= \left(\bar{u}^{x z^*} \partial_x \bar{w}^x \right)_{i,j,k+\frac{\Delta z^*}{2}}^t + \left(\bar{v}^{y z^*} \partial_y \bar{w}^y \right)_{i,j,k+\frac{\Delta z^*}{2}}^t \\ &\quad + \left(\omega \partial_{z^*} \bar{w}^{z^*} \right)_{i,j,k+\frac{\Delta z^*}{2}}^t + Diff.w_{i,j,k+\frac{\Delta z^*}{2}}^t. \end{aligned} \quad (69)$$

数値粘性項:

$$\text{Diff.}w_{i,j,k+\frac{\Delta z^*}{2}}^t = \nu_{2h} \left[\partial_x^2 w + \partial_y^2 w \right]_{i,j,k+\frac{\Delta z^*}{2}}^t + \nu_{2v} \left[\partial_{z^*}^2 w \right]_{i,j,k+\frac{\Delta z^*}{2}}^t, \quad (70)$$

$$(71)$$

浮力項:

$$\text{Buoy.}w_{i,j,k+\frac{\Delta z^*}{2}}^t = g \left[\frac{\bar{\theta}^{z^*}}{\bar{\theta}} - 1 + 0.61 (\bar{q}_v^{z^*} - \bar{q}_v^{z^*}) - \bar{q}_c^{z^*} - \bar{q}_r^{z^*} \right]_{i,j,k+\frac{\Delta z^*}{2}}^t \quad (72)$$

拡散項: (右辺の下付添字と上付添字 $t - \Delta t$ は省略した)

$$\begin{aligned} D_{w,i,j,k+\frac{1}{2}} &= \partial_x \left\{ \overline{K_m^{xz^*}} (\partial_x w) + \frac{\overline{K_m^{xz^*}}}{G^{1/2xz^*}} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*}) + \overline{K_m^{xz^*}} G^{13} (\partial_{z^*} \bar{w}^{xz^*}) \right\} \\ &+ \partial_y \left\{ \overline{K_m^{yz^*}} (\partial_y w) + \frac{\overline{K_m^{yz^*}}}{G^{1/2yz^*}} (\partial_{z^*} v) + \overline{K_m^{yz^*}} G^{23} (\partial_{z^*} \bar{w}^{yz^*}) \right\} \\ &+ \overline{G^{13x}} \partial_{z^*} \left\{ K_m (\partial_x \bar{w}^{xz^*}) + \frac{K_m}{G^{1/2}} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*}) + K_m \overline{G^{13xz^*}} (\partial_{z^*} w) \right\} \\ &+ \overline{G^{23y}} \partial_{z^*} \left\{ K_m (\partial_y \bar{w}^{yz^*}) + \frac{K_m}{G^{1/2}} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*}) + K_m \overline{G^{23yz^*}} (\partial_{z^*} w) \right\} \\ &+ \frac{2}{G^{1/2z^*}} \partial_{z^*} \left\{ \frac{K_m}{G^{1/2}} (\partial_{z^*} w) \right\} \\ &- \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left\{ (\partial_x \overline{K_m^{xz^*}}) + \overline{G^{13x}} (\partial_{z^*} K_m^2) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_y \overline{K_m^{yz^*}}) + \overline{G^{23y}} (\partial_{z^*} K_m^2) + \frac{1}{G^{1/2z^*}} (\partial_{z^*} K_m^2) \right\}. \quad (73) \end{aligned}$$

水平方向の運動方程式 (51) と (52) を計算して $u^{\tau+\Delta\tau}$, $v^{\tau+\Delta\tau}$ を求める. 次に (66) と (67) から $w^{\tau+\Delta\tau}$ を消去して $\pi^{\tau+\Delta\tau}$ を計算して求める. 最後に $w^{\tau+\Delta\tau}$ を求める.

鉛直方向の運動方程式を離散化した式 (66) より

$$\begin{aligned}
w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\tau+\Delta\tau} &= w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\tau} - \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v \Delta\tau}{G^{1/2} z^*} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \left\{ -\alpha (\partial_{z^*} Div)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\tau} + (1-\beta) (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\tau} \right\} \\
&\quad + F.w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^t \Delta\tau - \beta \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v \Delta\tau}{G^{1/2} z^*} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\tau+\Delta\tau} \quad (74)
\end{aligned}$$

ただし

$$F.w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^t = -Adv.w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^t + Buoy.w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^t + (D_w)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{t-\Delta t} \quad (75)$$

である。

離散化した圧力方程式 (67) より、

$$\begin{aligned}
\pi_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} &+ \beta \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,k} \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w) \right\}_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} \\
&= \pi_{i,j,k}^{\tau} - (1-\beta) \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,k} \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w) \right\}_{i,j,k}^{\tau} \\
&\quad - \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\theta}_v} \left[(\partial_x u)_{i,j,k} + (\partial_y v)_{i,j,k} + \overline{G^{13} x z^*}_{i,j,k} (\partial_{z^*} \bar{u}^{x z^*})_{i,j,k} + \overline{G^{23} y z^*}_{i,j,k} (\partial_{z^*} \bar{v}^{y z^*})_{i,j,k} \right]_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} \quad (76)
\end{aligned}$$

(74) を代入して $w^{\tau+\Delta\tau}$ を消去すると、

$$\begin{aligned}
\pi_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} &- \beta^2 \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,k} \left[\partial_{z^*} \left\{ \left(\frac{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right) (\partial_{z^*} \pi) \right\} \right]_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} \\
&= \pi_{i,j,k}^{\tau} - (1-\beta) \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,k} \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w) \right\}_{i,j,k}^{\tau} \\
&\quad - \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\theta}_v} \left[(\partial_x u)_{i,j,k} + (\partial_y v)_{i,j,k} + \overline{G^{13} x z^*}_{i,j,k} (\partial_{z^*} \bar{u}^{x z^*})_{i,j,k} + \overline{G^{23} y z^*}_{i,j,k} (\partial_{z^*} \bar{v}^{y z^*})_{i,j,k} \right]_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad - \beta \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,k} \\
&\quad \times \left[\partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \left\{ w^{\tau} - \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v \Delta\tau}{G^{1/2} z^*} \right) \left\{ -\alpha (\partial_{z^*} Div)^{\tau} + (1-\beta) (\partial_{z^*} \pi)^{\tau} \right\} - F.w^t \Delta\tau \right\} \right]_{i,j,k} \quad (77)
\end{aligned}$$

さらに、左辺を z^* 方向の微分をオペレータなしで書き下すと、

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \pi_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad - \beta^2 \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{c^2 \Delta\tau^2}{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,k} \\
&\quad \times \frac{1}{\Delta z^*} \left[\left(\frac{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,k} \frac{1}{\Delta z^*} (\pi_{i,j,k+1} - \pi_{i,j,k}) \right. \\
&\quad \quad \left. - \left(\frac{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,k-1} \frac{1}{\Delta z^*} (\pi_{i,j,k} - \pi_{i,j,k-1}) \right]^{\tau+\Delta\tau} \\
&= \pi_{i,j,k}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad - \beta^2 \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{c^2 \Delta\tau^2}{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,k} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \\
&\quad \times \left[\left(\frac{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,k} \pi_{i,j,k+1} - \left\{ \left(\frac{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,k} + \left(\frac{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,k-1} \right\} \pi_{i,j,k} \right. \\
&\quad \quad \left. + \left(\frac{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,k-1} \pi_{i,j,k-1} \right]^{\tau+\Delta\tau}. \tag{78}
\end{aligned}$$

鉛直陰解法における上部と下部の境界条件は、それぞれ

$$w = 0 \quad (k = 0), \tag{79}$$

$$\omega = u \frac{\partial z_s}{\partial x} + v \frac{\partial z_s}{\partial y} \quad (k = km + 1) \tag{80}$$

である。上部境界における鉛直方向の運動方程式を離散化したものは

$$\begin{aligned}
\beta (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,w(km+1)}^{\tau+\Delta\tau} &= \alpha (\partial_{z^*} Div)_{i,j,w(km+1)}^{\tau} - (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,w(km+1)}^{\tau} \\
&\quad + \left(\frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}_v} F \cdot w^t \right)_{i,j,w(km+1)} \tag{81}
\end{aligned}$$

となり、圧力方程式は

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \pi_{i,j,km}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad + \beta^2 \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,km} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left[\left(\frac{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,w(km)} (\pi_{i,j,km} - \pi_{i,j,km-1}) \right]^{\tau+\Delta\tau} \\
(\text{右辺}) &= \pi_{i,j,km}^\tau - (1-\beta) \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\rho}\bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,km} \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho}\bar{\theta}_v w) \right\}_{i,j,km}^\tau \\
&\quad - \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\theta}_v} \left[(\partial_x u)_{i,j,km} + (\partial_y v)_{i,j,km} \right. \\
&\quad \quad \left. + \overline{G^{13}}_{i,j,km}^{xz^*} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_{i,j,km} + \overline{G^{23}}_{i,j,km}^{yz^*} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_{i,j,km} \right]^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad - \beta \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\rho}\bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,km} \\
&\quad \times \left[\partial_{z^*} \bar{\rho}\bar{\theta}_v \left\{ w^\tau - \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v \Delta\tau}{G^{1/2} z^*} \right) \{-\alpha (\partial_{z^*} Div)^\tau + (1-\beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau\} - F \cdot w^t \Delta\tau \right\} \right]_{i,j,km} \\
&\quad + \beta \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,km} \frac{1}{\Delta z^*} \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,w(km+1)} \\
&\quad \times \left\{ \alpha (\partial_{z^*} Div)_{i,j,w(km+1)}^\tau - (1-\beta) (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,w(km+1)}^\tau + \left(\frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}_v} F \cdot w^t \right)_{i,j,w(km+1)} \right\} \quad (82)
\end{aligned}$$

となる。

また、下部境界における鉛直方向の運動方程式を離散化したものは

$$\begin{aligned}
\beta (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,w(0)}^{\tau+\Delta\tau} &= \alpha (\partial_{z^*} Div)_{i,j,w(0)}^\tau - (1-\beta) (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,w(0)}^\tau \\
&\quad + \left(\frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}_v} F \cdot w^t \right)_{i,j,w(0)} \quad (83)
\end{aligned}$$

となり、圧力方程式は

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \pi_{i,j,0}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad - \beta^2 \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,0} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left[\left(\frac{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,w(1)} (\pi_{i,j,1} - \pi_{i,j,0}) \right]^{\tau+\Delta\tau} \\
(\text{右辺}) &= \pi_{i,j,0}^\tau - (1-\beta) \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\rho}\bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,0} \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho}\bar{\theta}_v w) \right\}_{i,j,0}^\tau \\
&\quad - \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\theta}_v} \left[(\partial_x u)_{i,j,0} + (\partial_y v)_{i,j,0} \right. \\
&\quad \quad \left. + \overline{G^{13}{}^{xz^*}}_{i,j,0} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_{i,j,1} + \overline{G^{23}{}^{yz^*}}_{i,j,0} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_{i,j,0} \right]^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad - \beta \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{c_p \bar{\rho}\bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,0} \\
&\quad \times \left[\partial_{z^*} \bar{\rho}\bar{\theta}_v \left\{ w^\tau - \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v \Delta\tau}{G^{1/2} z^*} \right) \{-\alpha (\partial_{z^*} Div)^\tau + (1-\beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau\} - F \cdot w^t \Delta\tau \right\} \right]_{i,j,0} \\
&\quad - \beta \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{\rho}\bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,1} \frac{1}{\Delta z^*} \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,w(0)} \\
&\quad \times \left\{ \alpha (\partial_{z^*} Div)_{i,j,w(0)}^\tau - (1-\beta) (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,w(0)}^\tau + \left(\frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}_v} F \cdot w^t \right)_{i,j,w(0)} \right\} \quad (84)
\end{aligned}$$

これらの式は以下のように行列を用いて書くことができる:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} A_0 & B_0 & & 0 \\ C_0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & B_{km-1} \\ 0 & & C_{km-1} & A_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{00} & \pi_{02} & \cdots & \pi_{0im} \\ \pi_{20} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \pi_{km0} & \cdots & \cdots & \pi_{kxim} \end{pmatrix}^{\tau+\Delta\tau} \\
&= \begin{pmatrix} D_{00} & D_{02} & \cdots & D_{0im} \\ D_{20} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_{km0} & \cdots & \cdots & D_{kxim} \end{pmatrix}^\tau. \quad (85)
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
A_k &= 1 + \beta^2 \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,k} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left\{ \left(\frac{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,k} + \left(\frac{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,k-1} \right\}, \\
&\quad (k = 1, 3, \dots, km - 1), \\
A_0 &= 1 + \beta^2 \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,0} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left(\frac{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,w(1)}, \\
A_{km} &= 1 + \beta^2 \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,km} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left(\frac{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,w(km)}, \\
B_k &= -\beta^2 \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,k} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left(\frac{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,w(k+1)}, \\
C_k &= -\beta^2 \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,k+1} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left(\frac{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,w(k+1)}, \\
D_{ik} &= \pi_{i,j,k}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,k} \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w) \right\}_{i,j,k}^\tau \\
&\quad - \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}_v} \left[(\partial_x u)_{i,j,k} + (\partial_y v)_{i,j,k} + \overline{G^{13}{}^{xz^*}}_{i,j,k} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_{i,j,k} + \overline{G^{23}{}^{yz^*}}_{i,j,k} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_{i,j,k} \right]^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad - \beta \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,k} \\
&\quad \times \left[\partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \left\{ w^\tau - \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v \Delta \tau}{G^{1/2} z^*} \right) \{ -\alpha (\partial_{z^*} Div)^\tau + (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau \} - F \cdot w^t \Delta \tau \right\} \right]_{i,j,k}, \\
&\quad (k = 1, 3, \dots, km - 3), \\
D_{i0} &= \pi_{i,j,0}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,0} \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w) \right\}_{i,j,0}^\tau \\
&\quad - \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}_v} \left[(\partial_x u)_{i,j,0} + (\partial_y v)_{i,j,0} \right. \\
&\quad \quad \left. + \overline{G^{13}{}^{xz^*}}_{i,j,0} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_{i,j,0} + \overline{G^{23}{}^{yz^*}}_{i,j,1} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_{i,j,0} \right]^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad - \beta \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,0} \\
&\quad \times \left[\partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \left\{ w^\tau - \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v \Delta \tau}{G^{1/2} z^*} \right) \{ -\alpha (\partial_{z^*} Div)^\tau + (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau \} - F \cdot w^t \Delta \tau \right\} \right]_{i,j,0} \\
&\quad - \beta \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,0} \frac{1}{\Delta z^{*2}} \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,w(0)} \\
&\quad \times \left\{ \alpha (\partial_{z^*} Div)_{i,j,w(0)}^\tau - (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,w(0)}^\tau + \left(\frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}_v} F \cdot w^t \right)_{i,j,w(0)} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{ikm-2} = & \pi_{i,j,km-2}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,km-2} \left\{ \partial_{z^*} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w) \right\}_{i,j,km-2}^\tau \\
& - \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}_v} \left[(\partial_x u)_{i,j,km-2} + (\partial_y v)_{i,j,km-2} \right. \\
& \quad \left. + \overline{G^{13}}_{i,j,km}^{xz^*} (\partial_{z^*} \bar{u}^{xz^*})_{i,j,km-2} + \overline{G^{23}}_{i,j,km}^{yz^*} (\partial_{z^*} \bar{v}^{yz^*})_{i,j,km-2} \right]^{\tau+\Delta\tau} \\
& - \beta \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,km-2} \\
& \quad \times \left[\partial_{z^*} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \left\{ w^\tau - \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v \Delta \tau}{G^{1/2} z^*} \right) \{ -\alpha (\partial_{z^*} Div)^\tau + (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)^\tau \} - F \cdot w^t \Delta \tau \right\} \right]_{i,j,km-2} \\
& + \beta \left(\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{i,j,km-2} \frac{1}{\Delta z^*} \left(\frac{c_p \bar{\theta}_v^2}{G^{1/2}} \right)_{i,j,w(km-1)} \\
& \quad \times \left\{ \alpha (\partial_{z^*} Div)_{i,j,w(km-1)}^\tau - (1 - \beta) (\partial_{z^*} \pi)_{i,j,w(km-1)}^\tau + \left(\frac{G^{1/2}}{c_p \bar{\theta}_v} F \cdot w^t \right)_{i,j,w(km-1)} \right\} \quad (86)
\end{aligned}$$

この連立 1 次方程式の係数行列は 3 項行列なので、LU 分解を行って計算すれば大幅に計算量を減らすことができる。

したがって、求めた $\pi^{\tau+\Delta\tau}$ と鉛直方向の運動方程式から $w^{\tau+\Delta\tau}$ を求めることができる。

1.8 熱力学方程式と各混合比の方程式の離散化

温位偏差 (θ) と水蒸気混合比 (q_v), 雲水の混合比 (q_c), 雨水の混合比 (q_r) について, 長い時間間隔 Δt で離散化する. 過飽和がない場合を考えているので, 予報方程式から得られた水蒸気の混合比と飽和混合比の関係が $q_v^{t+\Delta t} > q_{vs}^{t+\Delta t}$ の場合は湿潤飽和調節法⁴を用いる.

これらの物理量は格子点 (i, j, k) についてなので, ここでは物理量の下付添字 i, j, k は省略する.

熱力学方程式:

$$\frac{\theta^{t+\Delta t} - \theta^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = -\text{Adv.}\theta^t + M_\theta^t + D_\theta^{t-\Delta t} \quad (87)$$

水蒸気の混合比の方程式:

$$\frac{q_v^{t+\Delta t} - q_v^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = -\text{Adv.}q_v^t + M_{q_v}^t + D_{q_v}^{t-\Delta t} \quad (88)$$

雲水の混合比の方程式:

$$\frac{q_c^{t+\Delta t} - q_c^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = -\text{Adv.}q_c^t + M_{q_c}^t + D_{q_c}^{t-\Delta t} \quad (89)$$

雨水の混合比の方程式:

$$\frac{q_r^{t+\Delta t} - q_r^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = -\text{Adv.}q_r^t + M_{q_r}^t + D_{q_r}^{t-\Delta t} \quad (90)$$

長い時間間隔における Leap-frog 法による積分の場合, それに伴う計算モードを抑えるため Asselin の時間フィルタ (Asselin, 1972) を用いる⁵. 時間 $t + \Delta t$ の物理量が得られた後, 時間 t の物理量を以下のようにフィルタリングする:

$$\phi^t = \phi^{*t} + \mu_a (\phi^{*t+\Delta t} - 2\phi^{*t} + \phi^{t-\Delta t}). \quad (91)$$

ただし μ_a はフィルターの係数で, $\mu_a = 0.1$ が標準的な値である.

⁴A.1 参照.

⁵A.2 節参照.

移流項:

$$\text{Adv.}\theta^t = \left[\overline{u\partial_x\theta^x} + \overline{v\partial_y\theta^y} + \overline{\omega\partial_{z^*}\theta^{z^*}} \right]^t + \text{Diff.}\theta^t, \quad (92)$$

$$\text{Adv.}q_v^t = \left[\overline{u\partial_x q_v^x} + \overline{v\partial_y q_v^y} + \overline{\omega\partial_{z^*} q_v^{z^*}} \right]^t + \text{Diff.}q_v^t, \quad (93)$$

$$\text{Adv.}q_c^t = \left[\overline{u\partial_x q_c^x} + \overline{v\partial_y q_c^y} + \overline{\omega\partial_{z^*} q_c^{z^*}} \right]^t + \text{Diff.}q_c^t, \quad (94)$$

$$\text{Adv.}q_r^t = \left[\overline{u\partial_x q_r^x} + \overline{v\partial_y q_r^y} + \overline{\omega\partial_{z^*} q_r^{z^*}} \right]^t + \text{Diff.}q_r^t. \quad (95)$$

数値粘性項:

$$\text{Diff.}\theta^t = \nu_{2h} \left[\partial_x^2 \theta + \partial_y^2 \theta \right]^t + \nu_{2v} \left[\partial_{z^*}^2 \theta \right]^t, \quad (96)$$

$$\text{Diff.}q_v^t = \nu_{2h} \left[\partial_x^2 q_v + \partial_y^2 q_v \right]^t + \nu_{2v} \left[\partial_{z^*}^2 q_v \right]^t, \quad (97)$$

$$\text{Diff.}q_c^t = \nu_{2h} \left[\partial_x^2 q_c + \partial_y^2 q_c \right]^t + \nu_{2v} \left[\partial_{z^*}^2 q_c \right]^t, \quad (98)$$

$$\text{Diff.}q_r^t = \nu_{2h} \left[\partial_x^2 q_r + \partial_y^2 q_r \right]^t + \nu_{2v} \left[\partial_{z^*}^2 q_r \right]^t \quad (99)$$

生成・消滅項:

$$M_\theta^t = -\gamma \left(\frac{q_{vs}^{t+\Delta t} - q_{vs}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + \text{Adv.}q_{vs}^t + E_r^t \right), \quad (100)$$

$$M_{q_v}^t = \frac{q_{vs}^{t+\Delta t} - q_{vs}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + \text{Adv.}q_{vs}^{t-\Delta t} + E_r^t, \quad (101)$$

$$M_{q_c}^t = -\frac{q_{vs}^{t+\Delta t} - q_{vs}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} - \text{Adv.}q_{vs}^t - A_r^t - C_r^t, \quad (102)$$

$$M_{q_r}^t = F_r^t - E_r^t + A_r^t + C_r^t \quad (103)$$

ただし

$$\text{Adv.}q_{vs}^t = \left[\overline{u\partial_x q_{vs}^x} + \overline{v\partial_y q_{vs}^y} + \overline{\omega\partial_{z^*} q_{vs}^{z^*}} \right]^t + \text{Diff.}q_{vs}^t, \quad (104)$$

$$\begin{aligned} q_{vs} &= \frac{3.8}{\bar{p}} \exp \left(17.27 \frac{\bar{\Pi}\theta - 273}{\bar{\Pi}\theta - 36} \right) \\ &\simeq q_{vs}^* \left[1 + \frac{4093a\bar{\Pi}}{(\bar{\Pi}\theta^* - 36)^2} (\theta^{t+\Delta t} - \theta^*) \right], \end{aligned} \quad (105)$$

q_{vs} は Tetens の式より $\theta = \theta^*$ について線形化を行った。 q_{vs}^* は $\theta = \theta^*$ のときの q_{vs} の値である。

$$F_r^t = \left[\frac{1}{G^{1/2}\bar{\rho}} \partial_{z^*} (\bar{\rho}Vq_r) \right]^t, \quad (106)$$

$$V = 36.34 (\bar{\rho}q_r)^{0.1346} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (107)$$

拡散項:

$$\begin{aligned}
D_{\theta}^{t-\Delta t} &= 3\partial_x \left\{ \overline{K_m^x} (\partial_x \theta) + \overline{K_m^x G^{13z^*}} (\partial_{z^*} \overline{\theta^{xz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + 3\partial_y \left\{ \overline{K_m^y} (\partial_y \theta) + \overline{K_m^y G^{23z^*}} (\partial_{z^*} \overline{\theta^{yz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + 3\overline{G^{13xz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_x \overline{\theta^{xz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{13x}} (\partial_{z^*} \theta) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + 3\overline{G^{23yz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_y \overline{\theta^{yz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{23y}} (\partial_{z^*} \theta) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + \frac{3}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \left\{ \frac{K_m}{G^{1/2z^*}} (\partial_{z^*} \theta) \right\}^{t-\Delta t}, \tag{108}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{q_v}^{t-\Delta t} &= 3\partial_x \left\{ \overline{K_m^x} (\partial_x q_v) + \overline{K_m^x G^{13z^*}} (\partial_{z^*} \overline{q_v^{xz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + 3\partial_y \left\{ \overline{K_m^y} (\partial_y q_v) + \overline{K_m^y G^{23z^*}} (\partial_{z^*} \overline{q_v^{yz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + 3\overline{G^{13xz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_x \overline{q_v^{xz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{13x}} (\partial_{z^*} q_v) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + 3\overline{G^{23yz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_y \overline{q_v^{yz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{23y}} (\partial_{z^*} q_v) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + \frac{3}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \left\{ \frac{K_m}{G^{1/2z^*}} (\partial_{z^*} q_v) \right\}^{t-\Delta t}, \tag{109}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{q_c}^{t-\Delta t} &= 3\partial_x \left\{ \overline{K_m^x} (\partial_x q_c) + \overline{K_m^x G^{13z^*}} (\partial_{z^*} \overline{q_c^{xz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + 3\partial_y \left\{ \overline{K_m^y} (\partial_y q_c) + \overline{K_m^y G^{23z^*}} (\partial_{z^*} \overline{q_c^{yz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + 3\overline{G^{13xz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_x \overline{q_c^{xz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{13x}} (\partial_{z^*} q_c) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + 3\overline{G^{23yz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_y \overline{q_c^{yz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{23y}} (\partial_{z^*} q_c) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + \frac{3}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \left\{ \frac{K_m}{G^{1/2z^*}} (\partial_{z^*} q_c) \right\}^{t-\Delta t}, \tag{110}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{q_r}^{t-\Delta t} &= 3\partial_x \left\{ \overline{K_m^x} (\partial_x q_r) + \overline{K_m^x G^{13z^*}} (\partial_{z^*} \overline{q_r^{xz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + 3\partial_y \left\{ \overline{K_m^y} (\partial_y q_r) + \overline{K_m^y G^{23z^*}} (\partial_{z^*} \overline{q_r^{yz^*}}) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + 3\overline{G^{13xz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_x \overline{q_r^{xz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{13x}} (\partial_{z^*} q_r) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + 3\overline{G^{23yz^*}} \partial_{z^*} \left\{ \overline{K_m^{z^*}} (\partial_y \overline{q_r^{yz^*}}) + \overline{K_m^{z^*} G^{23y}} (\partial_{z^*} q_r) \right\}^{t-\Delta t} \\
&\quad + \frac{3}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \left\{ \frac{K_m}{G^{1/2z^*}} (\partial_{z^*} q_r) \right\}^{t-\Delta t}. \tag{111}
\end{aligned}$$

1.9 サブグリッドスケールの運動エネルギーの方程式の離散化

サブグリッドスケールの運動エネルギーの方程式は長い時間間隔 t で計算する。これらの物理量は格子点 (i, j, k) についてなので、ここでは物理量の下付添字 i, j, k は省略する。

$$\begin{aligned}
\frac{E^{t+\Delta t} - E^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = & - \text{Adv}.E^t \\
& + \frac{3gC_m l E^{1/2}}{G^{1/2}} \left(-A \partial_{z^*} \bar{\theta}_e^{z^*} + \partial_{z^*} \bar{q}_l^{z^*} \right)^t \\
& + C_m^2 l^2 \left\{ \left(\partial_x u + \overline{G^{13} x z^*} \partial_{z^*} \bar{u}^{x z^*} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\partial_y v + \overline{G^{23} y z^*} \partial_{z^*} \bar{v}^{y z^*} \right)^2 + \left(\frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} w \right)^2 \right\}^t \\
& + \frac{C_m^2 l^2}{2} \left\{ \left(\partial_x \bar{v}^{xy} + \partial_y \bar{u}^{xy} + \overline{G^{13} x z^*} \partial_{z^*} \bar{v}^{y z^*} + \overline{G^{23} y z^*} \partial_{z^*} \bar{u}^{x z^*} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\partial_x w + \overline{G^{13} x z^*} \partial_{z^*} w + \frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \bar{u}^{x z^*} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\partial_y \bar{w}^{y z^*} + \overline{G^{23} y z^*} \partial_{z^*} w + \frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \bar{v}^{y z^*} \right)^2 \right\}^t \\
& + \frac{C_m^2 l^2}{2} \left\{ \partial_x^2 E + \partial_x \left(\overline{G^{13} z^*} \partial_{z^*} \bar{E}^{x z^*} \right) \right. \\
& \quad \left. + \partial_{z^*} \left(\overline{G^{13} x} \partial_x \bar{E}^{x z^*} \right) + \overline{G^{13} x z^*} \partial_{z^*} \left(\overline{G^{13} x} \partial_{z^*} E \right) \right. \\
& \quad \left. + \partial_y^2 E + \partial_y \left(\overline{G^{23} z^*} \partial_{z^*} \bar{E}^{y z^*} \right) \right. \\
& \quad \left. + \partial_{z^*} \left(\overline{G^{23} y} \partial_y \bar{E}^{y z^*} \right) + \overline{G^{23} y z^*} \partial_{z^*} \left(\overline{G^{23} y} \partial_{z^*} E \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \left(\frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} E \right) \right\}^t \\
& + C_m^2 l^2 \left\{ \left(\partial_x \bar{E}^{1/2 x} + \overline{G^{13} x z^*} \partial_{z^*} \bar{E}^{1/2 z^*} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\partial_y \bar{E}^{1/2 y} + \overline{G^{23} y z^*} \partial_{z^*} \bar{E}^{1/2 z^*} \right)^2 + \left(\frac{1}{G^{1/2}} \partial_{z^*} \bar{E}^{1/2 z^*} \right)^2 \right\}^t \\
& - \frac{C_\varepsilon}{l} \left(E^{3/2} \right)^t. \tag{112}
\end{aligned}$$

移流項:

$$\text{Adv.}E^t = \left[\overline{u\partial_x E} + \overline{v\partial_y E} + \overline{\omega\partial_{z^*} E} \right]^t + \text{Diff.}E^t \quad (113)$$

数値粘性項:

$$\text{Diff.}E^t = \nu_{2h} \left[\partial_x^2 E + \partial_y^2 E \right]^t + \nu_{2v} \left[\partial_{z^*}^2 E \right]^t \quad (114)$$

2 コード解説

2.1 計算手順

計算手順は以下のように行う:

1. 基本場を求める

(a) 基本場の

- i. 地表面における圧力 $\bar{p}(0) = p_0$
 - ii. 温度の鉛直分布 $\bar{T}(z)$
 - iii. 水蒸気の混合比の鉛直分布 $\bar{q}_v(z)$
- を与える

(b) 地表面でのエクスナー関数を設定

$$\bar{\Pi}(0) = 1$$

(c) エクスナー関数より, 圧力 $\bar{p}(z)$ を求める

$$\bar{p}(z) = \bar{p}(0) \times \bar{\Pi}^{c_p/R_d}(z)$$

(d) 温位 $\bar{\theta}(z)$ を求める

$$\bar{\theta}(z) = \frac{\bar{T}(z)}{\bar{\Pi}(z)}$$

(e) 仮温位 $\bar{\theta}_v(z)$ を求める

$$\bar{\theta}_v(z) = \bar{\theta}(z) \times (1 + 0.62\bar{q}_v(z))$$

(f) 湿潤空気の状態方程式より, 密度 $\bar{\rho}(z)$ を求める

$$\bar{\rho}(z) = \frac{\bar{p}(0)}{R_d} \frac{\bar{\Pi}(z)}{\bar{\theta}_v^{c_v/R_d}(z)}$$

(g) 静水圧平衡の式より, エクスナー関数 (無次元量の圧力) の次の値 $\bar{\Pi}(z + dz)$ を求める

$$\bar{\Pi}(z + dz) = \bar{\Pi}(z) - dz \times \frac{g}{c_p \bar{\theta}_v(z)}$$

- (h) 1c から 1g までを繰り返して基本場を求める
2. 1 ステップ目の $\theta^{\Delta t}, q_v^{\Delta t}, q_c^{\Delta t}, q_r^{\Delta t}, E^{\Delta t}$ のみを前進差分で求める
 - 飽和混合比の時間微分は 0 とする
 - $q_v^{t+\Delta t} > q_{vs}^{t+\Delta t}$ ならば湿潤調節法を用いる
 3. (初期) 値 $u^{\tau-n\Delta\tau}, v^{\tau-n\Delta\tau}, w^{\tau-n\Delta\tau}, \pi^{\tau-n\Delta\tau}$ と $\theta^{t-\Delta t}, q_v^{t-\Delta t}, q_c^{t-\Delta t}, q_r^{t-\Delta t}, E^{t-\Delta t}$ を与える
 4. $\tau - n\Delta\tau (= t - \Delta t)$ から $\tau (= t)$ までの u, v, w, π の値を $\Delta\tau$ 毎に求める
 - θ, q_v, q_c, q_r, E は $t - \Delta t$ の値を用いる
 - (a) 水平方向の速度 $u^{\tau-(n-1)\Delta\tau}, w^{\tau-(n-1)\Delta\tau}$ を求める
 - (b) 鉛直方向の運動方程式と圧力方程式より $\pi^{\tau-(n-1)\Delta\tau}$ を消去して $w^{\tau-(n-1)\Delta\tau}$ を求める
 - (c) $\pi^{\tau-(n-1)\Delta\tau}$ を求める
 - (d) 4a から 4c の手順と同様にして, $\tau - (n-2)\Delta\tau, \tau - (n-3)\Delta\tau, \dots, \tau$ の u, v, w, π を求める
 5. 4 の手順と同様にして, $\tau (= t)$ から $\tau + n\Delta\tau (= t + \Delta t)$ までの u, v, w, π の値を $\Delta\tau$ 毎に求める
 - θ, q_v, q_c, q_r, E は t の値を用いる
 6. $\theta^{t-\Delta t}, q_v^{t-\Delta t}, q_c^{t-\Delta t}, q_r^{t-\Delta t}, E^{t-\Delta t}$ と $\theta^t, q_v^t, q_c^t, q_r^t, E^t$ から $\theta^{t+\Delta t}, q_v^{t+\Delta t}, q_c^{t+\Delta t}, q_r^{t+\Delta t}, E^{t+\Delta t}$ を求める
 - (a) 熱力学方程式より θ
 - (b) 混合比の式より q_v, q_c, q_r (乾燥空気の場合 $q_v = q_c = q_r = 0$)
 - i. $q_v^{t+\Delta t} > q_{vs}^{t+\Delta t}$ ならば湿潤調節法を用いる
 - (c) サブグリッドスケールの運動エネルギーの時間発展方程式より E
 7. 得られた $u, v, w, \pi, \theta, q_v, q_c, q_r, E$ を用いて, 3 から 6 行ったと同様の手順でさらに次の値を求める

A 付録

A.1 湿潤飽和調節法

飽和した状態の下での凝結-蒸発過程を数値的に評価するために, Soong and Ogura (1973) が提唱した湿潤飽和調節法を用いて熱力学方程式と混合比の方程式を解く. 湿潤飽和調節法とは過飽和しないように温位と混合比を計算する方法である.

どういう条件で湿潤飽和調節法を用いるのかが不明. 調節法を用いるのは「雲ができたかどうか」で分けている. 「雲ができた」と判別するには以下の 2 つの条件が考えられる:

- 水蒸気の混合比が飽和混合比より大きいかどうか (CReSS 方式):

- 数値上過飽和になっている:

$$q_v^* - q_{vs}^* > 0 \quad (115)$$

$q_c^{t+\Delta t} > 0$ の場合繰り返し計算.

$q_c^{t+\Delta t} < 0$ の場合不明.

- 数値上過飽和になっていない:

$$q_v^* - q_{vs}^* < 0 \quad (116)$$

場合, $q_c^{t+\Delta t} = 0$ として計算.

- 全凝結量の正負 (齊藤 (1999) 方式):

$$q_c^* + q_v^* - q_{vs}^* > 0 \quad (117)$$

かつ $q_c^{t+\Delta t} > 0$ の場合繰り返し計算.

かつ $q_c^{t+\Delta t} < 0$ の場合 $q_c^{t+\Delta t} = 0$ として計算.

$q_c^* + q_v^* - q_{vs}^* < 0$ の場合不明.

条件が微妙に違う気がする. 分けた後の計算方法はどちらも同じようである.

温位, 水蒸気と雲水の混合比の方程式は

$$\frac{d\phi}{dt} = M_\phi + D_\phi \quad (118)$$

と書ける. ただし $\phi = \theta, q_v, q_c$ であり, D_ϕ は拡散項, 微物理過程の生成・消滅項は

$$M_\theta = -\gamma \left\{ \frac{dq_{vs}}{dt} + E_r \right\}, \quad (119)$$

$$M_{q_v} = \frac{dq_{vs}}{dt} + E_r, \quad (120)$$

$$M_{q_c} = -\frac{dq_{vs}}{dt} - A_r - C_r, \quad (121)$$

$$q_{vs} = \frac{3.8}{\bar{p}} \exp \left(17.27 \frac{\bar{\Pi}\theta - 273}{\bar{\Pi}\theta - 36} \right) \quad (122)$$

である. q_{vs} は飽和混合比, E_r は蒸発による雨水から水蒸気への変換, A_r, C_r は雲水から雨水への変換を表す.

(温位の式) + $\gamma \times$ (水蒸気の混合比の式) より

$$\frac{d\theta}{dt} + \gamma \frac{dq_v}{dt} = D_\theta + D_{q_v}, \quad (123)$$

水蒸気の混合比の式 + 雲水の混合比の式より

$$\frac{dq_v}{dt} + \frac{dq_c}{dt} = D_{q_v} + D_{q_c} + E_r - A_r - C_r \quad (124)$$

である.

予報方程式 (118) から計算された $t + \Delta t$ での各値を仮に θ^*, q_v^*, q_c^* と表す. ここでは過飽和しないという条件で考えているので, $q_v^* > q_{vs}^*$ ならば湿潤飽和調節を行って $t + \Delta t$ での各値を求める. $q_v^* \leq q_{vs}^*$ ならば予報方程式から得られた値を用いる. 以下で湿潤飽和調節法を解説する.

式 (123) から

$$\frac{\theta^{t+\Delta t} - \theta^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + \gamma \frac{q_v^{t+\Delta t} - q_v^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = D_\theta^{t-\Delta t} + D_{q_v}^{t-\Delta t}, \quad (125)$$

$$\frac{\theta^* - \theta^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + \gamma \frac{q_v^* - q_v^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = D_\theta^{t-\Delta t} + D_{q_v}^{t-\Delta t}. \quad (126)$$

辺々引くと

$$\theta^{t+\Delta t} + \gamma q_v^{t+\Delta t} = \theta^* + \gamma q_v^* \quad (127)$$

が成り立つ.

過飽和しないので, 飽和に達した後の $t + \Delta t$ における水蒸気の混合比と飽和混合比は等しくなければならない:

$$q_v^{t+\Delta t} = q_{vs}^{t+\Delta t}$$

$$\begin{aligned}
&= b \exp \left[\frac{a (\bar{\Pi} \theta^{t+\Delta t} - 273)}{\bar{\Pi} \theta^{t+\Delta t} - 36} \right] \\
&\approx q_{vs}^* \left\{ 1 + \frac{273a\bar{\Pi}}{(\bar{\Pi}\theta^* - 36)^2} (\theta^{t+\Delta t} - \theta^*) \right\}. \tag{128}
\end{aligned}$$

ただし $a = 7.5 \ln 10$, $b = 3.8/\bar{p}$ である. したがって, 式 (127) は

$$\begin{aligned}
\theta^{t+\Delta t} &= \theta^* + \gamma (q_v^* - q_{vs}^{t+\Delta t}) \\
&= \theta^* + \gamma r_1 (q_v^* - q_{vs}^*) \tag{129}
\end{aligned}$$

となる. ただし

$$r_1 = \left[1 + \gamma q_{vs}^* \frac{273a\bar{\Pi}}{(\bar{\Pi}\theta^* - 36)^2} \right]^{-1}. \tag{130}$$

式 (127) と (129) から

$$q_v^{t+\Delta t} = q_v^* + \frac{1}{\gamma} (\theta^* - \theta^{t+\Delta t}) \tag{131}$$

また, (127) を求めたのと同様に, (124) より

$$q_v^{t+\Delta t} + q_c^{t+\Delta t} = q_v^* + q_c^* \tag{132}$$

が得られる.

式 (129), (131), (132) より暫定的に θ, q_v, q_c の値を求める. 求めた値について $q_c^{t+\Delta t} > 0$ ならば⁶, 式 (129), (131), (132) を繰り返し用いて値が収束するまで計算する⁷.

$q_c^{t+\Delta t} \leq 0$ ならば⁸,

$$q_c^{t+\Delta t} = 0, \tag{133}$$

$$q_v^{t+\Delta t} = q_v^* + q_c^*, \tag{134}$$

$$\theta^{t+\Delta t} = \theta^* - \gamma q_c^* \tag{135}$$

を用いる. ここで, 式 (134) は式 (132) より, 式 (135) は (131) と (134) より得られる.

⁶雲水ができる場合.

⁷凝結して周りの温度が上がるため, 蒸発が起こるのを繰り返す. この状態が落ち着くまで計算する.

⁸雲水ができない場合.

A.2 Asselin の時間フィルタ

長い時間間隔における Leap-frog 法による積分を計算する場合, 微小な物理モードの擾乱で計算モードが強く減衰する (Asselin, 1972). この計算モードを抑えるため Asselin の時間フィルターを用いる. $\partial\phi/\partial t = F$ という方程式を解く場合,

$$\phi^{*t+\Delta t} = \phi^{t-\Delta t} + 2\Delta t F^{*t}, \quad (136)$$

$$\phi^t = \phi^{*t} + \mu_a (\phi^{*t+\Delta t} - 2\phi^{*t} + \phi^{t-\Delta t}) \quad (137)$$

ただし, アスタリスク (*) 付変数はフィルタをかけられていない量であり, $\phi = \theta, q_v, q_c, q_r$ である. また μ_a は 0.1 とした. このフィルターは各時間ステップ毎にかけられる

B 参考文献

- Asselin, R., 1972: Frequency filter for time integrations. *Mon. Weather Rev.*, **100**, 487-490.
- Arakawa, A. and Lamb, V. R., 1977: Computational Design of the Basic Dynamical Processes of the UCLA General Circulation Model. *Methods in Computational Physics*, Academic Press, **17**, 174-267.
- Klemp J. B. and Robert B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070-1096.
- Klemp J. B., 1978: A splitting procedure for numerical solution of the compressible equations of motion. ???, ???.
- 中野満寿男, 2003: 鉛直シアーが台風初期渦形成に及ぼす影響. 九州大学大学院理学府 地球惑星科学専攻 修士論文.
- Ogura, Y., and N. A. Phillips, 1962: A scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **19**, 173-179.
- Ogura, Y., and T. Takahashi, 1971: Numerical simulation of the life cycle of a thunderstorm cell. *Mon. Wea. Rev.*, **99**, 895-911.
- Ogura, Y. and M. Yoshizaki, 1988: Numerical study of orographic-convective precipitation over the eastern Arabic Sea and the Ghats Mountains during the summer monsoon. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 2097-2122.
- Wilhelmson, R., and Y. Ogura, 1972: The pressure perturbation and the numerical modeling of a cloud. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1295-1307.
- 大宮司久明, 三宅裕, 吉澤徹, 1998: 乱流の数値流体力学—モデルと計算法. 東京大学出版会, 652.
- 斉藤和雄 編, 1999: 非静力学モデル. 気象研究ノート 第 196 号, 日本気象学会.
- Skamarock, William C. and Joseph B. Klemp, 1992: The stability of time-split methods for the hydrostatic and the nonhydrostatic elastic equation. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2109-2127.
- Soong, S-T., and Y. Ogura, 1973: A comparison between axi-symmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 879-893
- Tokioka, T., 1978: Some considerations on vertical differencing. *J. Meteor. soc. Japan*, **56**, 98-111.

坪木和久, 榊原篤志, 2001: CReSS ユーザーズガイド 第 2 版.
http://www.tokyo.rist.or.jp/CReSS_Fujin/CReSS.top.html

謝辞

本資源は, 地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

<http://www.gfd-dennou.org/arch/deepconv/kaminari/>

において公開されているものである。©高橋 こう子, 杉山 耕一朗, 小高 正嗣, 中島 健介, 林 祥介 (K. Takahashi, K. Sugiyama, M. Odaka, K. Nakajima and Y.-Y. Hayashi) 2003. 本資源は, 著作者の諸権利に抵触しない (迷惑をかけない) 限りにおいて自由に利用していただいて構わない。なお, 利用する際には今一度自ら内容を確認することをお願いする (無保証無責任原則)。

本資源に含まれる元資源提供者 (図等の版元等を含む) からは, 直接的な形での WEB 上での著作権または使用許諾を得ていない場合があるが, 勝手ながら, 「未来の教育」のための実験という学術目的であることをご理解いただけるものと信じ, 学術標準の引用手順を守ることで諸手続きを略させていただいている。本資源の利用者には, この点を理解の上, 注意して扱っていただけるようお願いする。万一, 不都合のある場合には

deepconv@gfd-dennou.org

まで連絡していただければ幸いです。